高等学校经济管理类专业
应用型本科系列规划教材

GAODENG XUEXIAO JINGJI GUANLILEI ZHUANYE
YINGYONGXING BENKE XILIE GUIHUA JIAOCAI

概率论与数理统计

GAILÜLUN YU
SHULI TONGJI

主 编 艾艺红 殷 羽

Economics and management

重庆大学出版社

高等学校经济管理类专业
应用型本科系列规划教材

GAODE
YINGY

概率论与数理统计

GAILÜLUN YU
SHULI TONGJI

主 编 艾艺红 殷 羽

Economics and management

重庆大学出版社

内容提要

本书是一本高等学校非数学专业概率论与数理统计课程的教材.全书共分为7部分,内容包括排列组合、随机事件与概率、随机变量及其概率分布、二维随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、统计初步.各章后选配了适量习题,并在书后附有习题答案.书末给出了泊松分布表、标准正态分布表、χ^2 分布分位数表、t 分布分位数表、F 分布分位数表5个重要分布表.本书力求使用较少的数学知识,强调概率统计概念的阐释.

本书可作为高等学校经济、管理、工学等非数学专业的教材或教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 艾艺红,殷羽主编. -- 重庆 :
重庆大学出版社, 2017.8
高等学校经济管理类专业应用型本科系列规划教材
ISBN 978-7-5689-0691-3

Ⅰ.①概… Ⅱ.①艾… ②殷… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第180825号

高等学校经济管理类专业应用型本科系列规划教材
概率论与数理统计
主　编　艾艺红　殷　羽
责任编辑:顾丽萍　　版式设计:顾丽萍
责任校对:刘志刚　　责任印制:赵　晟
*
重庆大学出版社出版发行
出版人:易树平
社址:重庆市沙坪坝区大学城西路21号
邮编:401331
电话:(023)88617190　88617185(中小学)
传真:(023)88617186　88617166
网址:http://www.cqup.com.cn
邮箱:fxk@cqup.com.cn (营销中心)
全国新华书店经销
重庆共创印务有限公司印刷
*
开本:787mm×1092mm　1/16　印张:11.25　字数:260千
2017年8月第1版　2017年8月第1次印刷
印数:1—3 000
ISBN 978-7-5689-0691-3　定价:26.00元

前　言

本书是根据重庆工商大学派斯学院近20年的教学实践编写而成,可作为高等学校理工、经济、管理等各专业有关概率论与数理统计课程的教材或实际工作者的参考书.

概率论与数理统计作为现代数学的重要分支,在自然科学、社会科学和工程技术的各个领域都具有极为广泛的应用,特别是随着计算机的全面普及,概率统计在经济、管理、金融、保险、生物、医学、石油、冶金、地质等方面的应用更是得到长足发展. 正是概率统计的这种广泛应用性,使得它今天成为各类专业大学生重要的数学必修课之一.

与高等数学(微积分)、线性代数这两门数学前期基础课程相比较,学习概率论与数理统计时有两点值得注意:一是初学者往往对本门课程中一些重要概念的实质的领会感到困难;二是本门课程的应用性很强. 基于这两点,本教材在编写过程中力求做到以下几点:

(1)尽量使用较少的数学知识,避免过于数学化的论证,深入浅出,但保持叙述的严谨性.

(2)在内容安排上,对一些传统内容进行了适当调整和优化,以更好地体现知识的内在联系和循序渐进性.

(3)力求例题、习题合理配置,形式多样,难易适度. 教材每章后的习题均分为(A)(B)两组,其中(A)组习题反映了本章的基本要求,(B)组习题由填空题和选择题两部分组成,可作为复习和总结使用. 书后附有习题答案.

(4)增加了排列组合等预备知识.

本书的写作分工如下:预备知识由艾艺红执笔,第1章由田秀霞执笔,第2章由殷羽执笔,第3章由徐文华、徐畅凯执笔,第4章由唐建民执笔,第5章由葛杨执笔,第6章由潘平国执笔,附表由李文学提供. 全书由殷羽修改定稿,艾艺红统撰完成.

