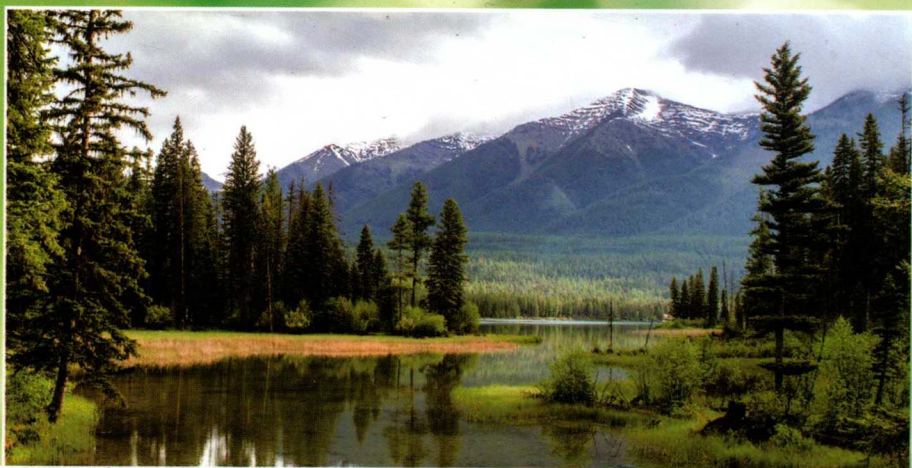


GAILULUN YU SHULITONGJI JIAOCHENG



普通高等教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计教程 (第2版)

韩 明 编著



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计教程

(第 2 版)

韩 明 编著



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书既继承了国内相关教材的传统,又汲取了国外相关教材直观、灵活的风格,图文并茂,注重可读性,着重讲解基本概念、数学思想,强调理论与方法的应用,并融入了数学实验与数学建模的思想方法。

全书共十章,前五章是概率论部分,包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征,以及特征函数与极限定理;后五章是数理统计部分,包括数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析及回归分析。

本书可供高等院校(特别是应用型本科院校)数学类、统计类等有关专业作为教材使用,还可供相关专业的教师 and 广大自学者参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计教程 / 韩明编著. -- 2版. -- 上海:同济大学出版社,2018.1
ISBN 978-7-5608-7602-3

I. ①概… II. ①韩… III. ①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 IV. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 331776 号

普通高等教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计教程(第2版)

韩 明 编著

责任编辑 陈佳蔚 责任校对 徐春莲 封面设计 潘向葵

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn
(地址:上海市四平路 1239 号 邮编:200092 电话:021-65985622)

经 销 全国各地新华书店
排 版 南京月叶图文制作有限公司
印 刷 上海同济印刷厂有限公司
开 本 787 mm×1092 mm 1/16
印 张 22.25
印 数 1—2 100
字 数 555 000
版 次 2018 年 1 月第 2 版 2018 年 1 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5608-7602-3

定 价 56.00 元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换 版权所有 侵权必究

前言

本书第一版出版以来,深受广大师生的关心和厚爱,在此作者表示衷心的感谢.第一版出版以后,作者继续关注国内外“概率论与数理统计”课程教学改革的有关动态,并已将部分成果融入了本书中.

随着大数据在日常生活中的日益渗透,作为数学基础之一的“概率论与数理统计”面临着新的需求,因此,围绕该课程的教学改革一直受到关注.“概率论与数理统计”是研究随机现象统计规律性的一门数学课程,它主要培养学生分析随机现象的能力,这种能力在大数据时代对于大多数人来说都是必备的.

“概率论与数理统计”虽然是一门成熟的课程,但作者在编写中注重引入数学思想,努力写出新意境.本书中对一些细节的处理,能具体地体现作者的这一初衷.

