

中国水利教育协会

高等学校水利类专业教学指导委员会

共同组织



全国水利行业“十三五”规划教材（普通高等教育）

有限单元法的 程序设计 (第二版)

张健飞 秦忠国 姜弘道 编著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

中国水利教育协会
高等学校水利类专业教学指导委员会

共同组织



全国水利行业“十三五”规划教材（普通高等教育）

有限单元法的 程序设计

（第二版）

张健飞 秦忠国 姜弘道 编著



中国水利水电出版社
www.waterpub.com.cn

·北京·

内 容 提 要

本书是为学习、掌握有限单元法的程序设计方法而编著的。全书介绍了用 Fortran90 编写的弹性力学平面问题有限元法的直接解程序、迭代解程序,空间问题有限元法的直接解程序,以及动力问题的直接积分法程序和子空间迭代法程序,并用 C++ 介绍了一个面向对象有限元程序。每个程序在给出程序流程图后,均逐框介绍了全部子程序、给出了源程序,并用简例说明其应用。

书中将力学公式、数学算法与程序设计三者紧密结合,努力做到深入浅出、突出重点、分散难点,既便于教,更便于学,还特别适合自学。

本书可作为学习有限元程序设计方法的教材或自学用书,书中的程序也可用来解决有关实际问题,或作为编制更复杂程序的基础。本书可供相关专业的本科生、研究生和工程技术人员学习使用。

图书在版编目 (C I P) 数据

有限单元法的程序设计 / 张健飞, 秦忠国, 姜弘道
编著. — 2版. — 北京: 中国水利水电出版社,
2017. 11

全国水利行业“十三五”规划教材. 普通高等教育
ISBN 978-7-5170-6108-3

I. ①有… II. ①张… ②秦… ③姜… III. ①有限元
法—程序设计—高等学校—教材 IV. ①0241.82-39

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第298906号

书 名	全国水利行业“十三五”规划教材 (普通高等教育) 有限单元法的程序设计 (第二版) YOUXIAN DANYUAN FA DE CHENGXU SHEJI
作 者	张健飞 秦忠国 姜弘道 编著
出版发行	中国水利水电出版社 (北京市海淀区玉渊潭南路1号D座 100038) 网址: www.waterpub.com.cn E-mail: sales@waterpub.com.cn 电话: (010) 68367658 (营销中心)
经 售	北京科水图书销售中心 (零售) 电话: (010) 88383994、63202643、68545874 全国各地新华书店和相关出版物销售网点
排 版	中国水利水电出版社微机排版中心
印 刷	三河市鑫金马印装有限公司
规 格	184mm×260mm 16开本 15.75印张 373千字
版 次	1989年10月第1版第1次印刷 2017年11月第2版 2017年11月第1次印刷
印 数	0001—3000册
定 价	36.00元

凡购买我社图书,如有缺页、倒页、脱页的,本社营销中心负责调换
版权所有·侵权必究

第二版前言

本书第一版是由姜弘道、陈和群编著，于1989年由水利电力出版社出版发行。第一版的前言曾指出，“有限单元法是一种适宜于用计算机实施具体计算的方法，为了能真正掌握有限单元法，除了懂得其理论，还必须对如何根据有限单元法的理论编制相应的计算程序有一定的了解与掌握。本书就是为了弥补懂得有限单元法理论与在实际应用中编制程序能力之间的差距而编写的。”自第一版出版以来，有限单元法的学习与应用更加广泛，各种教材、专著以及商用软件的使用介绍数不胜数，但专为提高有限单元法的编程能力的著作仍鲜有出版，作者们深感这仍是学习与应用有限单元法的一个重要环节，决定根据这些年来来的教学实践经验，重新编著了本书。

与第一版相比，本书作了较多的修改、补充。在第一章增加了程序设计概述一节，原来用 Fortran77 编写的程序一律改为用 Fortran90、空间问题有限元的直接解程序改用 8 结点六面体等参数单元、动力问题有限元改为介绍子空间迭代法与时程积分法，并增加了平面问题有限元的迭代解程序设计以及面向对象有限元程序设计两章。

