普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学实用教程

康丽坤　主编

北京工业大学出版社

普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学
实用教程

主　编　康丽坤

副主编　邓超公　赵燕冰

参　编　周兴盛　刘　媛　范西庭

张建华　赵建玲　李云雷

王丽英

北京工业大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学实用教程 / 康丽坤主编．-- 北京：北京工业大学出版社，2016.8

ISBN 978-7-5639-4917-5

Ⅰ．①高… Ⅱ．①康… Ⅲ．①高等数学 -- 教材 Ⅳ．① O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2016）第229742号

高等数学实用教程

主　　编：康丽坤
责任编辑：张　鑫
封面设计：晟　熙
出版发行：北京工业大学出版社
（北京市朝阳区平乐园 100 号　邮编：100124）
010-67391722（传真）　bgdcbs@sina.com
出 版 人：郝　勇
经销单位：全国新华书店
承印单位：北京市迪鑫印刷厂印刷
开　　本：787mm × 1092mm 1/16
印　　张：25.5
字　　数：570 千字
版　　次：2016 年 9 月第 1 版
印　　次：2016 年 9 月第 1 次印刷
定　　价：43.00 元
标准书号：ISBN 978-7-5639-4917-5

前　言

为了更好的适应高职高专教育的需要，根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学的基本要求》，在认真总结高职高专数学教学改革的基础上编写了本教材。

本教材力求贯彻“以应用为目的，必须够用为度”的原则。第一，尊重科学，注重教材自身知识体系的系统性和逻辑性。对难度较大的基础理论部分，注重讲清概念，减少理论证明，注重培养学生分析问题、解决问题的能力。第二，重视理论联系实际，加强与实际应用联系较多的基础知识的讲解。第三，着重加强数学思想的培养，即学习怎么用数学思想去解决生产、生活中的实际问题。第四，强调数学的工具性作用，在掌握基本理论的基础上，学会用数学软件去辅助解决问题。

本教材在内容上充分的体现了高等数学在职业教育教学中为专业教学服务这一根本宗旨，在教学中可根据专业教学的实际需要进行灵活选择，同时兼顾了各专业专升本教学的需要。教材在编写时，注意数学理论的逻辑关系，循序渐进。以案例教学的方式强化了将实际问题转化成为数学问题的过程，这是高职高专数学课教学中的一个关键点。同时，介绍了Mathcad 软件的简单操作，其目的是让学生学到最容易掌握的解决数学计算问题的工具。然而，限于篇幅，本教材难以囊括各行各业的实际问题，因此，教师们在教学时应挖掘与本专业相关的问题加以充实。

本教材内容包括一元函数微积分，常微分方程，拉普拉斯变换，空间解析几何，多元函数微积分，无穷级数、线性代数、概率统计等几个部分。每节配有习题，每章配有复习题，以便于学生巩固基础知识，提高基本技能。在一些章节里，加入了 Mathcad 软件的操作方法。本教材是高职高专理工类、经济类专业的通用教材，也可作为成人高等学校及本科院校举办的二级职业技术学院各专业高等数学教材。

本教材由张家口职业技术学院基础部数学教师共同编写，由康丽坤担任主编，邓超公、赵燕冰担任副主编，具体分工如下：第一、二、五、七、十一、十二、十三章由康丽坤编写，第三章由周兴盛编写，第四章由刘媛编写，第六章由范西庭编写，第八章由邓超公编写，第九章由张建华编写，第十章由赵建玲编写，第十四章由李云雷编写，第十五章及附录由王丽英编写，十六章由赵燕冰编写。

在本教材的编写过程中，我们做了很大的努力，但限于水平，加之教学改革中的一些问题还有待进一步探索，不当之处恳请同仁批评指正。同时，向为支持本教材编写和出版的各界同仁表示衷心感谢。

编者

2016 年 7 月

目 录

第 1 章　函数、极限与连续

函数是微积分研究的对象，极限是研究微积分的工具．本章先复习中学已学习过的函数的概念和特性，进而给出基本初等函数与初等函数的定义．然后，重点研究极限的概念、性质及运算法则，在此基础上建立函数连续的概念，并讨论连续函数的性质.