本书尝试与数学实验(mathematical experiment)、数学建模(mathematical modelling)进行融合.把数学实验和数学建模的思想方法融入数学类课程,这是当前高等院校数学类课程教学改革的一个重要方向.数学实验、数学建模对激发学生学习数学的兴趣、提高学生应用数学的能力有着重要的作用.本书的“附录 A 数学建模及大学生数学建模竞赛简介”和“附录 B 概率论与数理统计实验简介”及其在教材中的相关内容,从一个侧面体现了本课程的教学改革情况.本书中有一些计算和画图是用 MATLAB 和 R 软件来实现的,相关 MATLAB 代码见附录 B,相关 R 代码见第 9 章——方差分析、第 10 章——回归分析.

在本课程的教学,如果能融入一些数学文化史料等,在强调知识性的同时增加一些趣味性,对于提高本课程的教学效果一定会有所帮助.面对教学中存在的问题,如何有效地提高教学质量,激发学生的学习积极性、主动性,是本课程当前教学中迫切需要解决的问题.

本书再版是在第一版的基础上进行的.在 2014 年第一版出版后,经过四年来的教学实践,我们又积累了一些经验,并收集了广大师生的意见和建议.因此,本书再版基本保留了第一版的内容体系和大部分内容;修改了第一版中的不当和错误,努力提高本书的质量;对部分内容进行了修订,调整、补充了个别例题和习题,并对附录 A 和附录 B 进行了补充.

另外,与本书配套的《概率论与数理统计教程习题解答》,将与本书同步出版.

在本书再版过程中,作者曾就相关问题与荆广珠教授、李春华副教授进行讨论,受益匪浅,在此表示感谢.

虽然作者努力使本书写成为一本既有特色又便于教学的教材,但由于水平所限,书中难免还有一些疏漏甚至是错误,恳请专家和读者批评指正.让我们共同努力,把这本教材建设好.

韩 明

2017 年 12 月

第1版前言

为贯彻落实《国家中长期教育改革和发展规划纲要(2010—2020年)》，结合“高等学校本科教学质量与教学改革工程”，在2013年9月，中国高等教育学会发出了《关于组织申报“普通高等学校应用型本科教育教材规划”选题立项的通知》。本书作者经过多年来的教学实践，也深感一部适合应用型本科院校数学类、统计类专业《概率论与数理统计》教材的重要性。

1989年，著名科学家钱学森教授在“中国数学会教育与科研座谈会”上提出：“电子计算机的出现对数学科学的发展产生了深刻的影响，大学理工科的数学课程是不是需要改革一番？”本书作者也一直在关注“概率论与数理统计”课程的教学改革。

本书较为系统地介绍了概率论与数理统计的基本概念、理论和方法，并将作者多年来的教学实践经验、教学研究的心得和体会融入教材中。本书把数学软件(如MATLAB)、统计软件(如R软件)与教材内容紧密结合，将第1章—第8章中的一些计算、画图的相关程序，写在了附录B中；将第9章(方差分析)、第10章(回归分析)中的一些计算、画图的程序，直接写在了正文中。

把数学实验与数学建模的思想方法融入教学中，这是当前数学类课程教学改革的一个重要方向。本书借助数学实验，把一些比较抽象的内容(如泊松定理、伯努利大数定律、独立同分布中心极限定理等)通过可视化形式展现出来，便于读者理解。把数学建模的思想方法融入教材中，有利于培养学生的应用能力、创新意识等。书后附录有“数学建模及大学生数学建模竞赛简介”“概率论与数理统计实验简介”等。

本书在叙述中，注重可读性，力争图文并茂。全书共有图108幅，相信会对读者理解相关内容有所帮助。全书共精选例题261个，其中很多例题贴近日常生活、反映科技进步和社会发展，具有现代气息。习题按节设立，这样可以使习题具有针对性，全书共有习题403道，并在书后附有“习题参考答案”。

本书的初稿完成后，李春华副教授审阅了前5章，许家清高级统计师审阅了后5章；受同济大学出版社的委托，作为主审的荆广珠教授审阅了本书初稿。以上各位专家对本书的初稿提出了许多宝贵的意见和建议，这对提高本书的质量起到了重要的作用，作者在此一并致谢。

