专业学位硕士联考应试精点系列

ZhuanYe XueWei ShuoShiLianKao YingShi JingDian XiLie

鑫全工作室

MBA MPA MPAcc

第7版

杨 洁 王苁宇 主编

联考 数学精点

② 强化分册

赠送：

价值1980元的全程学习备考课程

LIANKAO 2018版 SHUXUEJINGDIAN

适用专业：MBA / MPA / MPAcc / 审计

工程管理 / 旅游管理 / 图书情报

科学讲解基本知识点，提供经典考题分析

精讲精练常见考点，直击快速解题技巧

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

专业学位硕士联考应试精点系列

ZhuanYe XueWei ShuoShiLianKao YingShi JingDian XiLie

鑫全工作室

MBA MPA MPAcc

第7版

联考·数学精点

②强化分册

鑫全工作室图书策划委员会·编

主编：杨　洁　王苁宇

参编：刘青春　官　飞　杨宗举

刘国辉　赵令杰 等

LIANKAO 2018版 SHUXUE JINGDIAN

机械工业出版社

CHINA MACHINE PRESS

目 录

第三篇 强化攻略篇

第四篇　模考冲刺篇

第五篇　考场增分策略篇

第三篇 强化攻略篇

建议学习时间：6月~11月（备考强化阶段）

战略目标：熟练、灵活使用各种方法，快速、准确解题，达到高分、满分水准.

具体目标一：精准掌握数学考试的命题轨迹与解题思路；

具体目标二：精准掌握数学考试全部知识、命题角度与相应的解题技巧，做到“胸有陈题”；

具体目标三：形成系统的解题“条件反射系统”.

特别提示：

提示一：“强化攻略篇”将真题分门别类，构建了命题套路和解题套路；

提示二：“强化攻略篇”的知识点也可用于考前回顾；

提示三：强化阶段的学习交流会、“面试式”讨论与辩论会是实现目标的有效方法.

学法导航：

第一步：学习9个攻略章节的第一部分内容，基本实现目标一；

第二步：学习9个攻略章节的第二、三、四部分内容，全面实现目标一、目标二；

第三步：学习9个攻略章节的第五部分内容，全面实现目标一、目标二、目标三；

第四步：总结、分析前三步的学习内容，适当复习“基础夯实篇”，积累错题本，把书“越学越薄”.

攻略一

数与运算

一、备考攻略综述

大纲表述

(一)算术

1. 整数

(1)整数及其运算

(2)整除、公倍数、公约数

(3)奇数、偶数

(4)质数、合数

2. 分数、小数、百分数

命题轨迹

十几年来,考题都集中在实数的理解与运算技巧、有理数与无理数的线性零和、整除分析、质因数分析、奇偶分析、组合最值等方向,但命题素材来源于基本概念、定理,语言与模式相对比较固定. 考生只要在备考与实战中抓住这点,做好相应的准备,就可以稳操胜券.

备考提示

为彻底解决联考中数与运算,考生第一要搞懂并熟记相关概念,第二要重点掌握质数、整除、倍约等内容,最后要熟练掌握本章的技巧点拨的内容.

二、知识点

实　数

(1)有理数与无理数统称为实数.

(2)数轴上的点与实数存在一一对应的关系.

(3)任意两实数的和、差、积、商(除数不为0)仍是实数,即实数的四则运算具有封闭性.

(4)对任意实数 x 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数; $\{x\}=x-[x]$ 表示实数 x 的小数部分.

(5)实数的分类

$$实数\begin{cases}有理数\\无理数\end{cases}\qquad 实数\begin{cases}正实数\\0\\负实数\end{cases}$$

(6)有理数与无理数的混合运算

1)有理数之间进行四则运算(除法中分母要有意义)所得结果仍为有理数.

2)有理数和无理数进行四则运算以及无理数与无理数进行四则运算要分类讨论.

无理数

(1)凡不能写成 $m=\dfrac{p}{q}$(p,q 为非零整数)的数 m 都是无理数.

(2)任意两无理数的和、差、积、商(除数不为零)不一定是无理数.

有理数

(1)凡是能写成 $m=\dfrac{p}{q}$(p,q 为非零整数)的数 m 都是有理数.

(2)任意两有理数的和、差、积、商(除数不为零)仍为有理数.