1.1　函数的概念和特性

本节除了复习函数的定义和常见的几种特性外，还特别介绍基本初等函数、初等函数的概念.

一、函数的概念

函数的概念在 17 世纪之前一直与公式紧密关联，到了 1837 年，德国数学家狄利克雷(1805-1859)抽象出了直至今日仍为人们易于接受，并且较为合理的函数概念.

1. 函数的定义

定义 1　设有两个变量 x 和 y，D 是一个非空数集，若当变量 x 在集合 D 内任意取定一个数值时，按照一定的对应关系 f，都有唯一确定的数值 y 与之对应，那么 y 就叫做定义在数集 D 上的 x 的函数，记作 $y=f(x)$．其中变量 x 叫做函数的自变量，变量 y 称为函数(或因变量)．自变量的取值范围 D 叫做函数的定义域.

当 x 取数值 $x_0 \in D$ 时，与 x_0 对应的 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值，记作 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$. 全体函数值的集合称为函数的值域，记作 M，即 $M = \{y \mid y = f(x),\ x \in D\}$.

若函数在某个区间上的每一点都有定义，则称这个函数在该区间上有定义.

2. 函数的两个要素

函数的对应关系和定义域称为函数的两个要素：对应关系，定义域。

(1) 对应关系：函数的对应关系指的是由自变量的取值确定因变量取值的规律.

例 1　函数 $f(x) = 8x^2 + 5x - 2$ 所确定的对应关系为：$f(\ ) = 8(\ )^2 + 5(\ ) - 2$.

例 2　设 $y = f(x) = \dfrac{1}{3}\sin\dfrac{1}{x}$，求 $f(\dfrac{2}{\pi})$.

解

$$f(\frac{2}{\pi}) = y|_{x=\frac{2}{\pi}} = \frac{1}{3}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{3}.$$

(2) 定义域

自变量的取值范围称为函数的定义域.

在实际问题中，根据所考察问题的实际意义来确定其定义域．对于不具实际意义的抽象函数，其定义域是使得函数有意义的全体自变量的集合．常见的有：

① 分式函数中，分母不能为零；

② 根式函数中，负数不能开偶次方；

③ 对数函数中，真数大于零；

④ 三角函数和反三角函数中，要符合它们的定义域；

⑤ 在含有多种式子的函数中，应取各部分定义域的交集.

例 3 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{4-x^2}$；

(2) $y=\lg\dfrac{x+1}{x-1}$.

解 (1)要使函数 $y=\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{4-x^2}$ 有意义，

必须有 $\begin{cases}x+2\geqslant 0,\\4-x^2\neq 0.\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x\geqslant -2,\\x\neq \pm 2.\end{cases}$

所以函数 $y=\sqrt{x+2}+\dfrac{1}{4-x^2}$ 的定义域为 $(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

(2) 要使函数 $y=\lg\dfrac{x+1}{x-1}$ 有意义，

必须有 $\dfrac{x+1}{x-1}>0$，于是有 $\begin{cases}x+1<0,\\x-1<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+1>0,\\x-1>0.\end{cases}$

解得 $x<-1$ 或 $x>1$.

所以函数 $y=\lg\dfrac{x+1}{x-1}$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

两个函数相同的充要条件是它们的对应关系和定义域都相同.

例 4 下列函数是否相同，为什么？

(1) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$；

(2) $y=\sqrt{x}$ 与 $y=\sqrt{t}$.

解(1) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$ 不是相同的函数，因为定义域不同.

(2) $y=\sqrt{x}$ 与 $y=\sqrt{t}$ 是相同的函数，因为对应关系和定义域均相同.