全书共分 6 章，并有两个附录。第一章绪论，在简述有限单元法程序设计的一般原则与要求之后，对求解弹性力学静力问题的有限元位移法的分析步骤与公式作了归纳性的介绍，并说明了程序设计的若干概念。第二章平面问题有限元的直接解程序设计，详细介绍了 3 结点三角形单元直接解程序，重点分析了整体劲度矩阵的一维变带宽存储与线性代数方程组的三角分解解法。第三章平面问题有限元的迭代解程序设计，详细介绍了 4 结点四边形等参数单元迭代解程序，重点分析了稀疏矩阵的压缩稀疏行存储法与线性代数方程组的预条件共轭梯度解法。第四章空间问题有限元的直接解程序设计，详细介绍了 8 结点六面体等参数单元直接解程序，重点分析了空间等参数单元整体劲度矩阵与整体结点荷载列阵的形成。第五章动力问题的有限元程序设计，在介绍了动力问题有限元的基本理论与计算公式后，分两节介绍了 Newmark 法程序设计与子空间迭代法程序设计，分别用来计算结构的动力响应与自振特

性。第六章面向对象有限元程序设计，首先介绍了面向对象程序设计的若干基本概念，接着详细介绍一个完整的面向对象有限元程序，主要包括模型数据类、单元类、方程类、结果状态类、基本数据操作类以及控制函数 Main 等。每个程序均有简例说明其应用。附录一为有限元网格划分工具 FemMasher 使用说明，它是河海大学工程力学系计算力学课程用的资料，该附录还介绍了 VTK (Visualization ToolKit) 文件的格式，可通过可视化软件 ParaView 查看图形结果。附录二为本书全部程序的电子文档目录，该文档可由出版社的网站下载。

本书要求读者已学习弹性力学问题的有限单元法，并具有 Fortran90 与 C++ 的知识。本书可供学习与应用有限单元法的工程技术人员与大学生、研究生使用，若用作教材，可以根据教学时数的多少，选用部分内容或全书教学。本书由张健飞修订、编著第二~第五章，秦忠国编著第六章，姜弘道修订第一章并负责全书定稿。陈国荣教授和钱向东教授分别为本书第四、第五章的编写提供了帮助，在此表示衷心的感谢。

作者

2017 年 8 月

第一版前言

有限单元法, 作为求解偏微分方程边值问题的一种有效的数值方法, 已经在各个工程领域得到广泛的应用, 并取得了很好的效果。与此相适应, 许多高等学校已为工科大学生、研究生开设了介绍有限单元法的必修课或选修课, 并先后出版了若干种教材, 既满足了教学上的需要, 又为推广有限单元法发挥了很大的作用。然而, 有限单元法是一种适宜于用计算机实施具体计算的方法, 为了能真正掌握有限单元法, 除了懂得其理论, 还必须对如何根据有限元的理论编制相应的计算程序有一定的了解与掌握。本书就是为了弥补懂得有限单元法理论与在实际应用中编制程序能力之间的差距而编写的。

全书共分四章。第一章在简述有限单元法程序设计的一般原则与要求之后, 对求解弹性力学问题的有限元位移法的分析步骤与一般公式作了归纳性的介绍。第二章详细介绍了弹性力学平面问题的 3 结点三角形单元直接解程序。第三章详细介绍了弹性力学空间问题的 20 结点等参数单元分块直接解程序。第四章介绍了平面动力问题中计算结构动力特性的直接滤波法程序以及计算结构动力反应的振型叠加法程序。此外, 还有一个附录介绍了 20 结点等参数单元程序中采用的应力成果的计算方法。本书若用作教材, 可以根据教学时数的多少, 选用第一、第二章, 或第一~第三章, 或第一、第二、第四章, 或全书内容。

