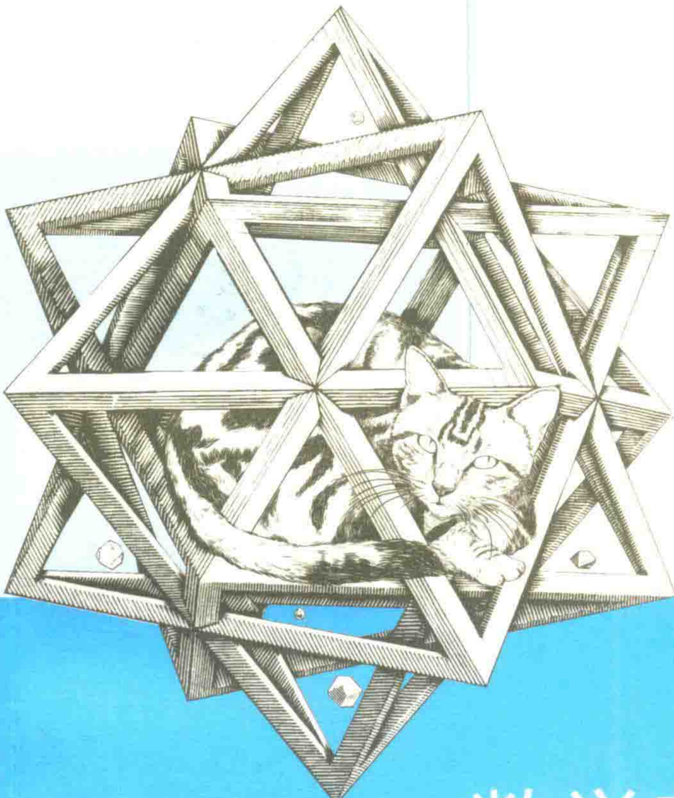
$e^{\pi i}+1=0$

Panorama of Mathematics

数学概览 16



数学杂谈

— 高木贞治 著

— 高明芝 译

高等教育出版社

Panorama of Mathematics
数学概览
16

数学杂谈

高木贞治 著
高明芝 译

高等教育出版社·北京

图书在版编目（CIP）数据

数学杂谈 /（日）高木贞治著；高明芝译 . -- 北京：高等教育出版社，2018. 1

（数学概览 / 严加安，季理真主编）

ISBN 978-7-04-048807-4

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①高… ②高… Ⅲ. ①数学 - 普及读物 Ⅳ. ① O1-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 274818 号

策划编辑 李 鹏　　责任编辑 李 鹏　　封面设计 姜 磊　　版式设计 于 婕
插图绘制 杜晓丹　　责任校对 刘丽娴　　责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街4号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　　刷	高教社（天津）印务有限公司		http://www.hepmall.com
开　　本	787 mm× 1092 mm 1/16		http://www.hepmall.cn
印　　张	14.25		
字　　数	180千字	版　　次	2018 年 1 月第 1 版
购书热线	010-58581118	印　　次	2018 年 1 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	59.00 元

物 料 号 48807-00

《数学概览》编委会

《数学概览》序言

当你使用卫星定位系统 (GPS) 引导汽车在城市中行驶, 或对医院的计算机层析成像深信不疑时, 你是否意识到其中用到什么数学? 当你兴致勃勃地在网上购物时, 你是否意识到是数学保证了网上交易的安全性? 数学从来就没有像现在这样与我们日常生活有如此密切的联系。的确, 数学无处不在, 但什么是数学, 一个貌似简单的问题, 却不易回答。伽利略说: "数学是上帝用来描述宇宙的语言。" 伽利略的话并没有解释什么是数学, 但他告诉我们, 解释自然界纷繁复杂的现象就要依赖数学。因此, 数学是人类文化的重要组成部分, 对数学本身以及对数学在人类文明发展中的角色的理解, 是我们每一个人应该接受的基本教育。

到 19 世纪中叶, 数学已经发展成为一门高深的理论。如今数学更是一门大学科, 每门子学科又包括很多分支。例如, 现代几何学就包括解析几何、微分几何、代数几何、射影几何、仿射几何、算术几何、谱几何、非交换几何、双曲几何、辛几何、复几何等众多分支。老的学科融入新学科, 新理论用来解决老问题。例如, 经典的费马大定理就是利用现代伽罗瓦表示论和自守形式得以攻破; 拓扑学领域中著名的庞加莱猜想就是用微分几何和硬分析得以证明。不同学科越来越相互交融, 2010 年国际数学家大会 4 个菲尔兹