由于编者水平所限,书中难免存在疏漏之处,恳请专家、同行、读者批评指正.

编　者

2017年6月

Contents

目录

第4章 随机变量的数字特征

第5章 大数定律与中心极限定理

第6章 统计初步

附表

预备知识

排列组合

排列和组合是学习概率与数理统计的预备知识,现将二者涉及的知识点归纳总结如下.

0.1　两条基本原理

1)加法原理

若完成一件事情有 n 类方式,其中第一类方式有 m_1 种方法,第二类方式有 m_2 种方法,……,第 n 类方式有 m_n 种方法,只要用其中任何一种方法都可以把这件事完成,则完成这件事情共有

$$m_1 + m_2 + \cdots + m_n$$

种方法.

【例 0.1】 从甲地到乙地有 4 种方式:可以乘汽车、轮船、火车或飞机. 若一天中有汽车 3 班,轮船 2 班,火车 4 班,飞机 1 班,那么从甲地到乙地共有

$$3 + 2 + 4 + 1 = 10$$

种方法.

2)乘法原理

若完成一件事情有 n 个步骤,缺一不可,其中第一个步骤有 m_1 种方法,第二个步骤有 m_2 种方法,……,第 n 个步骤有 m_n 种方法,则完成这件事共有

$$m_1 \times m_2 \times \cdots \times m_n$$

种不同的方法.

【例 0.2】 从甲地到丙地必须经过乙地,从甲地到乙地有 3 条路线,从乙地到丙地有 2 条路线,则从甲地到丙地共有

$$3 \times 2 = 6$$

种方法.

注　以上两条基本原理在排列组合中将会反复使用. 这两条原理回答的都是“关于完成

一件事情的不同方法的种数的问题”,但又有本质区别:加法原理针对的是“分类”问题,乘法原理针对的是“分步”问题.

0.2 排列

1)元素不允许重复的排列

【例 0.3】 从 4 面不同颜色的旗子中,选出 3 面排成一排作为一种信号,能组成多少种信号?

解 解决这个问题需要分为 3 步进行,第一步,先选第 1 面旗子,有 4 种选择方法;第二步,在剩下的 3 种颜色中,再选第 2 面旗子,有 3 种选法;第三步,在剩下的 2 种颜色中,选最后一面旗子,有 2 种选法. 根据乘法原理,共有 $4\times3\times2=24$ 种选法. 每种选法对应一种信号,故共能组成 24 种信号.

定义 1 从 n 个不同的元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个不同的元素,按照一定的顺序排成一列,叫作从 n 个不同的元素中取出 m 个元素的**排列**. 所有这样排列的个数称为**排列数**,记为 A_n^m 或 P_n^m.

$$A_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$$

规定 $A_n^0=1$. 当 $m=n$ 时,$A_n^n=n! \ =n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot2\cdot1$.

【例 0.4】 用 1,2,3,4 这 4 个数字可以组成多少个没有重复数字的三位数?

解 这是从 1,2,3,4 这 4 个数字中,任意选出 3 个数字排成一排,有多少种排法的排列问题. 故有 $A_4^3=4\times3\times2=24$ 种排法. 所以,用 1,2,3,4 这 4 个数字,可以组成 24 个没有重复数字的三位数.

2)元素允许重复的排列

元素允许重复包括元素重复和元素不重复两种情况,元素允许重复的排列指的是在排列中允许出现相同的元素.

下面讨论从 n 个不同的元素中允许重复地任取 m 个元素组成的排列的方法种数.

从 n 个不同的元素中任取一个放在第一个位置上共有 n 种方法,然后把该元素放回去,再从这 n 个元素中任取一个放在第二个位置上仍有 n 种方法,……,按这种方法进行 m 次,每次都有 n 种方法,根据乘法原理,可从 n 个不同元素中允许重复地任取 m 个元素组成的重复排列的个数为 $n\times n\times\cdots\times n=n^m$.

