



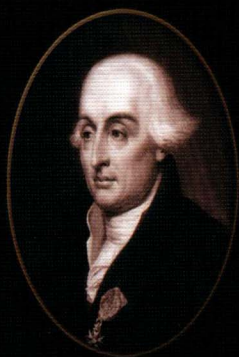
国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编 王梓坤

LAGRANGE THEOREM IN THE DIFFERENCE EQUATION

差分方程中的 Lagrange 定理

刘培杰数学工作室 编译



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



清华大学出版社

QINGHUA UNIVERSITY PRESS
100084 Beijing, China
http://www.tup.tsinghua.edu.cn

《数学分析》(第2版)是清华大学数学系数学专业基础课程《数学分析》的教材,也是工科专业《数学分析》课程的重要参考书。

多元方程中的 Lagrange 定理

张纪岳 王健 编

清华大学出版社



清华大学出版社



国家出版基金项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编 王梓坤

LAGRANGE THEOREM IN THE DIFFERENCE EQUATION

差分方程中的 Lagrange 定理

刘培杰数学工作室 编译



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书共分四编. 首先介绍差分方程概论及一些基本定理; 其次介绍用变换的眼光看差分方程; 再次介绍差分方程解的稳定性; 最后介绍差分方程的实际应用.

本书适合于优秀的初高中学生尤其是数学竞赛选手、初高中数学教师和中学数学奥林匹克教练员使用, 也可作为高等院校教师和学习用书及数学爱好者的兴趣读物.

图书在版编目(CIP)数据

差分方程中的 Lagrange 定理/刘培杰数学工作室编译. —哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2018. 1

(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)

ISBN 978-7-5603-6497-1

I. ①差… II. ①刘… III. ①拉格朗日多项式—中值定理 IV. ①O174.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 042311 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 李宏艳

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨工大节能印刷厂

开 本 787mm×960mm 1/16 印张 59.5 字数 616 千字

版 次 2018 年 1 月第 1 版 2018 年 1 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-6497-1

定 价 168.00 元

(如因印装质量问题影响阅读, 我社负责调换)

代

序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍。

你经常去哪里——书店。

你最大的乐趣是什么——读书。

这是友人提出的问题 and 我的回答。真的，我这一辈子算是和书籍，特别是好书结下了不解之缘。有人说，读书要费那么大的劲，又发不了财，读它做什么？我却至今不悔，不仅不悔，反而情趣越来越浓。想当年，我也曾爱打球，也曾爱下棋，对操琴也有兴趣，还登台伴奏过。但后来却都一一断交，“终身不复鼓琴”。那原因便是怕花费时间，玩物丧志，误了我的大事——求学。这当然过激了一些。剩下来唯有读书一事，自幼至今，无日少废，谓之书痴也可，谓之书橱也可，管它呢，人各有志，不可相强。我的一生大志，便是教书，而当教师，不多读书是不行的。

读好书是一种乐趣，一种情操；一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量。书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉。失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；年老人读书，能知健神之理。浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不竭。吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主。

潜能需要激发

我和书籍结缘，开始于一次非常偶然的機會。大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工。一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了。屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看。封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》。管它呢，且往下看。第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪。

三岁孩童千两价，保主跨海去征东。

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵（雪、人贵）。那时识字很少，半看半猜，居然引起了极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字。这是我有生以来独立看的第一本书。尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心

中的女英雄。我真入迷了。从此，放牛也罢，车水也罢，我总要带一本书，还练出了边走田间小路边读书的本领，读得津津有味，不知人间别有他事。

当我们安静下来回想往事时，往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生。如果不是找到那本《薛仁贵征东》，我的好学心也许激发不起来。我这一生，也许会走另一条路。人的潜能，好比一座汽油库，星星之火，可以使它雷声隆隆、光照天地；但若少了这粒火星，它便会成为一潭死水，永归沉寂。

抄，总抄得起

好不容易上了中学，做完功课还有点时间，便常光顾图书馆。好书借了实在舍不得还，但买不到也买不起，便下决心动手抄书。抄，总抄得起。我抄过林语堂写的《高级英文法》，抄过英文的《英文典大全》，还抄过《孙子兵法》，这本书实在爱得狠了，竟一口气抄了两份。人们虽知抄书之苦，未知抄书之益，抄完毫末俱见，一览无余，胜读十遍。

始于精于一，返于精于博

关于康有为的教学法，他的弟子梁启超说：“康先生之教，专标专精、涉猎二条，无专精则不能成，无涉猎则不能通也。”可见康有为强烈要求学生把专精和广博（即“涉猎”）相结合。