奖获得者的工作就是明证。

现代数学及其未来是那么神秘，吸引我们不断地探索。借用希尔伯特的一句话："有谁不想揭开数学未来的面纱，探索新世纪里我们这门科学发展的前景和奥秘呢？我们下一代的主要数学思潮将追求什么样的特殊目标？在广阔而丰富的数学思想领域，新世纪将会带来什么样的新方法和新成就？"中国有句古话：老马识途。为了探索这个复杂而又迷人的神秘数学世界，我们需要数学大师们的经典论著来指点迷津。想象一下，如果有机会倾听像希尔伯特或克莱因这些大师们的报告是多么激动人心的事情。这样的机会当然不多，但是我们可以通过阅读数学大师们的高端科普读物来提升自己的数学素养。

作为本丛书的前几卷，我们精心挑选了一些数学大师写的经典著作。例如，希尔伯特的《直观几何》成书于他正给数学建立现代公理化系统的时期；克莱因的《数学讲座》是他在 19 世纪末访问美国芝加哥世界博览会时在西北大学所做的系列通俗报告基础上整理而成的，他的报告与当时的数学前沿密切相关，对美国数学的发展起了巨大的作用；李特尔伍德的《数学随笔集》收集了他对数学的精辟见解；拉普拉斯不仅对天体力学有很大的贡献，而且还是分析概率论的奠基人，他的《概率哲学随笔》讲述了他对概率论的哲学思考。这些著作历久弥新，写作风格堪称一流。我们希望这些著作能够传递这样一个重要观点，良好的表述和沟通在数学上如同在人文学科中一样重要。

数学是一个整体，数学的各个领域从来就是不可分割的，我们要以整体的眼光看待数学的各个分支，这样我们才能更好地理解数学的起源、发展和未来。除了大师们的经典的数学著作之外，我们还将有计划地选择在数学重要领域有影响的现代数学专著翻译出版，希望本译丛能够尽可能覆盖数学的各个领域。我们选书的唯一标准就是：该书必须是对一些重要的理论或问题进行深入浅出的讨论，具有历史价值，有趣且易懂，它们应当能够激发读者学习更多的数学。

作为人类文化一部分的数学，它不仅具有科学性，并且也具有

艺术性。罗素说: “数学, 如果正确地看, 不但拥有真理, 而且也具有至高无上的美。” 数学家维纳认为“数学是一门精美的艺术”。数学的美主要在于它的抽象性、简洁性、对称性和雅致性, 数学的美还表现在它内部的和谐和统一。最基本的数学美是和谐美、对称美和简洁美, 它应该可以而且能够被我们理解和欣赏。怎么来培养数学的美感? 阅读数学大师们的经典论著和现代数学精品是一个有效途径。我们希望这套数学概览译丛能够成为在我们学习和欣赏数学的旅途中的良师益友。

严加安、季理真

2012 年秋于北京

关于发行第二版的说明

本书的作者于 1960 年 2 月去世. 此书是作者于 1928 年至 1931 年为共立出版社发行的《新高等数学讲座》和《续新高等数学讲座》所写的部分系列文章. 初版是把原来分散在各册中的内容整理到一起, 再加上第 6 章 “自然数论” 的 “附记”, 作为上述讲座的 “新修订版” 中的一册于 1935 年出版发行.

根据出版社收到的读者建议, 在发行第二版的时候考虑到读者的方便, 文中的当用汉字改为了新字体 (简化字), 假名的用法也改为了 “新假名用法”. 还有, 限制汉字中除了极少数外, 尽量考虑到现在的使用习惯, 在不损失原意的前提下替换成了当用汉字, 保留的限制汉字中, 认为难以读出的都标上了读音, 内容与初版时完全一致. 希望读者把它当作 1928—1931 年写的东西来阅读, 我们只是把个别明显的排版错误进行了订正.

在第二版的发行过程中我们得到了共立出版社编辑部的大力支持, 在此表示感谢.