【例 0.5】 由 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 这 10 个数字所组成的四位数中,求:①没有重复的数字有几个;②4 个数字都相同的有几个;③恰好有 3 个数字相同的有几个?

解 ①千位上的数字除 0 外有 9 种不同的取法;取定后,由于不允许重复,但 0 可以加入供选用,故百位上的数字有 9 种不同的取法;在千位、百位上的数字取定后,十位上的数字有 8 种不同的取法;在千位、百位、十位上的数字取定后,个位上的数字有 7 种不同的取法. 因此由乘法原理可以组成 $9\times9\times8\times7=4\ 536$ 个没有重复数字的四位数.

②由于千位上的数字有 9 种不同的取法,根据 4 个数字都相同的要求,千位上的数字取定后,百位、十位、个位上的数字也相应取定,故 4 个数字都相同的四位数有 9 个.

③千位上的数字与百位、十位上的数字相同的四位数的个数为 $9\times9=81$;千位上的数字与百位、个位上的数字相同的四位数的个数为 $9\times9=81$;千位上的数字与十位、个位上的数字相同的四位数的个数为 $9\times9=81$;千位确定后,百位上的数字与十位、个位上的数字相同的四位数的个数为 $9\times9=81$. 由加法原理,恰好有 3 个数字相同的四位数的个数为 $81+81+81+81=324$.

0.3 组合

通过对排列的讨论可知,它是一个与次序有关的概念,例如从甲地到乙地的火车票与从乙地到甲地的火车票是两种不同的火车票,又如选同学 A 任班长、同学 B 任副班长与选同学 A 任副班长、同学 B 任班长是两种不同的职务安排. 但在实际问题中经常遇到一些与次序无关的问题:如选 A,B 两人为代表出席一个会议与选 B,A 两人为代表是同一种选法;又如"会计学与金融学专业之间进行足球赛"和"金融学与会计学专业之间进行足球赛"是同一场比赛,因此这是一个与排列概念不同的问题.

定义 2 从 n 个不同的元素中,任取 $m(m\leqslant n)$ 个元素为一组,称为从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个**组合**. 所有这样组合的个数称为**组合数**,记为 C_n^m.

一般地,考虑 C_n^m 与 A_n^m 的关系:把"从 n 个不同的元素中选出 $m(m\leqslant n)$ 个元素进行排列"这件事,分两步进行:第一步,从 n 个不同的元素中取出 m 个元素,一共有 C_n^m 种取法;第二步,把取出的 m 个元素进行排列,一共有 A_m^m 种排法,根据乘法原理有 $A_n^m=C_n^m\cdot A_m^m$.

由此可以得出:

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

规定 $C_n^0=1$,组合数性质 $C_n^m=C_n^{n-m}$,$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1}$.

对于实际问题,要正确判别其是排列问题还是组合问题,关键在于区别要不要将所取的元素进行排列,若要排列则是排列问题,若无须排列则是组合问题.

【例 0.6】 盒子中有 3 个红球,6 个白球,任取 5 个球,求:①共有多少种取法;②恰好有 1 个红球的取法数;③至少有 2 个红球的取法数;④至多有 1 个红球的取法数.

解 ①从 $3+6=9$ 个球中任取 5 个球,共 $C_9^5=126$ 种取法.

②任取 5 个球中恰好有 1 个红球,即所取球中 1 红 4 白,完成这件事情需要经过两个步骤:先是从 3 个红球中任取 1 个,共 C_3^1 种取法;再从 6 个白球中任取 4 个,共 C_6^4 种取法,根据乘法原理,共 $C_3^1\cdot C_6^4=C_3^1\cdot C_6^2=45$ 种取法.