虽然作者努力使本书成为一本既有新意又便于教学的教材，但由于水平所限，书中难免还有一些疏漏甚至是错误，恳请专家和读者批评指正。

韩 明

2014年3月

目 录

前言

第 1 版前言

第 1 章 随机事件及其概率	1
1.1 随机试验、随机事件	1
1.1.1 随机现象与统计规律性	1
1.1.2 随机试验与样本空间	2
1.1.3 随机事件、事件间的关系与运算	3
习题 1.1	5
1.2 概率的直观意义及其计算	6
1.2.1 频率与概率的统计定义	6
1.2.2 古典概型	8
1.2.3 几何概率	10
习题 1.2	12
1.3 概率的公理化定义和概率的性质	13
1.3.1 概率的公理化定义	14
1.3.2 概率的性质	14
习题 1.3	17
1.4 条件概率	18
1.4.1 条件概率与乘法公式	18
1.4.2 全概率公式与贝叶斯公式	22
习题 1.4	24
1.5 独立性	25
1.5.1 两个事件的独立性	25
1.5.2 多个事件的独立性	26
1.5.3 试验的独立性与伯努利概型	28
习题 1.5	29
本章附录 “概率论”发展简史	30
第 2 章 随机变量及其分布	32
2.1 随机变量与离散型随机变量	32
2.1.1 随机变量的概念	32
2.1.2 离散型随机变量及其分布律	33
习题 2.1	34

2.2 常见的离散型随机变量·····	35
2.2.1 两点分布·····	35
2.2.2 二项分布·····	35
2.2.3 泊松分布·····	37
2.2.4 超几何分布·····	40
2.2.5 几何分布·····	42
2.2.6 负二项分布·····	43
习题 2.2 ·····	44
2.3 随机变量的分布函数·····	45
2.3.1 分布函数的定义·····	45
2.3.2 分布函数的性质·····	46
习题 2.3 ·····	48
2.4 连续型随机变量及其密度函数·····	49
2.4.1 连续型随机变量·····	49
2.4.2 密度函数的性质·····	49
习题 2.4 ·····	53
2.5 常见的连续型随机变量·····	55
2.5.1 均匀分布·····	55
2.5.2 指数分布·····	57
2.5.3 正态分布·····	58
2.5.4 伽玛分布·····	62
2.5.5 贝塔分布·····	63
习题 2.5 ·····	64
2.6 随机变量函数的分布·····	65
2.6.1 离散型随机变量函数的分布·····	65
2.6.2 连续型随机变量函数的分布·····	65
习题 2.6 ·····	70
第3章 多维随机变量及其分布 ·····	72
3.1 二维随机变量及其分布·····	72
3.1.1 二维随机变量的定义、分布函数 ·····	72
3.1.2 二维离散型随机变量·····	74
3.1.3 二维连续型随机变量·····	75
习题 3.1 ·····	77
3.2 边缘分布·····	78
3.2.1 边缘分布律·····	79
3.2.2 边缘密度函数·····	81
习题 3.2 ·····	84
3.3 随机变量的独立性·····	85

习题 3.3	88
3.4 条件分布	89
3.4.1 离散型随机变量的条件分布	89
3.4.2 连续型随机变量的条件分布	91
习题 3.4	92
3.5 随机变量函数的分布	94
3.5.1 和的分布	94
3.5.2 最大值和最小值的分布	97
习题 3.5	99
 第 4 章 随机变量的数字特征	101
4.1 数学期望	101
4.1.1 数学期望的定义	102
4.1.2 随机变量函数的数学期望	104
4.1.3 数学期望的性质	107
4.1.4 条件数学期望	108
习题 4.1	110
4.2 方差	111
4.2.1 方差的定义	112
4.2.2 方差的性质	114
4.2.3 常见分布的方差	114
4.2.4 数学期望、方差不存在的例子	119
4.2.5 条件方差	119
习题 4.2	120
4.3 协方差、相关系数与矩	121
4.3.1 协方差与相关系数	121
4.3.2 独立性与不相关性	125
4.3.3 矩、协方差矩阵	126
习题 4.3	127
4.4 变异系数、分位数	128
4.4.1 变异系数	128
4.4.2 分位数	129
4.4.3 中位数	130
习题 4.4	131
 第 5 章 特征函数与极限定理	132
5.1 随机变量序列的两种收敛性	132
5.1.1 依概率收敛	132
5.1.2 按分布收敛、弱收敛	132