本书要求读者具备弹性力学问题的有限单元法与 Fortran77 语言方面的知识。为了便于教学以及工程技术人员自学, 在编写本书时力求做到深入浅出、难点分散、重点突出, 而且不在细节上过多追求程序设计的技巧。例如, 在第二章中, 突出了整体劲度矩阵的一维变带宽存储与线性代数方程组的三角分解法; 在第三章中, 突出了 20 结点等参数单元的单元劲度矩阵的形成、面力等效结点荷载的形成以及整体劲度矩阵的分块。

本书承主审人大连理工大学赵迺义副教授、陈美珍副教授提出十分宝贵的意见, 特此表示衷心的感谢。河海大学计算中心吴旭光副教授也为本书提

供了有关材料，谨致谢意。

由于作者水平所限，书中难免有不少缺点乃至错误，敬请读者批评指正。

书前附一第

淮海大学 姜弘道 陈和群

1989年1月于南京

目 录

第二版前言

第一版前言

第一章 绪论	1
第一节 引言	1
第二节 静力问题的有限元法步骤	4
第三节 程序设计概述	10
第二章 平面问题有限元的直接解程序设计	13
第一节 3 结点三角形单元的计算公式	13
第二节 输入原始数据	17
第三节 形成整体劲度矩阵	19
第四节 形成整体结点荷载列阵 引入非零已知结点位移	27
第五节 直接法解线性代数方程组	29
第六节 计算单元应力与支座反力	36
第七节 源程序及其使用说明	38
第三章 平面问题有限元的迭代解程序设计	59
第一节 4 结点四边形等参数单元的计算公式	59
第二节 程序流程图及输入原始数据	65
第三节 稀疏矩阵的存储	71
第四节 形成整体劲度矩阵	78
第五节 形成整体结点荷载列阵	85
第六节 预条件共轭梯度法解代数方程组	91
第七节 计算应力分量与主应力、应力主向	99
第八节 源程序使用说明	103
第四章 空间问题的有限元程序设计	108
第一节 8 结点六面体等参数单元的计算公式	108
第二节 程序流程图及输入原始数据	116
第三节 形成整体劲度矩阵	122

第四节	形成整体结点荷载列阵	129
第五节	直接法解线性代数方程组	135
第六节	计算应力分量与主应力、应力主向	136
第七节	源程序使用说明	143
第五章	动力问题的有限元程序设计	148
第一节	基本理论和计算方法	148
第二节	Newmark 法程序设计	154
第三节	子空间迭代法程序设计	168
第四节	算例	183
第六章	面向对象有限元程序设计	188
第一节	面向对象程序设计概述	188
第二节	模型数据类 CData	193
第三节	单元类 CElement 和方程类 CEquation	205
第四节	结果状态类 CState 和基本数据操作类	220
第五节	控制函数 main 和程序组成	229
第六节	计算实例	234
附录一	有限元网格划分工具 FemMesher 使用说明	236
附录二	电子文档内的程序目录	243

第一章 绪 论

第一节 引 言

许多工程问题的分析,诸如固体力学中位移场与应力场的分析、流体力学中渗流场的分析、传热学中温度场的分析等,都可以归结为在边界条件(或与初始条件)下求解该问题的支配方程(通常是偏微分方程)。由于工程实际问题的边界条件往往比较复杂,要想获得满足边界条件的支配方程的精确解是很困难的;又由于工程师所需要的是每个问题的解的数值大小,而不只是其解析表达式,因此,在工程科学里,各种有效的数值解法受到普遍的重视。有限单元法(又称有限元法)就是从20世纪50年代以来随着电子计算机应用日益广泛而迅速发展起来的一种极其有效的偏微分方程的通用数值解法。在有限单元法中,通过剖分将连续体离散化为由许多单元在结点处连结而成的有限个单元的集合体,又通过插值将偏微分方程的解在每个单元内的分布用该单元结点上的值来表示,再应用变分原理(或应用加权余量法)建立用来确定各结点处解的数值大小的支配方程(一般是线性代数方程组)。它既有比较坚实的理论基础,又能统一各类工程问题的求解方法,便于应用电子计算机进行大规模数值运算,因此,有限单元法已经成为许多工程领域的工程技术人员所乐于采用的计算分析方法。