③任取 5 个球中至少有 2 个红球,包括"2 红 3 白"和"3 红 2 白"两种情形,结合乘法原理和加法原理,共 $C_3^2\cdot C_6^3+C_3^3\cdot C_6^2=75$ 种取法.

④任取 5 个球中至多有 1 个红球,包括"1 红 4 白"和"0 红 5 白"两种情形,结合乘法原理和加法原理,共 $C_3^1\cdot C_6^4+C_3^0\cdot C_6^5=51$ 种取法.

【例 0.7】 从 1,3,5,7,9 中任取 3 个数字,从 2,4,6,8 中任取 2 个数字,一共可以组成多少个没有重复数字的五位数?

解 第一步:从 1,3,5,7,9 中任取 3 个数字,共有 C_5^3 种取法;

第二步:从 2,4,6,8 中任取 2 个数字,共有 C_4^2 种取法;

第三步:把取出的 5 个数字进行排列,共有 A_5^5 种排法;

根据乘法原理,一共可以组成 $C_5^3 \cdot C_4^2 \cdot A_5^5 = 7\ 200$ 个没有重复数字的五位数.

第 1 章

随机事件与概率

概率论是研究随机现象统计规律性的数学学科，它的理论与方法在自然科学、社会科学、工程技术、经济管理等诸多领域有着广泛的应用. 从 17 世纪人们利用古典概型来研究人口统计、产品检查等问题，到 20 世纪 30 年代概率论公理化体系的建立，概率论形成了自己严格的概念体系和严密的逻辑结构.

本章重点介绍概率论的两个最基本的概念：随机事件与概率. 主要内容包括：随机事件与概率的定义、古典概型、条件概率、乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式以及事件的独立性等.

1.1 随机现象与随机事件

1.1.1 确定性现象和随机现象

在自然界和人类社会生活中普遍存在着两类现象：必然现象和随机现象.

在一定条件下必然出现的现象称为**确定性现象**. 例如：

①没有受到外力作用的物体永远保持原来的运动状态；

②异性电荷相互吸引，同性电荷相互排斥；

③市场经济条件下，商品供过于求，其价格下降.

在相同的条件下可能出现也可能不出现的现象称为**随机现象**. 例如：

①抛掷一枚硬币出现正面还是出现反面；

②检查产品质量时任意抽取的产品是合格品还是次品；

③未来的一段时间内来到一个服务系统（例如超市、商场、火车站等）的顾客数量，可能是 0 个，也可能是 1 个，……，还可能是 1 000 个，…….

我们对事物的效果或者性能作一次观察或者进行一次试作，称为**试验**. 如果试验具有以下特点：

(1) **重复性** 试验可以在相同的条件下重复进行.

(2) **明确性** 每次试验的所有可能结果都是明确的、可观测的，并且试验的可能结果有

两个或更多个.

(3)**随机性** 每次试验将要出现的结果事先不能准确预知,但可以肯定会出现上述所有结果中的一个. 则称为**随机试验**,简称为**试验**,通常用字母 $E_1, E_2, \cdots$表示.

随机试验结果的外在表现即为随机现象. 由于随机现象的结果事先不能预知,初看似乎毫无规律. 然而,当我们对同一随机现象进行大量重复试验时,发现其每种可能的结果出现的频率具有稳定性,这表明随机现象存在其固有的量的规律性. 我们把随机现象在大量重复试验时所表现出来的量的规律性称为随机现象的**统计规律性**. 抛掷硬币的试验是历史上研究随机现象统计规律性的最著名的试验,该试验结果如表 1.1 所示.

表 1.1 历史上抛掷硬币试验的记录

试验者	抛掷次数 n	正面朝上的次数 n_A	正面朝上的频率$\frac{n_A}{n}$
De Morgan	2 048	1 061	0.518 1
Buffon	4 040	2 048	0.506 9
Fisher	10 000	4 979	0.497 9
Pearson	12 000	6 019	0.501 6
Pearson	24 000	12 012	0.500 5

试验表明:虽然每次抛掷一枚硬币事先无法预知出现正面还是反面,但大量重复该试验时发现,出现正面和反面的次数大致相等,即正面出现的频率在 0.5 附近摆动,并且随着试验次数的增加,频率更加稳定地趋于 0.5.