1970 年 11 月

高木佐知夫

目　　录

数学杂谈

在数学讲座这种严肃的书中用杂谈这样的字眼作为标题, 恐怕很有必要做一下说明. 从古到今, "杂谈 = 废话" 几乎是公认的公式. 我担心喜欢学习的读者, 对用杂谈开始讲座的方式会感到疑惑, 真是万般惭愧.

然而, 笔者绝对没有要写一些废话的意思. 笔者将近期的高等数学讲座看成是一种 "大学的延伸", 关于这一点, 我想大家不会有什么异议吧. 在大学里从事数学研究时 "讨论会" 是不可缺少的, 名称是什么倒不重要, 讨论肯定是需要的. 我们可以把 "讨论会" 暂且翻译为杂谈, 所不同的是讨论会式的杂谈是口头进行的, 而本栏目的目标是尝试在纸上完全模拟口头讨论.

为什么需要杂谈, 因为杂谈通俗易懂. 不管什么时代, 都有属于这个时代的所谓成熟的数学, 通常它以一个既定的形式呈现在学界面前, 但同时也像由于发酵溢出酒囊的酒, 新的数学不断地被酿造出来. 其中, 有些东西会像泡沫一样消失, 但也有一些精华的东西会被蒸馏出来, 成为下一个时代的既定数学. 所以, 有心的同学除了参加正式的数学讲座外, 还是有必要去参加 "讨论会" 的. 在数学研究史上, 新数学自不必说, 哪怕是一些陷入停滞状态的古老

数学, 甚至是遭到当下所有学派、所有理论冷遇的东西, 由于某种机缘巧合焕发青春, 就像休眠的火山爆发那样, 从意想不到的地方开启新的研究的情形也不是没有, 而且我们感觉一些僵局往往是从这种边缘地带取得突破的, 这甚至成了一种常例. 一旦被已有的数学定式所束缚恐怕就要落伍了.

综上所述, 我们既不能小看废话式的数学杂谈, 又特别强调了"讨论会"的作用, 这样一来, 作为杂谈的笔者还真有点不敢下笔. 但是, 如果本栏目在本讲座的各科目中能够拾遗补阙, 产生几分效果的话, 也就实现我的愿望了.

> 随着科学的发展, 想对其全部内容开展研究愈发困难. 因此, 人们就把科学切分成碎片, 满足于拾取其中一片加以研究, 也就是平常所说的越来越专业化. 但是, 如果这种倾向越来越严重的话, 会阻碍科学的发展, 很是令人担忧. 只有在意想不到的时候接触到不同的东西, 科学才能产生进步. ——Poincaré

第 1 章 格几何学

1. 将两组各自保持固定间距的平行线在平面上沿纵横两个方向无限地画下去的话, 平面就会被相同的平行四边形的网格所覆盖. 这样的图形在最近的数学中被称作**格**. 这种图形非常类似于方格绘图纸、格子推拉门、方块吊顶或棋盘等, 大家一定十分熟悉. 我相信很多人无聊的时候都盯着这些东西发过呆, 也就是说多多少少都有过观察格几何学的经历.

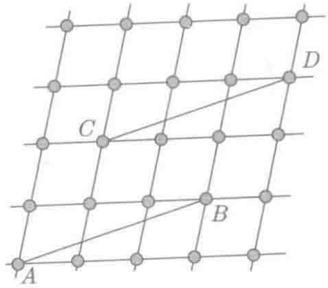
实际上, 格几何学非常有趣, 也十分流行, 正朝着各个方面发展. 按照现有数学的固有方法来研究这样的新兴数学, 会产生许多难以处理的问题, 而且解决起来也不是那么容易, 但越是这种用固有的模型不能套用的地方越有清新的趣味. 此文中, 我们不去涉及太难的部分, 只是介绍一些相对容易且有趣的内容.

2. 我们把构成格的两组平行线的交叉点叫作**格点**. 在格几何学中, 研究的重点不在构成格的平行线, 而是把观察的目标放在由这些平行线生成的全体格点上.

将分布着格的平面做平行移动, 使一个格点移到另一格点的位置, 可以看出全部的格点依然是一致的. 换句话说:

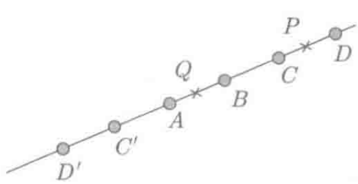
设 A, B, C 为任意三个格点, 从 C 作一条与 AB 平行且等长的

线段 CD, 那么 D 也是一个格点.