有限单元法最初是在固体力学中发展起来的。与固体力学中的其他数值解法相比,它具有下面一些显著的优点:①便于处理复杂的边界条件;②便于解决不均质材料或各向异性材料的问题;③便于分析由杆件、板、壳、实体组成的组合结构以及需要先确定渗流场、温度场再确定位移场、应力场的混合问题;④能够处理材料非线性或几何非线性问题;⑤能够解决结构动力分析问题;⑥便于编制灵活、通用的计算程序,能够被广大工程技术人员很方便地用来解决他们所面临的各种各样的工程实际问题。

有限单元法是以电子计算机为计算工具的数值解法,它的上述优点只有在使用电子计算机的条件下才能显示出来,它的应用与发展都离不开电子计算机的硬件与软件。跟任何用电子计算机解题的过程一样,用有限单元法解题也包括问题分析、算法设计以及在计算机上实现算法3个阶段。

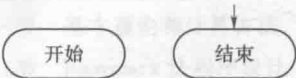
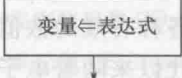
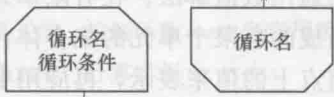
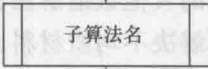
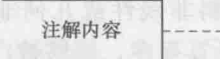
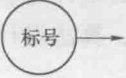
有限单元法的问题分析已有许多专著进行了详细的讨论,要求本书的读者已经具备这方面的必要知识,所以将在下一节只对解弹性力学问题的有限元位移法予以概括说明。它的主要内容是建立离散化的计算模型;规定计算模型的已知量和未知量;建立由已知量确定未知量的有关公式。

有限单元法的算法设计就是建立起能提供计算机用以实现上述有关公式的算法。以后将会发现,对有限单元法的算法设计影响最大的是线性代数方程组的解法以及该方程组的系数矩阵(即结构整体劲度矩阵)在计算机内的存储方式。为了清晰起见,本书在介绍第

一个程序时采用流程图（又称框图）来表示算法。所谓流程图是用各种形状的框及箭头连结起来的表示计算过程的图。本书所采用的框的形状及其含义见表 1-1，框内将写上该框执行的具体内容。

表 1-1

框图符号及含义表

符 号	符号的名称	符 号 的 含 义
	起止框	表示算法的开始或结束
	输入/输出框	输入给予变量的值或输出常量及变量的值
	处理框	表示某一种处理或运算
	循环上下界	表示循环的开始与结束
	判断框	根据框内关系或条件的结果确定下面执行哪一框
	调用过程框	调入并执行某个子算法
	注解框	给出必要的说明及注解
	流程线	指示执行算法的次序
	引入连接符	指出流程图中位于另外一处的框流入的位置
	引出连接符	指出流程图中位于另外一处的待执行的框

为了在计算机上实现有限单元法的计算，还必须把在算法设计中用流程图表示的算法步骤，转换为用某一种计算机程序设计语言表示的步骤，也就是通常所说的“编制程序”。本书所用的程序设计语言除第六章是 C++ 外，其余各章均是 Fortran90，并假定读者已具备这方面的基础。

任何一个编好的程序必须经过调试才能正式投入使用。所谓调试程序,就是对大量的考题试运行程序,以检验程序所有组成部分、所有功能的正确性。若运行结果不对,则必须找出错误原因予以排除。