(3)有理数与无理数的混合运算中,和、差一定为无理数,积、商(除数不为零)不确定.

分数

分数的四则运算"先通分,后约分",最终化为最简分数(【注】通分找分母的最小公倍数. 约分找分子与分母的最大公约数,最简分数为分子、分母互质.)

整数

(1)整数的分类

$$整数\begin{cases}正整数\\0\\负整数\end{cases}\qquad 整数\begin{cases}奇数\\偶数\end{cases}$$

(2)奇数与偶数

1)奇数的定义:不能被2整除的整数叫作奇数,常设为 $2k+1$ 或 $2k-1$. ($k\in\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}$ 为整数集)

2)偶数的定义:能被2整除的整数叫作偶数,常设为 $2k$. ($k\in\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}$ 为整数集)

3)奇偶分析

在乘法中偶数具有同化作用:

奇×奇=奇　　偶×偶=偶　　奇×偶=偶

在加减法中遵守"同为偶,异为奇":

奇±奇=偶　　偶±偶=偶　　奇±偶=奇

若 x,y 为整数,则 $x+y$ 与 $x-y$ 奇偶性一致;

若 $\sqrt{x\pm y}$为整数,则 $x\pm y$ 与 $\sqrt{x\pm y}$奇偶性一致.

正整数

(1)正整数的分类

$$正整数\begin{cases}质数\\合数\\1\end{cases}$$

(2)质数与合数

1)质数与合数的定义:一个大于 1 的正整数,如果它的正因数只有 1 和它本身,则称这个整数为质数(或素数);一个大于 1 的整数,如果除了 1 和它本身,还有其他正因数,则称这个整数是合数(或复合数).

2)质数与合数的性质

质数的性质:任意一个整数与一质数要么互质,要么是这一质数的倍数;若质数 P 整除 $a_1\cdots a_n$,则质数 P 至少能整除 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中的一个,最小的"偶"质数为 2,最小的"奇"质数为 3.

常见的质数有"2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,73,79,83,89,97,…"

合数的性质:最小的合数为 4.

【注】"1"既不是质数,也不是合数;

"2"是质数中唯一的偶数.

(3)倍约与除余

1)若 a 能整除 N,则 N 叫作 a 的倍数,a 叫作 N 的约数.

2)a 与 b 的最小公倍数与最大公约数分别记为$[a,b]$,(a,b).

求法如下:

方法一:多元短除法.

方法二:质因数分解法.

方法三:辗转相除法.

两者之间的关系为$(a,b)[a,b]=ab$;$[a,b]$为(a,b)的倍数.

3)整除:若 a 除 N 没有余数,则称 a 整除 N,记为 $a\mid N$.

整除的性质

传递性:如果 a 是 b 的倍数,b 是 c 的倍数,那么 a 是 c 的倍数.

线性性质:如果 a 是 c 的倍数,b 是 c 的倍数,那么对于任意的整数 m,n,线性和(差)$ma+nb$ 都是 c 的倍数.

4)将带余除法转化为整除:若 a 除以 b 余 c,则 $a-c$ 能被 b 整除.

5)互质的概念:若 a 与 b 的最大公约数是 1,那么称 a 与 b 互质.

6)质因数分解:任意正整数都能唯一分解为质因数之积.

即 $N=P_1^{m_1}P_2^{m_2}\cdots P_n^{m_n}$,则约数个数为$(m_1+1)(m_2+1)\cdots(m_n+1)$.

三、技巧点拨

无限循环小数化分数

无限循环小数可以化为分数,如:$0.\dot{4}=\frac{4}{9}$.

方法如下:设 $x=0.\dot{4}=0.44444\cdots$

则 $10x=4.\dot{4}=4.44444\cdots$

两式相减:$9x=4\Rightarrow x=\frac{4}{9}$.

倍约个数

设 a,b 是任意两个正整数,则有以下结论:

(1) 从 1 到 N 个自然数中,能被 a 和 b 整除的数的个数为:

$n=\left[\frac{N}{a\text{与}b\text{的最小公倍数}}\right]$.

(2) 从 1 到 N 个自然数中,能被 a 或 b 整除的数的个数为:

$n=\left[\frac{N}{a}\right]+\left[\frac{N}{b}\right]-\left[\frac{N}{a\text{与}b\text{的最小公倍数}}\right]$.

则与 a 或 b 互质的数的个数为:$P=N-n$.