这就是格的基本性质.

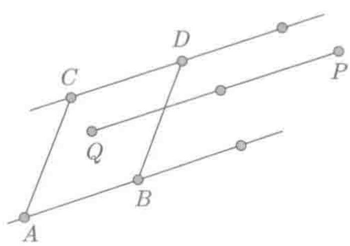
特别是通过两个格点的直线 (将其称为**格线**) 上可以等间距地分布着无限多个格点. 设直线上的一个格点为 A, 假设这条直线上离 A 最近的格点为 B 的话, 那么, 在 AB 的延长线上满足 $AB = BC = CD = \cdots$ 的点 $C, D, \cdots$, 根据上述基本性质都是格点, BA 延长线上满足 $BA = AC' = C'D' = \cdots$ 的点 $C', D', \cdots$ 不用说也是格点, 而且, 格线 AB 上除了这些点以外不存在其他的格点. 假如 C, D 间有格点 P, AB 上满足 $AQ = CP$ 的点 Q 也应该是格点, 这与 B 是 A 的最近格点的假设相矛盾.



(这个证明方法的基础是存在一个离 A "最近" 的格点. 由于格点在平面上的任何地方不是 "密集" 的, 所以这种 "最近" 点的存在就是不言自明的了.)

设 AB 为一条格线, 格点 A, B 的意义如上所述. 那么, 不在格线 AB 上的格点中存在着离 AB 最近的格点. 这种格点虽说最近但不唯一, 或确切地说, 是不存在比它离 AB 更近的格点. 关于这一点, 我不想也以不言自明一推了之, 我想做进一步的解释. 因为在 AB 线以外存在无限个格点, 因此, 不管选哪一个格点, 总会找

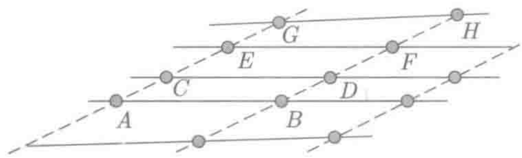
到一个比它离 AB 更近的格点, 确定一个后, 还会有比它近的, 这样一来, 好像存在离 AB 最近的格点的说法不能成立. 但事实上, 离 AB 最近的格点确实存在, 下面, 我们就认真地对其进行讨论确认. 为实现这个目的, 我们可以这样想: 根据格的基本性质, 从 AB 线外的格点 C 作平行于 AB 的 CD,CD 也是一条格线, 并且 CD 上的格点以与 AB 相等的间距排列 (图中 $AB = CD$). 假设有格点 P 比 C,D 离 AB 线更近, 通过 P 的平行于 AB 的直线上排列着与 AB 的距离相等的格点, 在这些点当中必定有落在 AC 和 BD 的中间的点 (或在 AC 上). 设这个点为 Q,P 与 Q 离 AB 的距离是相等的. 这样一来, 为求离 AB 线最近的格点, 我们只需考虑平行四边形 $ABDC$ 中的格点即可. 因为平行四边形 $ABDC$ 中的格点数量是有限的 (因为格点不是密集的), 所以在有限个点中很显然会存在一个离 AB 最近的点. 以上虽只考虑了 AB 一侧的格点, 由于格是以 A 为中心对称的, 所以, 关于 AB 线的另一侧也是一样的.



通过以上讨论, 我们确认了离 AB 最近的格点的存在, 同时也知道这种最近的格点有无限个, 它们以与 AB 上的格点相同的间距分布在位于 AB 线的两侧、平行于 AB 且与 AB 距离相等的两条格线上.

将两条平行线中的一条设为 CD, 那么, 被两条格线 AB,CD 包围起来的带状区域内不存在格点. 下面, 我们不看 AB 而来看格线 CD, 离 CD 最近的格点在 AB 上, 因此, 在 CD 的另一侧, 也就是与 AB 相反的一侧, 与 AB 等距离位置上的平行线 (设其为 EF) 上存在离 CD 最近的格点, CD, EF 包围起来的区域也不应该存在格点. 按照这种思路我们可以知道, 保持一定间距且相互平行的平

行线束 $(AB, CD, EF, \cdots)$ 上分布着全部的格点.