在先后次序上，我认为要从精于一开始。首先应集中精力学好专业，并在专业的科研中做出成绩，然后逐步扩大领域，力求多方面的精。年轻时，我曾精读杜布（J. L. Doob）的《随机过程论》，哈尔莫斯（P. R. Halmos）的《测度论》等世界数学名著，使我终身受益。简言之，即“始于精于一，返于精于博”。正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片。

丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此。一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材。这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,便把这部书从头到尾读了一遍。从此启发了我读史书的兴趣。

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》。我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全。即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称“人质之父”。

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利。其中“秋水”“解牛”诸篇,诚绝唱也。《论语》束身严谨,勇于面世,“己所不欲,勿施于人”,有长者之风。司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究。我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说。我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:“人生自古谁无死,留取丹心照汗青”“休言女子非英物,夜夜龙泉壁上鸣”。唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品。

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心。不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信。以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”。

从学生时代起,我就喜读方法论方面的论著。我想,做什么事情都要讲究方法,追求效率、效果和效益,方法好能事半功倍。我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验。我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书,并从他的传记中去寻找答案。文史哲和科学的海洋无边无际,先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵,我衷心感谢他们的恩惠。

读书的另一面

以上我谈了读书的好处,现在要回过头来说说事情的另一面。

读书要选择。世上有各种各样的书:有的不值一看,有的只值看20分钟,有的可看5年,有的可保存一辈子,有的将永远不朽。即使是不朽的超级名著,由于我们的精力与时间有限,也必须加以选择。决不要看坏书,对一般书,要学会速读。

读书要多思考。应该想想,作者说得对吗?完全吗?适合今天的情况吗?从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书,带着问题去读,或偏重某一方面去读。这时我们的思维处于主动寻找的地位,就像猎人追找猎物一样主动,很快就能找到答案,或者发现书中的问题。

有的书浏览即止,有的要读出声来,有的要心头记住,有的要笔头记录。对重要的专业书或名著,要勤做笔记,“不动笔墨不读书”。动脑加动手,手脑并用,既可加深理解,又可避忘备查,特别是自己的灵感,更要及时抓住。清代章学诚在《文史通义》中说:“札记之功必不可少,如不札记,则无穷妙绪如雨珠落大海矣。”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物。涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此。曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人。他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关。

王梓坤



目

录

第一编 差分方程概论

- 第1章 引言 //3
- 第2章 线性差分方程概论 //11
 - §1 差分方程 //11
 - §2 关于线性差分方程的解 //13
 - §3 拉格朗日变易常数法 //17
 - §4 常系数齐次线性差分方程的解的
显式表示 //20
 - §5 三项齐次递推式的一般解公式 //24
- 第3章 常系数线性差分方程 //35
 - §1 齐次方程 //35
 - §2 对称型齐次方程 //41
 - §3 常系数线性齐次递归式的
一般解公式 //44
 - §4 一类递推关系式的解的计算公式 //47
 - §5 p 阶递推式的解公式之注 //56
 - §6 非齐次方程 //61
 - §7 特殊的非齐次方程的特解 //65
 - §8 差分方程在结构力学上的应用 //71
 - §9 临界群与二阶差分方程解的多重性 //82
 - §10 联立方程 //92
 - §11 常系数线性差分方程组的一种解法 //98

第4章 变系数线性差分方程 //108

§1 能化成常数系数方程的情形 //108

§2 一阶齐次线性差分方程 //110

§3 Gamma-函数 //113

§4 系数为线性函数的差分方程的定积分解法 //116

第5章 线性偏差分方程 //128

§1 线性偏差分方程的类型 //128

§2 线性偏差分方程的一般解与边界条件 //131

第二编 用变换的眼光看差分方程

第6章 离散信号系统与差分方程 //135

§1 离散信号系统中的差分方程 //135

§2 差分方程解法举例 //139

第7章 Z变换及其性质 //143

§1 引言 //143

§2 Z变换的定义及简单例子 //147

§3 Z变换与拉氏变换的关系 //149

§4 Z变换的性质 //154

§5 性质汇总, Z变换表 //162

§6 反Z变换 //168

§7 反Z变换的求法 //174

§8 Z变换(表续) //189

§9 反Z变换的数字例子 //194

第8章 Z变换的应用 //202

§1 用Z变换解不带右端项的常系数线性差分方程 //202

§2 带右端项的一阶常系数线性差分方程的解 //220

- § 3 带右端项的二阶常系数线性差分方程的解 //232
- § 4 带右端项的 n 阶常系数线性差分方程的解 //265
- § 5 向量型一阶差分方程的解 //282
- § 6 算子法解常系数线性差分方程 //285