3. 函数的记号和表示法

y 是 x 的函数，可以记作 $y=f(x)$，也可以记作 $y=\varphi(x)$ 或 $y=F(x)$ 等，但同一函数在同一问题的讨论中应取定一种记法，同一问题中涉及多个函数时，则应取不同的记号分别表示它们各自的对应关系，为方便起见，有时也用记号 $y=y(x)$，$u=u(x)$，$v=v(x)$ 等表示函

数。这种函数的记号也称为函数的解析表达式．

函数可以用至少三种不同的方法表示：表格法、图象法和公式法．

例5　据统计，某地2007年7月18日–28日每天的最高气温如表1.1所示．

表1.1

日期(7月)	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
最高气温(℃)	29	31	31	30	24	21	23	19	26	28	30

这个表格确实表达了该地区的最高温度是日期的函数，这里没有任何计算温度的公式，但是每一天都会产生出一个唯一的最高气温，对每个日期 t，都有一个与 t 相应的唯一最高气温．

例6　设函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\ (x\geqslant 0),\\ -x(x<0).\end{cases}$，是定义在区间 $(-\infty,\ +\infty)$ 内的一个函数．当 $x\geqslant 0$ 时，$f(x)=\sqrt{x}$；当 $x<0$ 时，$f(x)=-x$．

以上函数在它定义域内不同的区间上是用不同解析式子来表示的，这样的函数称为**分段函数**，分段函数是定义域上的一个函数，不要理解为多个函数．求分段函数在某一点处的函数值时，应把自变量的值代入相应取值范围的表达式中进行计算，如在上面的分段函数中，$f(4)=\sqrt{4}=2$；$f(-4)=-(-4)=4$. 分段函数作图时，需要分段作图，其定义域是各部分自变量取值范围的并集.

二、函数的几种特性

1. 奇偶性

如果函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，且对于任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，那么 $y=f(x)$ 叫做**奇函数**；如果函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，且对于任意的 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，那么 $y=f(x)$ 叫做**偶函数**；如果函数 $y=f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数，则称 $y=f(x)$ 为**非奇非偶函数**.

奇函数的图像关于原点对称，如图1–1；偶函数的图像关于 y 轴对称，如图1–2.

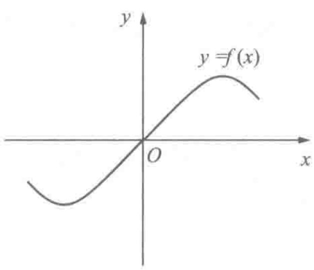

图1–1

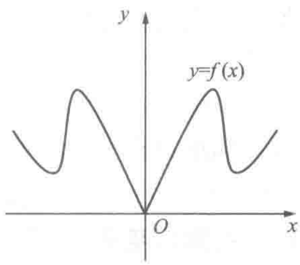

图1–2

例7　判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=x^2\cos x$；

(2) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$；

(3) $f(x)=x^2-x$.

解 (1) 因为$f(-x)=(-x)^2\cos(-x)=x^2\cos x=f(x)$，所以$f(x)=x^2\cos x$是偶函数.

(2) 因为$f(-x)=(-x)+(-\frac{1}{x})=-x-\frac{1}{x}=-(x+\frac{1}{x})=-f(x)$，所以$f(x)=x+\frac{1}{x}$是奇函数.

(3) 因为$f(-x)=(-x)^2-(-x)=x^2+x$，既不与$f(x)$相等，也不与$-f(x)$相等，所以$f(x)=x^2-x$是非奇非偶函数.

2. 单调性

如果函数$f(x)$在区间(a,b)内随着x的增大而增大，即对于(a,b)内任意两点x_1与x_2，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)<f(x_2)$，那么称函数$f(x)$在区间(a,b)内是**单调增加**的，区间(a,b)叫做函数$f(x)$的**单调增加区间**.

如果函数$f(x)$在区间(a,b)内随着x的增大而减小，即对于(a,b)内任意两点x_1与x_2，当$x_1<x_2$时，有$f(x_1)>f(x_2)$，那么称函数$f(x)$在区间(a,b)内是**单调减少**的，区间(a,b)叫做函数$f(x)$的**单调减少区间**.

显然，单调增加函数的图像沿x轴正向是逐渐上升的(如图1-3所示)；单调减少函数的图像沿x轴正向是逐渐下降的(如图1-4所示).