1.1.2 样本空间与样本点

对于随机试验 E,虽然在每次试验之前不能确定本次试验的结果,但是试验的所有结果在试验之前都是明确可知的,一个随机试验的所有可能结果组成的集合称为该试验的**样本空间**,记为 Ω. 样本空间的每一个元素 ω(每一个可能结果)称为**样本点**.

【例 1.1】 抛掷一枚硬币,观察正面 H 和反面 T 出现的情况(将这两个结果依次记作 ω_1 和 ω_2),则试验的样本空间为

$$\Omega = \{出现\ H,出现\ T\} = \{\omega_1, \omega_2\}$$

【例 1.2】 将一枚硬币掷 3 次,观察正面 H、反面 T 出现情况的试验中,其样本空间为

$$\Omega = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

【例 1.3】 抛掷一枚骰子,观察出现的点数,则试验的样本空间为

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

【例 1.4】 观察一部电梯一年内出现故障的次数. 则样本空间为

$$\Omega = \{0,1,2,\cdots\}$$

【例 1.5】 测量某机床加工的零件长度与零件规定长度的偏差 ω(单位:毫米). 由于通常可以知道其偏差的范围,故可以假定偏差的绝对值小于某一固定的正数 ε. 则样本空间为

$$\Omega = \{\omega \mid -\varepsilon \leqslant \omega \leqslant \varepsilon\}$$

【例 1.6】 测试某种电子元件的寿命(单位:小时). 则试验的样本空间为

$$\Omega = \{\omega \mid 0 \leqslant \omega < +\infty\}$$

1.1.3 随机事件

在概率论中,称随机试验 E 的样本空间 Ω 的子集为 E 的**随机事件**,简称为**事件**,用大写字母 A,B,C 等表示. 在每次试验中,如果事件 A 中的一个样本点 ω 发生,则称事件 A 在这次试验中发生,记作 $\omega \in A$. 例如,在例 1.6 中,若规定电子元件的寿命大于 5 000 小时为正品,那么满足这一条件的样本点组成 Ω 的子集 $A=\{\omega \mid \omega \geqslant 5\ 000\}$,称 A 为该试验的一个随机事件. 显然,当 A 发生时,有 $\omega \geqslant 5\ 000$.

特别地,由一个样本点组成的单点子集,称为**基本事件**. 样本空间 Ω 作为它自身的子集,包含了所有的样本点,每次试验总是发生,称为**必然事件**. 空集 $\varnothing$ 作为样本空间的子集,不包含任何样本点,每次试验都不发生,称为**不可能事件**.

【例 1.7】 在例 1.3 中,关于抛掷一枚骰子观察出现的点数的随机试验中,其样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$,则

①$A=\{$出现奇数点$\}=\{1,3,5\}$;

②$B=\{$出现的点数不小于 3,不大于 5$\}=\{3,4,5\}$;

③$C=\{$出现的点数能被 4 整除$\}=\{4\}$;

④$D=\{$出现的点数不超过 7$\}=\Omega$;

⑤$E=\{$出现的点数超过 8$\}=\varnothing$.

都是随机事件. 其中,C 是基本事件,D 为必然事件,E 为不可能事件.

1.1.4 事件之间的关系

为了通过对简单事件的研究来掌握复杂事件,需要研究事件间的关系及运算. 由于事件是一个集合(样本空间派生出的子集),因此事件的关系及运算与集合的关系及运算是相互对应的.

在以下的讨论中,记一个随机试验为 E,Ω 为 E 的样本空间,ω 为 Ω 中的样本点,A,B,A_k $(k=1,2,\cdots)$ 是试验 E 的事件,也是 Ω 的子集.