阶乘串零

本技巧主要解决 $M!$ 的末尾有多少个零.

第一步:分析乘积末尾零的形成机理.

① 质因数 2,5 之积为 10.

② 质因数分解后看 2,5 的次方 m_2,m_5.

③ 乘积末尾零的个数 n 公式:$n=m_5$(因为质因数分解中 2 的次方大于等于 5 的次方).

第二步:分析 $M!$阶乘的某个质因数 5 的次方 m_5.

"次方原理":$M!=1\times2\times3\times\cdots\times M$

$m_5=\left[\frac{M}{5}\right]+\left[\frac{M}{5^2}\right]+\left[\frac{M}{5^3}\right]+\cdots$

第三步:$M!$末尾零的个数 n 的最后实战公式:

$n=m_5=\left[\frac{M}{5}\right]+\left[\frac{M}{5^2}\right]+\left[\frac{M}{5^3}\right]+\cdots$

组合最值

组合最值是这样的一类问题:

(1)几个正数的和一定,求积的最值.

(2)几个正数的积一定,求和的最值.

有时,还会附加一些条件,如:这几个正数都大于2.

联考数学常见的组合最值的命题模式如下.

模式一:若 n 个参数(皆为正整数)之积等于定值,和的最值求解原则

① 要使得这 n 个参数之和最大,则应尽可能让一个参数极端大,其余参数尽可能小.

② 要使得这 n 个参数之和最小,则应尽可能让这几个参数接近.

实战示范(加深理解):

$$ab=12\begin{cases}ab=1\times12\Rightarrow a+b=13(\text{越极端,和越大})\\ab=2\times6\Rightarrow a+b=8\\ab=3\times4\Rightarrow a+b=7(\text{越接近,和越小})\end{cases}$$

$$abc=12\begin{cases}abc=1\times1\times12\Rightarrow a+b+c=14(\text{越极端,和越大})\\abc=1\times2\times6\Rightarrow a+b+c=9\\abc=1\times3\times4\Rightarrow a+b+c=8\\abc=2\times2\times3\Rightarrow a+b+c=7(\text{越接近,和越小})\end{cases}$$

模式二:若 n 个参数(皆为正整数)之和等于定值,积的最值求解原则

① 要使得这 n 个参数之积最大,则应尽可能让这 n 个参数接近.

② 要使得这 n 个参数之积最小,则应尽可能让一个参数极端大,其余参数尽可能小.

实战示范(加深理解):

$$a+b=5\Rightarrow\begin{cases}a+b=1+4\Rightarrow ab=4(\text{越极端,积越小})\\a+b=2+3\Rightarrow ab=6(\text{越接近,积越大})\end{cases}$$

$$a+b+c=5\Rightarrow\begin{cases}a+b+c=1+1+3\Rightarrow abc=3(\text{越极端,积越小})\\a+b+c=1+2+2\Rightarrow abc=4(\text{越接近,积越大})\end{cases}$$

长串公式化简

主要用于长串数学加减乘除抵消化简

(1)分数型裂项.
$$\begin{cases}\dfrac{1}{n(n+k)}=\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+k}\right)\\\dfrac{1}{1+2+\cdots+n}=2\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)\\\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]\end{cases}$$

$$S=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}(\text{理论依据})$$

$$S=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{n+1}$$

拓展：$S=\dfrac{1}{m(m+k)}+\dfrac{1}{(m+k)(m+2k)}+\cdots$

$a_n=\dfrac{1}{n(n+k)}=\dfrac{1}{k}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+k}\right)$（理论依据）

$S=\dfrac{1}{k}\left[\left(\dfrac{1}{m}-\dfrac{1}{m+k}\right)+\left(\dfrac{1}{m+k}-\dfrac{1}{m+2k}\right)+\cdots\right]$

（2）根式型裂项.$\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+k}}=\dfrac{1}{k}(\sqrt{n+k}-\sqrt{n})$

$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

$=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

$=\sqrt{n+1}-1$

（3）排列型裂项.$\dfrac{n-1}{n!}=\dfrac{1}{(n-1)!}-\dfrac{1}{n!}$

$S=\dfrac{1}{2!}+\dfrac{2}{3!}+\cdots+\dfrac{n-1}{n!}$

$a_n=\dfrac{n-1}{n!}=\dfrac{1}{(n-1)!}-\dfrac{1}{n!}$（理论依据）

$S=\left(1-\dfrac{1}{2!}\right)+\left(\dfrac{1}{2!}-\dfrac{1}{3!}\right)+\cdots+\left[\dfrac{1}{(n-1)!}-\dfrac{1}{n!}\right]=1-\dfrac{1}{n!}$