习题 5.1	133
5.2 特征函数	133
5.2.1 特征函数的定义	133
5.2.2 特征函数的性质	135
5.2.3 反演公式和唯一性定理	137
习题 5.2	139
5.3 大数定律	140
5.3.1 切比雪夫不等式	140
5.3.2 几个大数定律	141
习题 5.3	145
5.4 中心极限定理	146
5.4.1 独立同分布中心极限定理	147
5.4.2 棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理	149
习题 5.4	152
第 6 章 数理统计的基本概念	153
6.1 几个基本概念	153
6.1.1 总体与样本	153
6.1.2 经验分布函数	155
6.1.3 样本数据的频数频率分布表和直方图	156
6.1.4 样本数据的分位数与中位数	158
6.1.5 样本数据的五数概括与箱线图	158
6.1.6 统计量与样本矩	160
6.1.7 样本均值的抽样分布	162
习题 6.1	164
6.2 三个重要抽样分布与抽样定理	165
6.2.1 三个重要抽样分布	165
6.2.2 正态总体下的抽样定理	171
习题 6.2	174
6.3 充分统计量	175
6.3.1 充分统计量的概念	175
6.3.2 因子分解定理	177
习题 6.3	178
本章附录 “数理统计”发展简史	179
第 7 章 参数估计	182
7.1 点估计	182
7.1.1 矩估计法	182
7.1.2 极大似然估计法	184

习题 7.1	188
7.2 估计量的评选标准	190
7.2.1 无偏性	190
7.2.2 有效性与相合性	191
7.2.3 均方误差	193
7.2.4 一致最小方差无偏估计	194
7.2.5 充分性原则与充分估计量	194
习题 7.2	195
7.3 区间估计	196
7.3.1 区间估计的概念	196
7.3.2 枢轴量法	199
7.3.3 单个正态总体均值与方差的置信区间	200
7.3.4 两个正态总体均值之差与方差之比的置信区间	202
7.3.5 单侧置信限	204
习题 7.3	207
7.4 贝叶斯估计	208
7.4.1 统计推断的基础	208
7.4.2 贝叶斯公式的密度函数形式	209
7.4.3 贝叶斯估计	214
7.4.4 贝叶斯估计的误差	215
习题 7.4	216
第 8 章 假设检验	217
8.1 假设检验的基本思想与步骤	217
8.1.1 假设检验的基本思想	217
8.1.2 两类错误与假设检验的步骤	220
8.1.3 检验的 p 值	222
8.1.4 如何确定原假设 H_0 和备择假设 H_1	224
习题 8.1	225
8.2 单个正态总体均值与方差的检验	226
8.2.1 单个总体均值的检验	226
8.2.2 置信区间、单侧置信限与假设检验的关系	228
8.2.3 单个总体方差的检验	229
习题 8.2	231
8.3 两个正态总体均值与方差的检验	233
8.3.1 两个正态总体均值之差的检验	233
8.3.2 两个正态总体方差之比的检验	234
习题 8.3	236
8.4 分布拟合检验	237