以上所述用计算机解题的过程可以用如图 1-1 所示的流程图来表示。

事实表明,无论是学习有限单元法的大学生或研究生,还是用有限单元法分析工程实际问题的工程师,他们在掌握有限单元法的理论方面并没有太大的困难,但是在进行有限单元法的算法设计并在计算机上实现这个算法方面却会遇到很大的困难。本书的目的就是试图弥补懂得有限单元法的理论与在实际应用中编制程序的能力之间的差距,指出如何实现从理论到程序的重要转变。为此,本书针对弹性力学的静力问题,在第二章中介绍了平面问题 3 结点三角形单元的线性代数方程组直接解法有限元程序,在第三章中介绍了平面问题 4 结点等参数单元的线性代数方程组迭代解法有限元程序,在第四章中介绍了空间问题 8 结点等参数单元的直接解法有限元程序,在第五章中针对弹性力学的动力问题,介绍了平面动力问题的直接积分法与子空间迭代法有限元程序,并在第六章中介绍了 C++ 语言的面向对象有限元程序。对于所介绍的程序,有关的理论与公式只是以归纳的形式扼要地予以介绍,重点放在弄清楚程序的整体结构和编制程序的思路,并通过对程序清单的详细解释,弄清楚每个子程序的功能与接口条件。编制上述程序的思路同样可以用在有限单元法的其他应用领域,而对于其他的单元类型,也只要将具体程序稍加改动即可。

下面来介绍进行有限单元法的程序设计时所应遵循的主要原则。

首先,程序必须是正确的。亦即程序必须经得起计算实践的考验,不仅对于通常遇到的情况要能得出正确的结果,而且只要在程序的适用范围内,对于很少遇到的特殊情况也要能得出正确的结果。这就要求程序设计者在调试程序时把一切可能遇到的情况都通过考题检验,让程序的各个部分、每个角落都在考题时运行过,不留下任何死角。

其次,程序应该是尽可能高效率的。用有限元程序解决实际问题,一般都要求解成千上万阶,甚至百万阶的线性代数方程组,对计算机的存储容量与运算速度均有较高的要求。这就迫使程序设计者在编制程序前必须详细地分析、研究问题,根据问题的特点与计算机的资源条件采用较好的计算方法,努力达到存储省、时间短、精度高三者完美的统一。

由于种种原因,一个有限元程序在使用过程中往往需要不断地修改与完善,例如要增加某种单元,修改某种材料模型,等等。因此,程序还应该便于修改、增删一些内容。为了达到这个要求,较好的办法是采用模块式的程序结构。所谓模块式结构的程序就是将一个规模较大的有限元程序,化整为零,划分为若干个模块,每个模块都具有一定的功能,执行一个方面的运算,具有很大的独立性和灵活性,但它又是根据前面模块做出的结果,

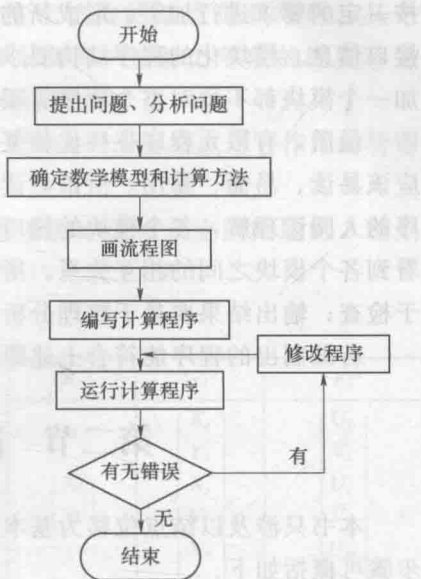


图 1-1 解题过程流程图

按一定的要求进行加工,形成新的结果供后面的模块使用。这些结果便是各个模块之间的接口信息。模块化的程序结构要求接口信息越简单越好,这样就能使得修改一个模块或增加一个模块都不致对整个程序有很大的影响。

最后,有限元程序往往比较复杂,但它是要提供给用户使用的,因此,有限元程序还应该易读、易懂、易用。所谓易读、易懂,主要是指每个模块的功能很清楚,便于使用程序的人阅读理解,各个模块的接口信息要设计得简单、明了,以便读程序的人可以清楚地看到各个模块之间的相互关系。所谓易用,则是指输入数据的意义明确并易于准备,以便于检查;输出结果要易于整理分析,最好能直接供工程上采用。