1)包含关系

$A \subset B$ 的准确含义是

$$\text{若 } \omega \in A, \text{则 } \omega \in B$$

它表示事件 A 发生必然导致事件 B 发生,这时称事件 B **包含**事件 A,或者称事件 A **包含于**事件 B.

显然,事件 $A \subset B$ 的含义与集合论中的含义是一致的,并且对任意事件 A,有

$$\varnothing \subset A \subset \Omega$$

在例 1.7 中,有 $C \subset B, C \subset D$. 在例 1.6 中,若记 $A=\{\omega \mid \omega \geqslant 5\ 000\}$,$B=\{\omega \mid \omega \geqslant 4\ 000\}$,则 $A \subset B$.

2)相等关系

如果事件 A 包含事件 B,事件 B 也包含事件 A,即 $B \subset A$ 且 $A \subset B$,则称事件 A 与事件 B

相等(**或等价**),记作 $A=B$. 显然,事件 A 与事件 B 相等是指这两个事件同时发生或者同时不发生.

3)**互不相容**

如果事件 A 与事件 B 在任何一次试验中都不能同时发生,则称事件 A 与事件 B **互不相容**(**或互斥**),否则称事件 A 与事件 B **相容**. 显然,事件 A 与事件 B 互不相容说明集合 A 与集合 B 无公共元素. 在例 1.7 中,事件 A 与事件 C 互不相容,事件 A 与事件 E 互不相容,而事件 A 与事件 B 相容.

1.1.5 事件的运算

1)**交运算**

"事件 A 和事件 B 同时发生"这一事件称为事件 A 与事件 B 的**交**(**或积**),记作 $A\cap B$(或 AB),即

$$A \cap B = \{\text{事件} A \text{发生且事件} B \text{发生}\} = \{\omega \mid \omega \in A \text{且} \omega \in B\}$$

这与集合论中的交集的含义一致. 在例 1.7 中,$AB=\{3,5\}$,$BC=\{4\}$.

事件的交可以推广到多个事件的情形:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{\text{事件} A_1, A_2, \cdots, A_n \text{同时发生}\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{\text{事件} A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \text{同时发生}\}$$

显然,事件 A,B 互不相容$\Leftrightarrow AB=\varnothing\Leftrightarrow A,B$ 不能同时发生.

2)**并运算**

"事件 A 和事件 B 至少有一个发生",这一事件称为事件 A 和事件 B 的**并**(**或和**),记作 $A\cup B$(或 $A+B$),即

$$A \cup B = \{\text{事件} A \text{发生或事件} B \text{发生}\} = \{\omega \mid \omega \in A \text{或} \omega \in B\}$$

在例 1.7 中,$A\cup B=\{1,3,4,5\}$,$B\cup C=\{3,4,5\}$.

事件的并可以推广到多个事件的情形:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{\text{事件} A_1, A_2, \cdots, A_n \text{中至少有一个发生}\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{\text{事件} A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots \text{中至少有一个发生}\}$$

3)**差运算与对立运算**

"事件 A 发生而事件 B 不发生",这一事件称为事件 A 与事件 B 的**差**,记作 $A-B$,即

$$A - B = \{\text{事件} A \text{发生且事件} B \text{不发生}\} = \{\omega \mid \omega \in A \text{且} \omega \notin B\}$$

在例 1.7 中,$A-B=\{1\}$,$B-C=\{3,5\}$.

特别地,称事件 $B=\Omega-A$ 为事件 A 的**对立事件**(**或逆事件**),表示 A 不发生,记作$\overline{A}$. 如果在一次试验中事件 A 与事件 B 互为对立事件,则在该次试验中事件 A 与事件 B 有且仅有一

个发生.

显然,事件 A,B 相互对立的充要条件是

$$A \cup B = \Omega \text{且} AB = \varnothing$$

注 相互对立事件与互不相容(互斥)事件的区别:相互对立事件一定互不相容,而互不相容事件不一定相互对立.