（4）平方差裂项.$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$S=\left(1-\dfrac{1}{4}\right)\left(1-\dfrac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{10000}\right)$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$（理论依据）

$1-\dfrac{1}{n^2}=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$（实战应用）

$S=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{2}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\times\cdots\times\left(1-\dfrac{1}{99}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{99}\right)\times\left(1-\dfrac{1}{100}\right)\times\left(1+\dfrac{1}{100}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\cdots\times\dfrac{98}{99}\times\dfrac{100}{99}\times\dfrac{99}{100}\times\dfrac{101}{100}$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{3}{2}\times\dfrac{2}{3}\right)\times\left(\dfrac{4}{3}\times\dfrac{3}{4}\right)\times\cdots\times\left(\dfrac{100}{99}\times\dfrac{99}{100}\right)\times\dfrac{101}{100}$

$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{101}{100}=\dfrac{101}{200}$

$$\begin{aligned}&(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)\cdots\\=&\frac{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)\cdots}{(a-b)}\\=&\frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)\cdots}{a-b}\\=&\frac{(a^4-b^4)(a^4+b^4)(a^8+b^8)\cdots}{a-b}\end{aligned}$$

$$= \frac{(a^8 - b^8)(a^8 + b^8) \cdots}{a - b}$$

$$= \frac{(a^{16} - b^{16}) \cdots}{a - b}$$

四、命题点

实数的运算

例 1 以下命题中错误的一个是(　　).

A. 两个实数的和可能是一个整数

B. 两个实数的差可能是一个有理数

C. 两个无理数的商可能是最小的自然数(分母不为 0)

D. 两个无理数的商可能是一个有理数(分母不为 0)

E. 两个无理数的商可能是一个无理数(分母不为 0)

例 2 以下命题中错误的一个是(　　).

A. 两个无理数的和不一定是无理数

B. 两个无理数的差不一定是无理数

C. 两个无理数的积不一定是无理数

D. 两个无理数的商不一定是无理数(除数不为 0)

E. 两个无理数的和、差、积、商至少有一个是有理数

例 3 以下命题中错误的一个是(　　).

A. 两个有理数的和仍为一个有理数

B. 两个有理数的差仍为一个有理数

C. 两个有理数的积仍为一个有理数

D. 两个有理数的商仍为一个有理数(分母不为 0)

E. 两个无理数的积仍为一个无理数

例 4 以下命题中错误的一个是(　　).

A. 有理数和无理数的和一定是无理数

B. 有理数和无理数的差一定是无理数

C. 有理数和无理数的积一定是无理数

D. 有理数和无理数的积可能是有理数

E. 有理数和无理数的商可能是无理数

例 5 (条件充分性判断)m 是一个整数.

(1) 若 $m = \frac{p}{q}$,其中 p 与 q 为非零整数,且 m^2 是一个整数.

(2) 若 $m = \frac{p}{q}$,其中 p 与 q 为非零整数,且$\frac{2m+4}{3}$ 是一个整数.

例 6 若 x,y 是有理数,且满足:$(1+2\sqrt{3})x+(1-\sqrt{3})y-2+5\sqrt{3}=0$,则 x,y 的值分别为(　　).

A. 1,3 B. $-1,2$ C. $-1,3$ D. 1,2 E. 以上都不对

例 7 一个大于 1 的自然数的算术平方根为 a，则与这个自然数左右相邻的两个自然数的算术平方根分别为( ).

A. $\sqrt{a}-1,\sqrt{a}+1$ B. $a-1,\ a+1$ C. $\sqrt{a-1},\sqrt{a+1}$

D. $\sqrt{a^2-1},\sqrt{a^2+1}$ E. a^2-1,a^2+1

实数的取整

例 8 设 $x=\sqrt{2}+1$，a 是 x 的小数部分，b 是 $-x$ 的小数部分，则 $a^3+b^3+3ab=$( ).