习题 8.4	240
第 9 章 方差分析	242
9.1 单因素方差分析	242
9.1.1 数学模型	243
9.1.2 方差分析	243
9.1.3 用 R 软件作单因素方差分析	245
9.1.4 用 MATLAB 作单因素方差分析	247
9.1.5 均值的多重比较	249
习题 9.1	252
9.2 双因素方差分析	253
9.2.1 不考虑交互作用	254
9.2.2 考虑交互作用	256
习题 9.2	261
第 10 章 回归分析	263
10.1 一元线性回归	263
10.1.1 一个例子	264
10.1.2 数学模型	264
10.1.3 回归参数的估计	265
10.1.4 回归方程的显著性检验	265
10.1.5 预测	273
习题 10.1	274
10.2 一元非线性回归	276
10.2.1 一元非线性回归问题	276
10.2.2 优化模型的选择	278
习题 10.2	281
10.3 多元线性回归	282
10.3.1 多元线性回归模型	282
10.3.2 回归参数的估计	283
10.3.3 回归方程的显著性检验	283
10.3.4 预测	285
10.3.5 血压、年龄以及体质指数问题	286
习题 10.3	289
10.4 逐步回归	291
10.4.1 变量的选择	291
10.4.2 逐步回归的计算	291
习题 10.4	296

附录 A 数学建模及大学生数学建模竞赛简介	299
附录 B 概率论与数理统计实验简介	305
附录 C 概率论与数理统计附表	312
附表 1 正态分布表	312
附表 2 泊松分布表	313
附表 3 t 分布表	315
附表 4 χ^2 分布表	317
附表 5 F 分布表	320
附表 6 相关系数临界值 r_α 表	328
习题参考答案	329
参考文献	342

第1章 随机事件及其概率

在考虑一个(未来)事件是否会发生的时候,人们常关心该事件发生的可能性的^{大小}.就像用尺子来测量物体的长度一样,我们用概率来测量一个未来事件发生的可能性的^{大小}.将概率作用于被测事件就得到该事件发生的可能性大小的测量值——该事件的概率.

1990年诺贝尔经济学奖的三位得主之一是马科维茨(Markowitz),他获奖的主要原因是提出了投资组合选择(portfolio selection)理论,他把投资组合的价格视为**随机变量**,用它的均值来衡量收益,用它的方差来度量风险(被称为“均值-方差分析理论”),该理论后来被誉为“华尔街的第一次革命”(注:随机变量,均值,方差是本课程后面将要介绍的内容).

《统计与真理——怎样运用偶然性》(C. R. Rao,美国宾夕法尼亚州立大学教授,2002年美国^{总统}科学奖获得者)的扉页上写有这样一段话:

在终极的分析中,一切知识都是历史;
在抽象的意义下,一切科学都是数学;
在理性的基础上,所有的判断都是统计学.

1.1 随机试验、随机事件

1.1.1 随机现象与统计规律性

在自然界与人类社会活动中,人们观察到的现象是多种多样的,但归结起来它们大体上可以分为两类,一类是确定性现象,另一类是随机现象.例如,向上抛一个石子必然下落;同性电荷必然相互排斥.这类在一定条件下必然发生的现象,称为**确定性现象**(或**必然现象**).

在相同条件下抛一枚硬币,其结果可能是正面朝上,也可能是反面朝上,在抛掷之前无法预知抛掷的结果,结果呈现出^{不确定性};但多次重复抛同一枚硬币,得到正面朝上与反面朝上两个结果大致各占一半,结果呈现出规律性.在大量重复试验中,其结果所呈现出的规律性,称为**统计规律性**.

人们还逐渐发现另一类现象,它是事前不可预言的,即在相同的条件下重复进行试验,每次结果未必相同;或是知道它过去的状况,在相同的条件下未来的发展却不能完全肯定.这类在个别试验中其结果呈现出^{不确定性},在大量重复试验中其结果呈现出规律性的现象,称为**随机现象**(或**偶然现象**).值得注意的是,确定性现象,在一定条件下其结果只有一个,而随机现象其结果不止一个.

开始时,人们把这种现象称为“偶然现象”是指它是“不正常的”“出乎意料的”或者是“原因不明的”.是不是随机现象都没有规律可循呢?事实上并非如此.人们通过长期反复观察和实践,逐渐发现所谓不可预言,只是对一次或少数几次观察或实践而言,当在相同条件下大量重复观察时,随机现象都呈现出某种规律.