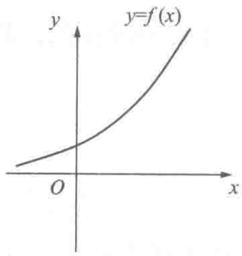

图1-3

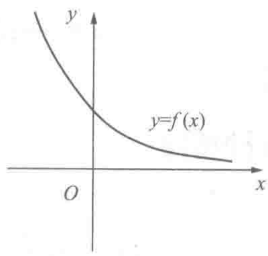

图1-4

在某个区间上单调增加或单调减少的函数，称为这区间上的**单调函数**，这个区间称为这个函数的**单调区间**.

例如，指数函数$y=e^x$在其定义域R内是单调增加的. 而幂函数$y=x^2$在$(0,+\infty)$内是单调增加的，在$(-\infty,0)$内是单调减少的，所以函数$y=x^2$在$(-\infty,+\infty)$内不是单调函数.

3. 周期性

对于函数$f(x)$，如果存在一个非零常数T，使得对于其定义域内的每一个x，都有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立，则称$f(x)$是**周期函数**，t称为其**周期**.

显然，如果t是$f(x)$的周期，则nT(n是整数)均为其周期. 一般提到的周期均指最小正周期.

我们常见的三角函数$y=\sin x$，$y=\cos x$都是以2π为周期；$y=\tan x$，$y=\cot x$都是以π为周期.

4. 有界性

设函数$f(x)$在区间(a,b)内有定义，如果存在一个正数M，使得对于任意$x\in(a,$

b)，恒有 $|f(x)| \leq M$，那么称 $f(x)$ 在 (a, b) 内**有界**；如果不存在这样的数 M，那么称 $f(x)$ 在 (a, b) 内**无界**.

说明：(1) 当一个函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内有界时，正数 M 的取法不是唯一的。例如：$y=\cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是有界的，因为 $|\cos x| \leq 1$。但我们也可以取 M = 3 即 $|\cos x| < 3$ 总是成立的。实际上 M 可以取任何大于等于 1 的数。

(2) 有界性是依赖于区间的，如 $y=\frac{1}{x}$ 在区间 (1, 2) 内是有界的，但在区间 (0, 1) 内是无界。例如，函数 $y=\sin x$，存在正数 $M=1$，使得对于任意的 $x \in R$，均有 $|\sin x| \leq 1$，所以函数 $y=\sin x$ 在其定义域 R 内是有界的.

三、反函数

在研究函数的同时，有时函数和自变量的地位会相互转换，于是就出现了反函数的概念.

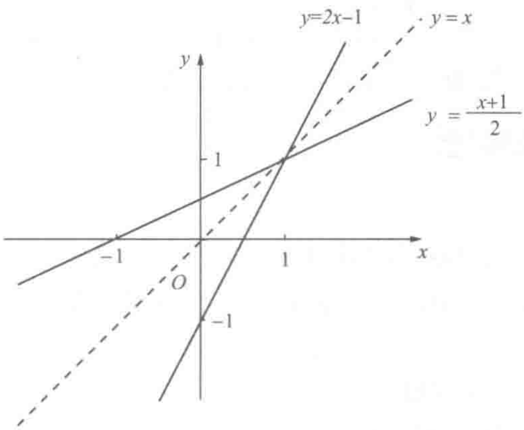

图 1-5

例如，在函数 $y=\frac{x+1}{2}$ 中，定义域和值域都是 R，按照 x 和 y 的对应关系，任意给出一个 $y \in R$，都有惟一确定的 $x=2y-1$ 与之对应.

定义 2　设函数 $y=f(x)$，定义域为 D，值域为 M. 如果对于 M 中的每一个 y 值，都可由 $y=f(x)$ 确定惟一的 x 值与之对应，这样就确定一个以 y 为自变量的函数 x，该函数称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**，记做 $x=f^{-1}(y)$. 显然，该函数 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域为 M，值域为 D.

习惯上常用 x 表示自变量，y 表示函数，故常把 $y=f(x)$ 的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$. 若把函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形画在同一个平面直角坐标系内，则这两个图形关于直线 $y=x$ 对称.