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3 E. 4

例 9 (条件充分性判断) $[a]$，$[b]$，$[c]$ 分别表示不超过 a,b,c 的最大整数，则 $[a-b-c]$ 可以取值的个数是 3 个.

(1) $[a]=5$ $[b]=3$ $[c]=1$. (2) $[a]=5$ $[b]=-3$ $[c]=-1$.

相反数与倒数

例 10 设 a 与 b 之和的倒数的 2013 次方等于 1，a 的相反数与 b 之和的倒数的 2015 次方也等于 1，则 $a^{2013}+b^{2015}=$( ).

A. -1 B. 2 C. 1 D. 0 E. 2^{2013}

分小互化

例 11 $\dfrac{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^8}{0.\dot{1}+0.\dot{2}+0.\dot{3}+\cdots+0.\dot{9}}=$( ).

A. $\dfrac{85}{768}$ B. $\dfrac{85}{512}$ C. $\dfrac{51}{256}$ D. $\dfrac{85}{384}$ E. $\dfrac{51}{512}$

例 12 将 $\dfrac{3456}{9999}$ 化为小数，那么小数点后面 2024 位数之和为( ).

A. 9108 B. 9106 C. 9100 D. 9072 E. 9068

奇偶的设法

例 13 (条件充分性判断) m^2 除以 8 的余数是 1.

(1) m 是奇数. (2) m 是偶数.

奇偶分析

例 14 若 a,b 是正整数，且 $m=ab(a+b)$，则( ).

A. m 一定是奇数 B. m 一定是偶数

C. 只有当 a,b 都是偶数时，m 是偶数 D. 只有当 a,b 一奇一偶时，m 是偶数

E. 只有当 a,b 都是奇数时，m 是偶数

质数

例 15 如果 A,B,C 是三个质数，而且 $A-B=B-C=20$，那么 $3A+2B+C=($ $)$.

A. 33 B. 43 C. 53 D. 158 E. 178

例 16 三名小孩中有一名学龄前儿童(年龄不足 6 岁)，他们的年龄都是质数(素数)，且依次相差 6 岁，他们的年龄之和为( ).

A. 21 B. 27 C. 33 D. 39 E. 51

质因数的分解

例 17 四个不同的正整数 a,b,c,d 满足 $(7-a)(7-b)(7-c)(7-d)=4$，那么 $a+b+c+d=($ $)$.

A. 20 B. 28 C. 18 D. 24 E. 44

例 18 已知 x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 是满足条件 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=-7$ 的不同整数，b 是关于 x 的一元五次方程 $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)=1773$ 的整数根，则 b 的值为( ).

A. 15 B. 17 C. 25 D. 36 E. 38

“奇、偶、质”综合考点

例 19 (条件充分性判断) 若 x,y 是质数，则 $8x+666y=2014$.

(1) $3x+4y$ 是偶数. (2) $3x-4y$ 是 6 的倍数.

例 20 若 $|x-y|+\sqrt{x+y}=a$，且知 x,y,a 均为整数，同时 a 为质数，则方程有( )组解.

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5

约数与倍数

例 21 (条件充分性判断) 存在正整数 a,b，使得 $ab=750$.

(1) a,b 的最大公约数是 35. (2) a,b 的最大公约数是 15.

整除、带余除法

例 22 (条件充分性判断) $\frac{n}{14}$ 是一个整数.

(1) n 是一个整数，且 $\frac{3n}{14}$ 也是一个整数.

(2) n 是一个整数，且 $\frac{n}{7}$ 也是一个整数.

例 23 （条件充分性判断）整数除以 15 的余数为 2.

（1）整数除以 3 的余数是 2. （2）整数除以 5 的余数是 2.

例 24 （条件充分性判断）整数除以 15 的余数为 14.

（1）整数除以 3 的余数是 2. （2）整数除以 5 的余数是 4.

例 25 有一个四位数，它被 122 除余 109，被 121 除余 2，则此四位数的各位数字之和为（ ）.

A. 12 B. 13 C. 14 D. 16 E. 17

组合最值

例 26 （条件充分性判断）$a+b+c+d+e$ 的最大值为 133.

（1）a,b,c,d,e 是大于 1 的自然数，且 $abcde=2700$.

（2）a,b,c,d,e 是大于 1 的自然数，且 $abcde=2000$.

例 27 （条件充分性判断）$abcde$ 的最小值为 256.