4)完备事件组

如果一组事件 $A_k(k=1,2,\cdots,n)$ 满足下列两个条件:

(1)两两互不相容($A_i \cap A_j = \varnothing, i \neq j, i,j=1,2,\cdots,n$);

(2)在每次试验中,其中至少有一个发生($\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega$),

则称 $A_k(k=1,2,\cdots,n)$ 构成一个**完备事件组**.显然,一个事件组构成完备事件组的充要条件是,该组事件在每次试验中有且仅有一个发生.

与集合的运算类似,事件的运算有如下的运算规律:

(1)**交换律** $A \cup B = B \cup A, AB = BA$;

(2)**结合律** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (AB)C = A(BC)$;

(3)**分配律** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

(4)**对偶律** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

(5)**差化律** $A - B = A - AB = A\overline{B}$.

上述事件的运算规律可以推广到多个事件的情形.

图 1.1 直观地表示了上述事件的各种关系及运算,我们把这种直观图称为文氏图.

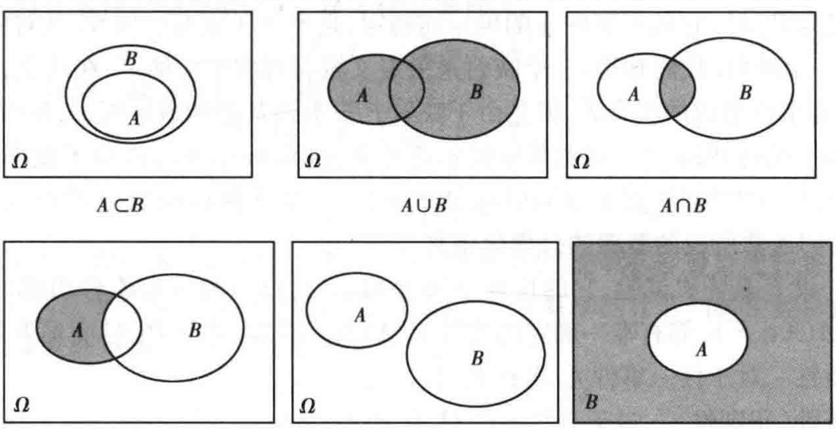

图 1.1 事件的关系与运算

【**例 1.8**】 设 A,B,C 为随机试验中的 3 个事件,则

①事件"A 发生而 B 与 C 都不发生"可表示为

$$A \cap \overline{B} \cap \overline{C} \text{或} A - B - C \text{或} A - (B \cup C)$$

②事件"3 个事件都发生" 可表示为

$$A \cap B \cap C = ABC$$

③事件"A 与 B 同时发生,而 C 不发生" 可表示为

$$A \cap B \cap \overline{C} = AB\overline{C} \text{或} A \cap B - C$$

④事件“3 个事件恰有一个发生”可表示为

$$(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C) = A\overline{B}\,\overline{C} \cup \overline{A}B\overline{C} \cup \overline{A}\,\overline{B}C$$

⑤事件“3 个事件中恰有两个发生”可表示为

$$(A \cap B \cap \overline{C}) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap \overline{B} \cap C) = AB\overline{C} \cup \overline{A}BC \cup A\overline{B}C$$

⑥事件“3 个事件中至少有两个发生”可表示为

$$AB\overline{C} \cup \overline{A}BC \cup A\overline{B}C \cup ABC$$

利用分配律可得

$$AB\overline{C} \cup \overline{A}BC \cup A\overline{B}C \cup ABC = AB \cup BC \cup AC$$

1.2 随机事件的概率

我们知道随机事件在一次试验中可能发生也可能不发生,但是我们更希望知道:一个随机事件 A 在一次试验中发生的可能性有多大. 我们把用来表征事件 A 在一次试验中发生的可能性大小的数值称为事件 A 的概率.