因此，函数 $x=2y-1$ 是函数 $y=\frac{x+1}{2}$ 的反函数，其定义域为 R，值域为 R. 将函数改为 y，自变量改为 x，则函数 $y=\frac{x+1}{2}$ 的反函数为 $y=2x-1$(图 1-5).

例 8　求 $y=x^3+2$ 的反函数.

解 因为 $y=x^3+2$，所以 $x=\sqrt[3]{y-2}$.

因此，函数 $y=x^3+2$ 的反函数为 $y=\sqrt[3]{x-2}$.

四、基本初等函数

微积分研究对象，主要为初等函数，而初等函数是由基本初等函数组成的. 下面我们先给出基本初等函数的定义.

定义 3 通常把常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这六类函数统称为基本初等函数. 其函数名称与解析表达式如下：

常数函数 $y=C$（C 为常数）;

幂函数 $y=x^{\mu}$（μ 为实数）;

指数函数 $y=a^x$（$a>0$，$a\neq 1$，a 为常数）;

对数函数 $y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq 1$，a 为常数）;

三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\sec x$，$y=\csc x$；

反三角函数 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=arccot x$.

关于这些函数的性质、图形在中学已经学过，这里不再赘述.

五、复合函数、初等函数

1. 复合函数

在同一问题中，两个变量的联系有时不是直接的，而是通过另一变量间接联系起来的.

定义 4 设 $y=f(u)$ 是 u 的函数，$u=\varphi(x)$ 是 x 的函数，如果 $u=\varphi(x)$ 值域与 $y=f(u)$ 定义域的交集非空，则 y 通过中间变量 u 成为 x 的函数，我们称 y 为 x 的**复合函数**. 记作 $y=f[\varphi(x)]$. 其中 u 称为**中间变量**.

例 9 指出下列函数的复合过程和定义域：

(1) $y=\log_a(1+x^2)$；

(2) $y=\sin^2 x$.

解 (1) 函数 $y=\log_a(1+x^2)$ 是由 $y=\log_a u$ 和 $u=1+x^2$ 复合而成. 由于任意的 x 对应的 $u=1+x^2>0$，使得 $y=\log_a u$ 有意义，所以它的定义域为 R.

(2) 函数 $y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 复合而成，其定义域为 R.

例 10 已知 $y=\lg u$，$u=\sin v$，$v=x^2$，将 y 表示成 x 的复合函数.

解 $y=\lg u=\lg\sin v=\lg\sin x^2$.

2. 初等函数

定义 5 由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算构成的，并且能用一个解析式表示的函数叫做**初等函数**.

例如：$y=\dfrac{1}{x}+\log_a(2+x^2)$，$y=3-\sqrt{x}$，$y=x\ln x$ 等都是初等函数.

六、建立函数关系举例

为了解决应用问题，先要给问题建立数学模型，即建立函数关系. 为此需要明确问题中

的因变量与自变量，再根据题意建立等式，从而得出函数关系，再确定函数的定义域．应用问题的定义域，除使函数的解析式有意义外，还要考虑变量在实际问题中的含义．下面就一些简单实际问题，说明建立函数关系的过程．

例 11　某市场对西红柿的批发价格如下规定：批发量不超过 50kg 为 1 元/kg；批发量不超过 100kg 且超过 50kg 的部分为 0.8 元/kg；批发量超过 100kg 的部分为 0.5 元/kg. 设批发量为 $x$kg，总费用为 y 元，试建立 y 与 x 的函数关系.

解　由于批发量的多少决定批发价格，所以，建立函数关系应按批发量分段表示．因此有

$$y=\begin{cases}x & (x\leqslant 50),\\ 50+0.8(x-50) & (50<x\leqslant 100),\\ 50+0.8(100-50)+0.5(x-100) & (x>100).\end{cases}$$

即

$$y=\begin{cases}x & (x\leqslant 50),\\ 0.8x+10 & (50<x\leqslant 100),\\ 0.5x+40 & (x>100).\end{cases}$$

其图像为图 1-6.