同理, 设 C 为直线 CD 上的格点, 作一条通过 A, C 的直线, 分别与上述平行线相交于 $C, E, G, \cdots$, 因为 $AC = CE = EG = \cdots$, 所以这些交点 $E, G, \cdots$ 都是格点, 而 AC 间、CE 间等不会有格点, 所以, 格线 AC 上的格点以与 A, C 两点间相等的间距排列. 然后再从 B 作一条 AC 的平行线, 分别与前述平行线束相交于 $B, D, F, \cdots$ 的话, 那这些点肯定是格点, 并且 CD 间、EF 间等不会有格点, 所以, 格线 BD 即是包含离 AC 最近格点的线, 也就是说, AC, BD 是与最初介绍的 AB, CD 具有相同性质的格线, 从而, 如果作与 AC, BD 平行且保持等间距的第二组平行线束的话, 那这些平行线上分布着全部的格点.

也就是说, 全部的格点不会落在这两组平行线的交叉线以外. 不管给定的格是由什么样的平行线形成的, 根据上述方法, 都能求出生成这个格的两组平行线, 因为 AB 是任意的格线, 所以两组平行线可以无限多. 虽然格点的全体是固定不变的, 但作为"格"的平行四边形的形状却可以是各式各样.

在本文中, 我们将所谓的"格"即平行四边形 (如上图中的 $ABDC$) 暂且命名为**单位平行四边形**. *单位平行四边形具有以下特征: 其四个顶点是格点, 除此以外, 其内部及四边均没有格点.*

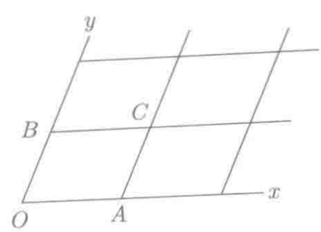
3. 对于给定的格, 其单位平行四边形可以具有不同形状, 但其*面积不变.*

为了以后叙述上的方便, 在此使用解析几何学的方法证明这个基本定理.

为简便起见, 我们使用直角坐标系. 作分别与 Ox, Oy 平行、间距等于坐标系长度单位的两组平行线, 平行线在坐标系内生成格 (**正方格**), 其格点为坐标 (x, y) 同时为整数 $0, \pm1, \pm2, \cdots$ 的点的全

体. 在这种情形下, 我们来证明所有的单位平行四边形的面积等于 1.

证明中没假定格是正方格, 因此, 得出的结论适合任意格. 其实, 任意格的情形完全可以使用斜交轴进行同样的证明, 但对斜交轴而言, 统一 x 轴和 y 轴上长度单位不是很方便, 当生成格的基本平行四边形为 $OACB$ 时, 如果把 OA 作为 x 轴的长度单位, OB 作为 y 轴的长度单位, $OACB$ 的面积作为面积单位的话, 下面关于正方格的证明不作任何变更就可适用于任意格. 这样的坐标与以往既有的解析几何学中常用的坐标差别不大, 但根据处理问题的性质显然这是最合适的. 原来的解析几何学中将两轴的长度单位定为一致本来也不是实践中的需要, 只不过是一种规定, 因此, 不必过于拘泥于此. 在这一点上, 也令人感到在惰性的作用下, 初等数学对近代几何学的发展是多么麻木不仁.



言归正传, 还是回到我们的问题. 从原点 O 作格线 (为简单起见, 限在第一象限内), 格线上离 O 最近的格点设为 $P(a,b)$, 那么, a,b 是互素的整数, 这是因为如果 a,b 有公约数 d $(d>1)$, 那么 $\dfrac{a}{d},\dfrac{b}{d}$ 为整数, 点 $\left(\dfrac{a}{d},\dfrac{b}{d}\right)$ 就必须是在 OP 上且位于 O 与 P 之间的格点. 下面来看一下以 OP 为一条边的单位平行四边形, 假定与该单位平行四边形的 OP 边相对的一边在格线 GH 上 (并没有说 G,H 是格点). 由于这条格线上的格点以等于 OP 的间距分布, 所以, G 与 H 之间存在格点 Q, 以 OP,OQ 为两边的平行四边形为单位平行四边形, 现在的问题是, 就看这个单位平行四边形的面积是否等于平行四边形 $OPHG$ 的面积. 现在, 在 y 轴取 $OE=1$ 的点 E, 作 EF 平行于 OP. 由前面第 2 节的讨论知, 与 OP 平行、以 OP,GH 之间的