1.2.1 概率的公理化定义

设 Ω 是随机试验 E 的样本空间,$\mathcal{F}$ 为 Ω 上的所有事件组成的集合. 事件 $A \in \mathcal{F}$ 发生的可能性大小,记为 $P(A)$,它随着事件 A 的确定而确定,是事件 A 固有的属性. 从对应关系来说,$P:\mathcal{F} \to \mathbf{R}$ 是一个映射. 我们知道:一个映射是由定义域与对应法则确定. 在这里,映射的定义域为 Ω 上所有事件组成的集合 $\mathcal{F}$,但是由于映射 P 没有通常的函数解析式,从而它的对应法则也难以确定. 直到 1933 年苏联数学家柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov)提出了概率的公理化定义,他规定映射 P 的对应法则必须同时满足 3 条公理,这才使得映射 P 的对应法则得以确定. 这就是我们通常所说的**概率的公理化定义**.

定义 1 设 E 是随机试验,它的样本空间为 Ω,$\mathcal{F}$ 为 Ω 上的所有事件组成的集合. 如果对任意事件 $A(A \in \mathcal{F})$,都有唯一确定的实数 $P(A)$ 与之对应,并且 $P(A)$ 满足下列条件:

(1) **非负性** 对于任一事件 A,均有 $P(A) \geqslant 0$;

(2) **规范性(正则性)** 对于必然事件 Ω,有 $P(\Omega)=1$;

(3) **可列可加性** 对于两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$(即当 $i \neq j$ 时,有 $A_iA_j = \varnothing$, $i,j=1,2,\cdots$),有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

概率的公理化定义虽然高度抽象,但它具有广泛的适应性. 在第 5 章将证明,当 $n \to \infty$ 时,频率 $f_n(A)$ 在一定条件下收敛于概率 $P(A)$,可见概率的公理化定义涵盖了概率的统计定义.

1.2.2 概率的基本性质

根据概率的公理化定义，可以推出概率的许多重要性质，这些性质对进一步理解概率的概念起到促进作用，同时也是计算概率的重要依据.

性质1 对于不可能事件$\varnothing$，有$P(\varnothing)=0$.

证 令$A_i=\varnothing(i=1,2,\cdots)$，则$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$是两两互不相容的事件，且$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\varnothing$，根据概率的可列可加性有

$$P(\varnothing)=P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(\varnothing)$$

于是，根据非负性有

$$P(\varnothing)=0$$

注 ①不可能事件的概率等于零，但是概率等于零的事件不一定是不可能事件；

②必然事件的概率等于1，但是概率等于1的事件不一定是必然事件.

性质2(概率的有限可加性) 若事件$A_1,A_2,\cdots,A_n$两两互不相容(即当$i\neq j$时，有$A_iA_j=\varnothing,i,j=1,2,\cdots,n$)，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

证 令$A_i=\varnothing(i=n+1,n+2,\cdots)$，于是，根据概率的可列可加性以及性质1有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

性质3(对立事件的概率公式) 对于任意事件A，有

$$P(A)=1-P(\bar{A})$$

证 因为$A\cup\bar{A}=\Omega,A\cap\bar{A}=\varnothing$，由性质2有

$$1=P(\Omega)=P(A\cup\bar{A})=P(A)+P(\bar{A})$$

于是，可得

$$P(A)=1-P(\bar{A})$$

注 对立事件的概率公式的意义在于：当一个事件的概率不容易直接计算时，我们常常通过计算它的对立事件来完成，这种"反思维"的方式在概率的计算问题中经常被采用.

性质4(真差的概率公式) 如果事件$A\subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

证 因为$A\subset B$，所以

$$B=A\cup(B-A)\text{，且}A(B-A)=\varnothing$$

由性质2有

$$P(B)=P(A)+P(B-A)$$

移项得

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

由性质4可得下面3条性质.

性质5(概率的单调性) 如果事件$A\subset B$，则有

$$P(A)\leqslant P(B)$$