若编制出的程序能符合上述原则,那么可以说它的质量是好的。

第二节 静力问题的有限元法步骤

本书只涉及以结点位移为基本未知量的弹性力学问题的有限元位移法,其静力分析的步骤可概括如下。

一、离散化

就是用有限多个有限大小的单元在有限多个结点上互相连接而成的离散结构物代替原来的连续弹性体。在平面问题与空间问题中常用的单元分别如图 1-2 和图 1-3 所示。

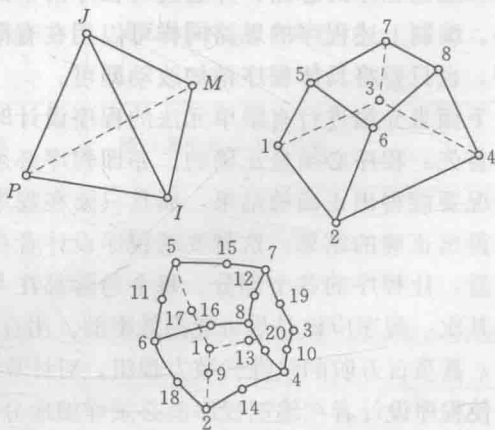
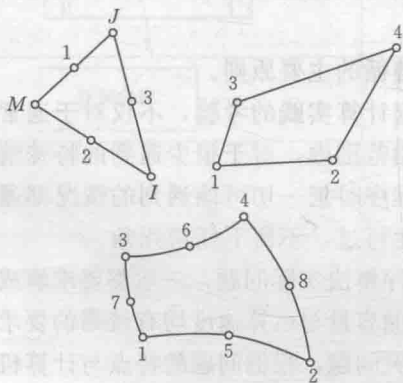
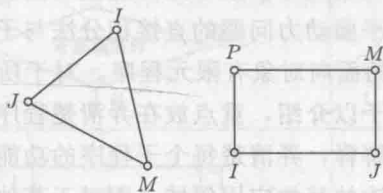


图 1-2 平面问题常用单元

图 1-3 空间问题常用单元

离散结构物的基本未知量是所有可动结点的结点位移值。以后用 $\{\delta_i\}$ 表示第 i 个结点的结点位移列阵,用 $\{\delta\}^e$ 表示单元的结点位移列阵,用 $\{\delta\}$ 表示整个结构的未知结点位移列阵。

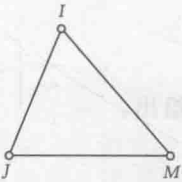
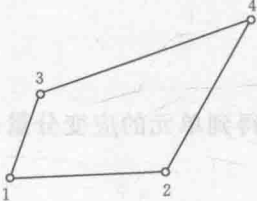
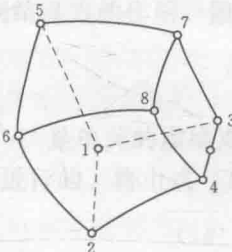
作用在离散结构物上的荷载是结点荷载。以后用 $\{R_i\}$ 表示第 i 个结点的结点荷载列

阵, 用 $\{r\}^e$ 表示单元的结点荷载列阵, 用 $\{R\}$ 表示整个结构的结点荷载列阵。其中 $\{r\}^e$ 是将单元所受的实际荷载 (集中力、分布体力及分布面力) 按静力等效的原则移置到结点而得到的, 而 $\{R\}$ 则是由所有单元的 $\{r\}^e$ 集合而得到的。

由于单元所受的荷载都已被移置到结点上, 所以每个单元只受有结点对它作用的所谓结点力, 单元的结点力列阵用 $\{F\}^e$ 来表示。

对于平面问题的 3 结点三角形单元、4 结点四边形等参数单元以及空间问题的 8 结点六面体等参数单元, 它们的 $\{\delta_i\}$ 、 $\{\delta\}^e$ 、 $\{R_i\}$ 、 $\{r\}^e$ 、 $\{F\}^e$ 见表 1-2。