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门数学学科. 其理论与方法的应用非常广泛, 几乎遍及所有科学技术领域、工农业生产、国民经济以及我们的日常生活.

1.1.2 随机试验与样本空间

我们遇到过各种试验, 包括各种科学试验. 在这里我们把试验作广义理解, 对某一事物的某一特征的观察, 也认为是一种试验. 为了研究随机现象的统计规律性, 需要进行各种试验.

如果一个试验同时满足下列条件:

- (1) 可以在相同的条件下重复地进行(简称“可重复性”);
- (2) 每次试验的可能结果不止一个, 并且能事先明确试验的所有可能结果(简称“不唯一性”);
- (3) 进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现(简称“不确定性”).

称这样的试验为随机试验, 有时把随机试验简称为试验(experiment), 用 E 来表示. 我们是通过随机试验来研究随机现象的.

值得注意的是, 随机试验要求试验在相同的条件下可以重复. 当然也有很多随机现象是不能重复的, 例如某场足球赛的输赢是不能重复的, 某些经济现象(如经济增长率等)也是不能重复的. 概率论与数理统计主要研究能大量重复的随机现象, 但也十分注意研究不能重复的随机现象.

把随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间, 用 Ω 来表示. 样本空间 Ω 中的元素, 即试验 E 的每个结果, 称为样本点, 用 ω 来表示.

例 1.1.1 以下是七个随机试验, 请写出它们的样本空间.

E_1 : 抛一枚硬币, 用 H (head)表示正面朝上, 用 T (tail)表示反面朝上, 观察正面和反面出现的情况.

E_2 : 将一枚硬币抛掷三次, 观察正面 H 、反面 T 出现的情况.

E_3 : 将一枚硬币抛掷三次, 观察正面出现的次数.

E_4 : 抛一颗骰子, 观察出现的点数.

E_5 : 记录某城市 114 电话号码查询台一昼夜接到的呼叫次数.

E_6 : 在一批灯泡中任意抽取一只, 测试它的寿命.

E_7 : 向平面区域 $D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$ 内随机投掷一点, 观察落点的坐标(假设该落点一定落在 D 内).

解 以上七个随机试验 $E_1, E_2, \dots, E_7$ 的样本空间分别是:

$$\Omega_1 = \{H, T\};$$

$$\Omega_2 = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\};$$

$$\Omega_3 = \{0, 1, 2, 3\};$$

$$\Omega_4 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\};$$

$$\Omega_5 = \{0, 1, 2, \dots\};$$

$$\Omega_6 = \{t: t \geq 0\};$$

$$\Omega_7 = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

只包含有限个样本点的样本空间,称为**有限样本空间**.例如,在例 1.1.1 中, $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ 为有限样本空间. 包含可列个样本点的样本空间,称为**可列样本空间**.例如,在例 1.1.1 中, Ω_5 为可列样本空间. 有限样本空间和可列样本空间统称为**离散样本空间**. 全部样本点可以充满某个区间(或区域)的样本空间,称为**连续样本空间**.例如,在例 1.1.1 中, Ω_6, Ω_7 为连续样本空间.

应该注意的是,样本空间中的元素是由试验的目的所确定的.例如,在例 1.1.1 中, E_2 和 E_3 同是将一枚硬币抛掷三次,由于试验的目的不同,样本空间中的元素也不同.

1.1.3 随机事件、事件间的关系与运算

在进行随机试验时,人们常常关心满足某种条件的那些样本点组成的集合,即“随机试验的某些样本点组成的集合”(亦即样本空间的子集).例如,若规定某种灯泡的寿命小于 1 000 h 为次品,则我们在例 1.1.1 的 E_6 中关心是否有 $t \geq 1\,000$ h, 满足这个条件的样本点组成样本空间 Ω_6 的一个子集 $\{t: t \geq 1\,000\}$.