（1）a,b,c,d,e 是大于 1 的自然数，且 $a+b+c+d+e=24$.

（2）a,b,c,d,e 是大于 1 的自然数，且 $a+b+c+d+e=23$.

阶乘串零

例 28 （条件充分性判断）$n\geqslant 22$.

（1）$m=1\times2\times3\times\cdots\times99$，其中 m 末尾连续有 n 个零.

（2）$m=11\times12\times13\times\cdots\times109$，其中 m 末尾连续有 n 个零.

长串公式化简

例 29 $\dfrac{(1+3)(1+3^2)(1+3^4)(1+3^8)\cdots(1+3^{32})+\dfrac{1}{2}}{3\times3^2\times3^3\times3^4\times\cdots\times3^{10}}=$（ ）.

A. $\dfrac{1}{2}\times3^{10}+3^{19}$ B. $\dfrac{1}{2}+3^{19}$ C. $\dfrac{1}{2}\times3^{19}$

D. $\dfrac{1}{2}\times3^{9}$ E. 以上都不对

例 30 $1-\dfrac{2}{1\times(1+2)}-\dfrac{3}{(1+2)(1+2+3)}-\dfrac{4}{(1+2+3)(1+2+3+4)}-\cdots-\dfrac{10}{(1+2+\cdots+9)(1+2+\cdots+10)}=$（ ）.

A. $\dfrac{1}{45}$ B. $\dfrac{1}{55}$ C. $\dfrac{1}{65}$ D. $\dfrac{7}{60}$ E. $\dfrac{7}{75}$

例 31 $\dfrac{\log_7(1+7^2)+\log_7(1+7^4)+\log_7(1+7^8)+\cdots+\log_7(1+7^{32})+\log_{\frac{1}{7}}\left(\dfrac{7^{64}-1}{48}\right)}{\log_3(3\times3^2\times3^3\times3^4\times\cdots\times3^{10})}=$

（　　）.

A. $\log_7 48$　　B. $\log_7 8$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. 0　　E. 以上都不对

命题点答案及解析

例 1 解析　C 是错误的. 反证法：两个无理数的商如果是最小的自然数 0（分母不等于零），则被除数为 0，0 不是无理数，矛盾！故 C 是错误的.

例 2 解析　E 是错误的. 反例：$a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{3}$，a 与 b 的和、差、积、商都是无理数.

例 3 解析　E 是错误的. 反例：两个无理数 $3+\sqrt{2}$ 与 $3-\sqrt{2}$ 之积为有理数 7. 其他都正确.

例 4 解析　C 是错误的. 反例：$a=0$，$b=\sqrt{2}+\sqrt{3}\Rightarrow ab=0$ 是有理数.

例 5 解析　条件（1）是充分条件，推导：

根据 $m=\frac{p}{q}$，其中 p 和 q 为非零整数，可知 m 是有理数.

又因为 m^2 是一个整数，四种有理数（整数、分数、有限小数、无限循环小数）中，只有整数的平方才是整数，故 m 是一个整数.

条件（2）不是充分条件，推导：

根据 $m=\frac{p}{q}$，其中 p 和 q 为非零整数，可知 m 是有理数.

又因为 $\frac{2m+4}{3}$ 是一个整数，则 $\frac{2m+4}{3}=k$（k 为整数），$m=k-2+\frac{k}{2}$.

当 k 为偶数时，m 是一个整数.

当 k 为奇数时，m 不是一个整数.

综上所述，答案是 A.

例 6 解析　$(1+2\sqrt{3})x+(1-\sqrt{3})y-2+5\sqrt{3}=0$

$\Rightarrow(2x-y+5)\sqrt{3}+(x+y-2)=0$.

$\Rightarrow\begin{cases}2x-y+5=0\\x+y-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-1\\y=3\end{cases}$.

综上所述，答案是 C.

例 7 解析　设该大于 1 的自然数为 x，$\sqrt{x}=a$，$x=a^2$.

这个自然数左右相邻的两个自然数分别为 a^2-1，a^2+1，其算术平方根分别为 $\sqrt{a^2-1}$，$\sqrt{a^2+1}$.

综上所述，答案是 D.

例 8 解析　$a=x-[x]=\sqrt{2}+1-2=\sqrt{2}-1$，

$b=-x-[-x]=-\sqrt{2}-1-(-3)=2-\sqrt{2}$，