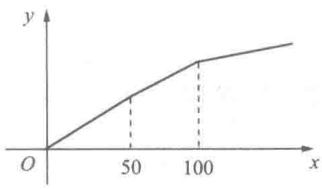

图 1-6

例 12　一物体做直线运动，已知所受阻力 f 的大小与其运动速度 v 成正比，方向相反．设物体的速度为 100 米/秒时，所受阻力为 1.98 牛顿，试建立 f 与 v 的函数关系.

解　因为 f 与 v 成正比，方向相反，所以可设 $f=kv$．由题设知，当 $v=100$ 时，$f=1.98$，于是

$$1.98=100k,$$

得

$$k=1.98\times 10^{-2},$$

因此，有函数关系

$$f=1.98\times 10^{-2}v.$$

习题 1-1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{2}{2x-1}$；　　(2) $y=\sqrt{3x+5}$；

(3) $y=\ln(x^2-3x+2)$；　　(4) $y=\tan 2x$；

(5) $y=\dfrac{1}{x-1}+\sqrt{x+2}$.

2. 已知函数$f(x)=\frac{2+x}{2-x}$，求$f(0)$，$f(1)$，$f(1+x)$，$f(-x)$，$f\left(\frac{1}{x}\right)$.

3. 已知函数

$$f(x)=\begin{cases}1-x,\ (x<-2)\\ \sin x(-2<x<2)\\ 1+x(x>2)\end{cases}$$

求$f(-4)$，$f(0)$，$f(4)$.

4. 求下列函数的反函数：

(1) $y=e^{x-1}$；　　(2) $y=x^3+1$.

5. 指出下列函数的奇偶性：

(1) $y=2x^4-5x^2+1$；　　(2) $y=x\sin x$；

(3) $y=\sin x+\tan x$；　　(4) $y=\lg\frac{1-x}{1+x}$.

6. 判断下列函数的单调性：

(1) $y=-x+2$；　　(2) $y=2x^2(x\geqslant 0)$.

7. 指出下列函数的复合过程：

(1) $y=\cos 3x$；　　(2) $y=\sqrt{4x-1}$；

(3) $y=\ln\sin x$；　　(4) $y=(2+\tan x)^4$.

8. 某市出租车的费用规定：起步价为(五公里)10元，以后为每公里1.8元. 试建立租车费用y与行驶里程x的函数关系.

1.2 极限的概念

一、数列的极限

数列可以看做是函数$x_n=f(n)$按自然数顺序列出的一串函数值：x_1，x_2，…，x_n，… . 并且表示为：$\{x_n\}$. 现在来考察当自变量n无限增大时，数列$\{x_n\}$的变化趋势. 试看下面几个例子：

(1) 数列$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$，即$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}$，…，$\frac{1}{2^n}$，…；

(2) 数列$\left\{\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}\right\}$，即2，$\frac{1}{2}$，$\frac{4}{3}$，$\frac{3}{4}$，…，$\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$，…；

(3) 数列$\{2n\}$，即2，4，6，…，$2n$，…；

(4) 数列$\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}$，即0，1，0，1，…，$\frac{1+(-1)^n}{2}$，….

通过仔细观察可以发现，当$n\to\infty$时，这几个数列的变化情况是大不相同的. 数列(1)随着n的无限增大，$x_n=\frac{1}{2^n}$无限接近常数0；数列(2)随着n的无限增大，$x_n=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$无限接近常数1；数列(3)、(4)随着$n$的无限增大，都不能无限接近于某一个确定的常数，

当 $n\to\infty$ 时，数列 $x_n=2n$ 的值也无限增大，数列 $x_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$ 的值在0与1两个数上来回跳动.

为清楚起见，我们把表示(1)、(2)这两个数列的点分别在数轴上描出一些(图1-7、图1-8).