称试验 E 的样本空间 Ω 的子集为 E 的**随机事件**(或“随机试验的某些样本点组成的集合”),简称**事件**(event). 在一次试验中,当且仅当这一子集中的一个样本点出现时,称这一事件发生. 随机事件一般用大写字母 A, B, C 等来表示.

例 1.1.2 在例 1.1.1 中,看几个事件的例子. 对于 E_2 , 事件“第一次出现 H ”,即 $A_1 = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$; 事件“三次出现同一面”,即 $A_2 = \{HHH, TTT\}$. 对于 E_4 , 事件“出现偶数点”,即 $A_3 = \{2, 4, 6\}$.

特别,由一个样本点组成的单点集,称为**基本事件**.例如,在例 1.1.1 的 E_1 中,有两个基本事件 $\{H\}$ 和 $\{T\}$; 在 E_3 中,有 4 个基本事件 $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}$.

样本空间 Ω 包含所有样本点,它是自身的子集,在每次试验中它总是发生的,称为**必然事件**.

空集 $\emptyset$ 不包含任何样本点,它也作为样本空间的子集,它在每次试验中都不发生,称为**不可能事件**.

事件是一个集合,所以事件间的关系与运算自然按照集合论中集合间的关系与运算来处理. 下面这些关系与运算的提法,是根据集合间的关系与运算以及“事件发生”的含义给出的.

设试验 E 的样本空间为 Ω , 而 $A, B, A_i (i = 1, 2, \dots)$ 是 Ω 的子集.

(1) 若 $A \subset B$, 则称事件 B **包含** 事件 A , 这指的是事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

若 $A \subset B$ 且 $A \supset B$, 则称事件 A 与事件 B **相等**, 记为 $A = B$.

(2) 事件 $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**和事件**(或事件 A 与事件 B 的**并**). 当且仅当 A, B 中至少有一个事件发生时,事件 $A \cup B$ 发生.

类似地,称 $\bigcup_{i=1}^n A_i$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的**和事件**, 称 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \dots$ 的**和事件**.

(3) 事件 $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的**积事件**(或事件 A 与事件 B 的**交**). 当且仅当 A, B 同时发生时,事件 $A \cap B$ 发生. $A \cap B$ 简记为 AB .

类似地,称 $\bigcap_{i=1}^n A_i$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 的**积事件**, 称 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \dots$ 的**积事件**.

$A_2, \dots$ 的积事件.

(4) 事件 $A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ 称为事件 A 与事件 B 的差事件. 当且仅当 A 发生, B 不发生时, 事件 $A - B$ 发生.

(5) 若 $A \cup B = \Omega$ 且 $A \cap B = \emptyset$, 则称事件 A 与事件 B 互为对立事件(或逆事件). 记事件 A 的对立事件为 $\bar{A}$, $\bar{A} = \Omega - A$.

(6) 若 $A \cap B = \emptyset$, 则称事件 A 与事件 B 互不相容(或互斥). 这指的是事件 A 与事件 B 不能同时发生. 显然, 同一个试验中各个基本事件是两两互不相容的.

我们可以用维恩(Venn)图来表示上述事件间的关系与运算, 如图 1-1—图 1-6 所示.

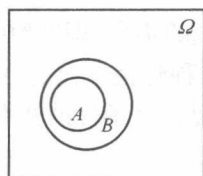


图 1-1 $A \subset B$

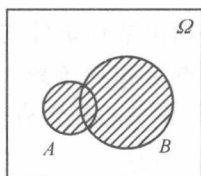


图 1-2 $A \cup B$

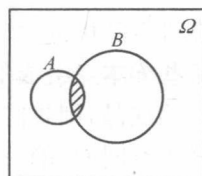


图 1-3 $A \cap B$

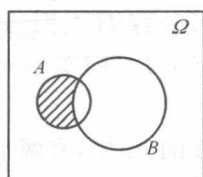


图 1-4 $A - B$

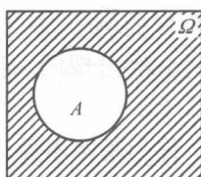


图 1-5 $\bar{A}$

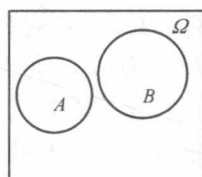


图 1-6 A 与 B 互不相容

在进行事件的运算时, 经常要用到下述定律.