第三编 差分方程解的稳定性

第 9 章 差分方程解的稳定性概述 //303

- § 1 用差分方程逼近微分方程 //303
- § 2 差分方程的稳定性概念 //307
- § 3 收敛性作为稳定性的推论 //311
- § 4 脉冲差分方程的两度量稳定性 //314
- § 5 一类二阶中立型差分方程正解的渐近稳定性 //320
- § 6 微分差分方程解的稳定性 //327
- § 7 微分差分方程解的有界性与稳定性 //338

第 10 章 差分方程的解收敛于微分方程的解 //355

- § 1 基本定义 //355
- § 2 收敛定理 //365
- § 3 所得结果的推广 //374

第四编 差分方程的应用

第 11 章 偏微分方程数值解法 //383

- § 1 函数在网格的结点上的值与拉普拉斯算子
及双调和算子之间的关系 //383
- § 2 差分方程的边值条件 //409

第 12 章	苏联数学家在解偏微分方程的差分方法方面的工作	//415
第 13 章	研究某类差分方程收敛性的一个方法	//425
第 14 章	差分方程在衬砌边值问题的应用	//448
§ 1	概述, 衬砌边值问题的建立	//448
§ 2	边值问题与变分问题解的一致性	//459
§ 3	边值问题解的唯一性	//467
§ 4	共轭边值问题的格林函数关系式与变位公式	//469
第 15 章	衬砌边值问题的数值解法	//476
§ 1	差分方程式的导出	//476
§ 2	差分方程解的存在唯一性	//494
§ 3	边值问题解的存在性, 差分方程解向边值问题解的收敛性	//501
§ 4	一般衬砌计算的补充说明	//506
第 16 章	三阶线性变系数方程初边值问题的差分方程	//522
§ 1	引言	//522
§ 2	一维固结问题的差分格式	//523
§ 3	差分格式的稳定性	//527
§ 4	截断误差与相容性	//529
§ 5	隐式差分方程的解法	//531
第 17 章	差分方程在其他领域的应用	//534
§ 1	代数几何的领域的应用	//534
§ 2	涉及差分算子的正纯函数的唯一性	//536
第 18 章	差分方程解的性质研究	//547
§ 1	一阶时滞差分方程的振动性	//547

§ 1.1	基本概念	//547
§ 1.2	差分算子	//550
§ 1.3	常系数差分方程	//552
§ 1.4	变系数差分方程(I)	//559
§ 1.5	变系数差分方程(II)	//565
§ 1.6	频率测度与振动	//567
§ 1.7	线性化振动	//575
§ 1.8	非线性差分方程的振动性	//584
§ 1.9	振动解的渐近性	//596
§ 1.10	注记	//602
§ 2	二阶非线性差分方程的振动定理	//625
§ 3	一阶中立型差分方程非振动解的分类	//633
§ 4	二阶超线性差分方程周期解与次调和解的存在性	//644
§ 5	正则线性差分方程	//662
§ 6	二阶差分方程非振动解的渐近性态	//681
§ 7	非线性高阶差分方程的振动性	//698
§ 8	差分系统的渐近稳定性定理及渐近稳定性区域	//715
§ 9	常差分方程奇异摄动问题的渐近方法	//726
§ 10	差分方程奇异摄动问题的渐近解	//740
§ 11	高阶非线性差分方程的振动性	//750
§ 12	一类非线性差分方程的振动性	//765
§ 13	一类高阶非线性中立型差分方程组非振动解的存在性	//770
§ 14	具连续变量的偶数阶中立型差分方程的振动性	//781
§ 15	平方 Logistic 方程的全局吸收性	//785

- § 16 Michaelis-Menton 型差分方程正解的渐近性 //797
- § 17 一类非自治时滞差分方程的全局吸引性
及其应用 //808
- § 18 一类时滞差分方程的全局吸引性及其应用 //818
- § 19 非线性时滞差分方程的全局渐近稳定性 //829
- § 20 一类非线性时滞差分方程的全局吸引性 //839
- § 21 某类差分方程零解的全局吸引性及其应用 //857

附录 递推数列若干初等问题

- 附录 1 基本的数列之性质 //869
- 附录 2 周期性数列 //886
- 附录 3 数列中的不等关系 //895
- 附录 4 递推数列的性质 //903
- 附录 5 递推数列 //920

第一编

差分方程概论