表 1-2 各类单元结点参数表

单元类	$\{\delta_i\}$	$\{\delta\}^e$	$\{R_i\}$	$\{r\}^e$	$\{F\}^e$
	$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_m \\ v_m \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ X_j \\ Y_j \\ X_m \\ Y_m \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} U_i \\ V_i \\ U_j \\ V_j \\ U_m \\ V_m \end{Bmatrix}$
	$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \\ X_4 \\ Y_4 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \\ U_4 \\ V_4 \end{Bmatrix}$
	$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ w_2 \\ \vdots \\ u_8 \\ v_8 \\ w_8 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \\ \vdots \\ X_8 \\ Y_8 \\ Z_8 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \\ U_2 \\ V_2 \\ W_2 \\ \vdots \\ U_8 \\ V_8 \\ W_8 \end{Bmatrix}$

在离散结构物中, 通常是已知物体的形状和大小 (即已知各个结点的坐标值以及各个单元的结点组成)、物体的弹性常数 (即每个单元的 E 、 μ)、物体所受的外力 (即 $\{R\}$) 以及物体所受的约束情况, 而要求解的基本未知量是每个可动结点的结点位移值, 即 $\{\delta\}$, 并要根据 $\{\delta\}$ 进一步求出每个单元或结点的应力分量。

二、单元分析

有限单元法中的单元分析就是根据单元的结点位移列阵 $\{\delta\}^e$ 确定单元的位移分量列阵 $\{f\}$ 、应变分量列阵 $\{\epsilon\}$ 、应力分量列阵 $\{\sigma\}$ 以及结点力列阵 $\{F\}^e$ 。对于平面问题以及空间问题, $\{f\}$ 、 $\{\epsilon\}$ 、 $\{\sigma\}$ 分别为

	$\{f\}$	$\{\epsilon\}$	$\{\sigma\}$
平面问题	$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$
空间问题	$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$

为此，先建立单元的位移模式，即由插值公式得

$$\{f\} = [N]\{\delta\}^e \quad (1-1)$$

其中 $[N]$ 是形函数矩阵，它的具体表达式将在以后有关章节中给出。

接着，将式 (1-1) 代入几何方程

$$\{\epsilon\} = [\partial]\{f\} \quad (a)$$

即可求得

$$\{\epsilon\} = [\partial][N]\{\delta\}^e = [B]\{\delta\}^e \quad (1-2)$$

其中

$$[B] = [\partial][N] \quad (1-3)$$

称为应变转换矩阵，将它乘以单元的结点位移列阵 $\{\delta\}^e$ ，就得到单元的应变分量； $[\partial]$ 是个微分算子矩阵，在平面问题中，它是

$$\{\partial\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (b)$$

在空间问题中，它是

$$\{\partial\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (c)$$

再将式 (1-2) 代入物理方程

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} \quad (d)$$

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\delta\}^e = [S]\{\delta\}^e \quad (1-4)$$

其中

$$[S] = [D][B] \quad (1-5)$$

称为应力转换矩阵，将它乘以单元的结点位移列阵，就得到单元的应力分量； $[D]$ 是弹性矩阵，在平面应力问题中，它是

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix} \quad (1-6a)$$

在平面应变问题中，须将式 (1-6a) 中的 E 与 μ 分别用 $\frac{E}{1-\mu^2}$ 与 $\frac{\mu}{1-\mu}$ 来代替；在空间问题中，它是

$$[D] = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & D_2 & 0 & 0 & 0 \\ D_2 & D_1 & D_2 & 0 & 0 & 0 \\ D_2 & D_2 & D_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_3 \end{bmatrix} \quad (1-6b)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \\ D_2 &= \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} \\ D_3 &= \frac{E}{2(1+\mu)} \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

为了能由 $\{\delta\}^e$ 确定 $\{F\}^e$ ，须对单元利用虚功方程。由于从离散结构中割离出来单元只受到结点力的作用，因此，虚功方程可以表示为

$$(\{\delta^*\}^e)^T \{F\}^e = \iiint_{V^e} \{\epsilon^*\}^T \{\sigma\} dx dy dz \quad (f)$$