设 $A, B, C, A_i (i = 1, 2, \dots)$ 为事件, 则有

交换律 $A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A.$

结合律 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$

分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$

德·摩根(De Morgan)律

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}.$$

可以把以上两个事件的情形推广到有限个事件、可列个事件的情形, 即

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i;$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i.$$

在集合论、概率论中符号与意义的对照, 见表 1-1.

表 1-1

在集合论、概率论中符号与意义的对照

符号	集合论	概率论
Ω	全集	样本空间, 必然事件
$\emptyset$	空集	不可能事件
$\omega(\in \Omega)$	元素	样本点
$\{\omega\}$	单点集	基本事件
$A(\subset \Omega)$	子集 A	事件 A
$A \subset B$	集合 B 包含集合 A	事件 B 包含事件 A
$A = B$	集合 A 与 B 相等	事件 A 与 B 相等
$A \cup B$	集合 A 与 B 的并集	事件 A 与 B 的和事件
$A \cap B$	集合 A 与 B 的交集	事件 A 与 B 的积事件
$\bar{A}$	集合 A 的余集	事件 A 的对立事件
$A - B$	集合 A 与 B 的差集	事件 A 与 B 的差事件
$A \cap B = \emptyset$	集合 A 与 B 没有公共元素	事件 A 与 B 互不相容

例 1.1.3 考查学生在一次数学考试中的成绩(括号中的区间表示成绩所处的范围), 记 $A = \text{“优秀”}([90, 100])$, $B = \text{“良好”}([80, 90))$, $C = \text{“中等”}([70, 80))$, $D = \text{“及格”}([60, 70))$, $E = \text{“未通过”}([0, 60))$, $F = \text{“通过”}([60, 100])$, 则 A, B, C, D, E 为两两互不相容事件; E 与 F 互为对立事件, 即 $\bar{E} = F$; $F = A \cup B \cup C \cup D$.

例 1.1.4 对于例 1.1.2 中的 $A_1 = \{HHH, HHT, HTH, HTT\}$, $A_2 = \{HHH, TTT\}$, 求 $A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2, A_1 - A_2, \overline{A_1 \cup A_2}$.

解 根据例 1.1.1 知样本空间为 $\Omega_2 = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$, 则 $A_1 \cup A_2 = \{HHH, HHT, HTH, HTT, TTT\}$, $A_1 \cap A_2 = \{HHH\}$, $A_1 - A_2 = \{HHT, HTH, HTT\}$, $\overline{A_1 \cup A_2} = \Omega_2 - A_1 \cup A_2 = \{THT, TTH, THH\}$.

习 题 1.1

1. 写出下列随机试验的样本空间.
- (1) 抛一枚硬币, 用 H 表示正面朝上, 用 T 表示反面朝上, 观察正面和反面出现的情况;

(2) 将一枚硬币抛掷两次, 观察正面 H 、反面 T 出现的情况;

(3) 将一枚硬币抛掷两次, 观察正面出现的次数;

(4) 在单位圆内任意取一点, 记录它的(直角)坐标;

(5) 掷两颗骰子, 观察其点数.
2. 袋中装有编号为 1, 2, 3, 4, 5 的五个相同的球. 若从中任取三个球, 请写出这个随机试验的样本空间, 并计算基本事件总数.
3. 设 A, B, C 表示三个随机事件, 用 A, B, C 的运算关系表示下列各事件:
- (1) A, B, C 都发生;

(2) A, B, C 都不发生;