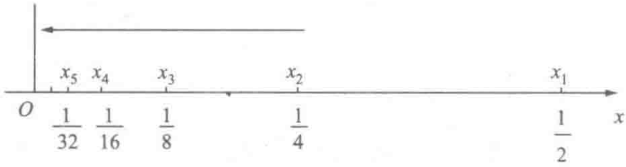

图1-7

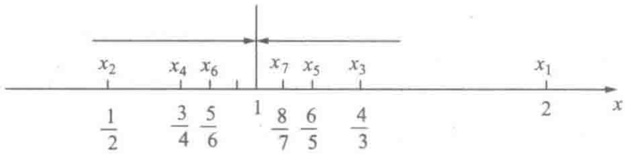

图1-8

可以看出，当 n 无限增大时，$x_n=\dfrac{1}{2^n}$ 在数轴上的对应点逐渐密集在 $x=0$ 的右侧，即 $x_n=\dfrac{1}{2^n}$ 无限趋近于0；$x_n=\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}$ 在数轴上的对应点逐渐密集在 $x=1$ 附近，即 $x_n=\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}$ 无限趋近于1.

总之，当 n 无限增大时，数列(1)、(2)都趋近于一个常数，这种数列称为有极限；当 n 无限增大时，数列(3)、(4)都不趋近于一个常数，这种数列称为无极限．一般地，有下面定义.

定义1 设数列 $\{x_n\}$，如果当 n 无限增大时，x_n 无限趋近于一个确定的常数 A，则称当 n 趋于无穷大时，数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限，记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A \text{ 或 } x_n\to A(n\to\infty).$$

此时，也称数列 $\{x_n\}$ 是收敛的；如果数列 $\{x_n\}$ 没有极限，就称其为发散的.

例如，当 $n\to\infty$ 时，$x_n=\dfrac{1}{n}$ 的极限是0，可记做 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$；$x_n=\dfrac{n}{n+1}$ 的极限是1，可记做 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$；而数列 $\{2n\}$ 和 $\left\{\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right\}$ 没有极限，没有极限的数列，也说数列的极限不存在.

例1 观察下面数列的变化趋势，写出它们的极限：

(1) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$； (2) $\left\{2-\dfrac{1}{n^3}\right\}$；

(3) $\{(-1)^n\frac{1}{2^n}\}$；　　　　　　(4) $\{3\}$

解　(1) 当 n 依次取 1、2、3、4、5、…等自然数时，数列 $\{\frac{1}{n}\}$ 的各项依次是 1、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、…，容易看出，当 n 无限增大时，x_n 无限接近于 0. 根据数列极限的定义可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

(2) 当 n 依次取 1、2、3、4、5、…等自然数时，数列 $\{2-\frac{1}{n^3}\}$ 的各项依次为 $2-1$、$2-\frac{1}{8}$、$2-\frac{1}{27}$、$2-\frac{1}{64}$、$2-\frac{1}{125}$、…，容易看出，当 n 无限增大时，x_n 无限接近于 2. 根据数列极限的定义可知 $\lim\limits_{n\to\infty}(2-\frac{1}{n^3})=2$.

(3) 当 n 依次取 1、2、3、4、5、…等自然数时，数列 $\{(-1)^n\frac{1}{2^n}\}$ 的各项依次为 $-\frac{1}{2}$、$\frac{1}{4}$、$-\frac{1}{8}$、$\frac{1}{16}$、$-\frac{1}{32}$、…，容易看出，当 n 无限增大时，x_n 无限接近于 0. 根据数列极限的定义可知 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}=0$.

(4) 当 n 依次取 1、2、3、4、5、…等自然数时，数列 $\{3\}$ 的各项都是 3，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}3=3$.

一般地，任何一个常数数列的极限就是这个常数本身，即 $\lim\limits_{n\to\infty}C=C$（$C$ 为常数）.

例 2　（无穷递缩等比数列的求和公式）设数列 a，aq，aq^2，aq^3，…，aq^{n-1}，… . 其中首项 $a_1\neq 0$，公比 $|q|<1$，求其所有项的和 S.

解　因为该数列是等比数列，所以其前 n 项和为 $S_n=\frac{a(1-q^n)}{1-q}$，所有项的和就是当项数 n 无限增大时 S_n 的极限，即

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a(1-q^n)}{1-q},$$

由 $|q|<1$，得

$$\lim_{n\to\infty}q^n=0,$$

因此

$$S=\frac{a}{1-q}.$$

二、函数的极限

1. 当 $x\to\infty$ 时，函数 $y=f(x)$ 的极限

例 3　考察当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 的变化趋势.