其中 $\{\delta^*\}^e$ 是单元的虚结点位移， $\{\epsilon^*\}$ 是相应的单元的虚应变，三重积分是在单元的体积 V^e 内进行的。将由式 (1-2) 得来的 $\{\epsilon^*\} = [B]\{\delta^*\}^e$ 代入式 (f)，得

$$(\{\delta^*\}^e)^T \{F\}^e = (\{\delta^*\}^e)^T \iiint_{V^e} [B]^T \{\sigma\} dx dy dz$$

由于虚位移是任意的，从而 $(\{\delta^*\}^e)^T$ 也是任意的，于是得

$$\{F\}^e = \iiint_{V^e} [B]^T \{\sigma\} dx dy dz \quad (g)$$

再将式 (1-4) 代入式 (g)，即得

$$\{F\}^e = \iiint_{V^e} [B]^T [D] [B] dx dy dz \{\delta\}^e \quad (1-7)$$

记

$$[k]^e = \iiint_{V^e} [B]^T [D] [B] dx dy dz \quad (1-8)$$

式 (1-7) 就成为

$$\{F\}^e = [k]^e \{\delta\}^e \quad (1-9)$$

其中 $[k]^e$ 称为单元的劲度矩阵, 亦即结点力转换矩阵, 将它乘以单元的结点位移列阵, 就得到单元的结点力列阵。

对于平面问题, 取 z 方向的厚度为 t , 式 (1-8) 成为

$$[k]^e = \iint_A [B]^T [D] [B] t dx dy \quad (1-10)$$

其中 A 是单元的面积。

三、结构的整体分析

有限单元法中结构整体分析的首要任务就是建立求解基本未知量, 即结构的未知结点位移列阵 $\{\delta\}$ 的整体结点平衡方程组

$$[K]\{\delta\} = \{R\} \quad (1-11)$$

式中: $[K]$ 为结构的整体劲度矩阵; $\{R\}$ 为结构的整体结点荷载列阵。

为此, 对离散化结构应用最小势能原理。设离散结构共有 NE 个单元, 在实际平衡状态单元的形变势能为 U^e 、外力势能为 V^e 、总势能为 Π_p , 则离散结构的总势能 Π_p 为

$$\Pi_p = \sum_{e=1}^{NE} \Pi_p^e = \sum_{e=1}^{NE} U^e + \sum_{e=1}^{NE} V^e \quad (h)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} U^e &= \iiint_{V^e} \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dx dy dz \\ V^e &= - \left(\{f\}^T \{P\} + \iiint_{V^e} \{f\}^T \{p\} dx dy dz + \iint_{S^e} \{f\}^T \{\bar{p}\} ds \right) \end{aligned} \right\} \quad (i)$$

这里的 $\{P\}$ 、 $\{p\}$ 、 $\{\bar{p}\}$ 分别是作用在单元上的集中力列阵、分布体力列阵与分布面力列阵, S^e 是指作用着面力的单元表面。

将式 (1-1)、式 (1-2)、式 (1-4) 3 式代入式 (i) 式, 便可以将 U^e 、 V^e 用 $\{\delta\}^e$ 表示为

$$\left. \begin{aligned} U^e &= \frac{1}{2} \iiint_{V^e} (\{\delta\}^e)^T [B]^T [D] [B] \{\delta\}^e dx dy dz \\ &= \frac{1}{2} (\{\delta\}^e)^T [k]^e \{\delta\}^e \\ V^e &= - (\{\delta\}^e)^T \left([N]^T \{P\} + \iiint_{V^e} [N]^T \{p\} dx dy dz + \iint_{S^e} [N]^T \{\bar{p}\} ds \right) \\ &= - (\{\delta\}^e)^T \{r\}^e \end{aligned} \right\} \quad (j)$$

其中

$$[k]^e = \iiint_{V^e} [B]^T [D] [B] dx dy dz$$

即是式 (1-8) 所示的单元劲度矩阵。

$$\{r\}^e = [N]^T \{P\} + \iiint_{V^e} [N]^T \{p\} dx dy dz + \iint_{S^e} [N]^T \{\bar{p}\} ds \quad (1-12)$$