普通高等教育基础课规划教材

下册

微积分
同步学习指导

钟漫如 编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育基础课规划教材

微积分同步学习指导

下　册

钟漫如　编

机 械 工 业 出 版 社

本书是理工科微积分或高等数学课程的学习指导书，以与学过的知识“同步”的方式解答问题。对于初学者来说，“同步”的方式可以帮助他们更好地理解和巩固当时所学的知识。为了达到同步学习的目的，编者选择了机械工业出版社出版的由陈一宏、张润琦主编的《微积分》（上、下册）作为配套主教材，本书与主教材一致，也分为上、下册，上册内容包括函数的极限与连续、导数与微分、微分中值定理及其应用、一元函数积分学及常微分方程，下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分和曲面积分及级数。

考虑到读者在阶段复习时已经具备了用更多的知识解决问题的能力，书中有些题采用一题多解，但在编排上把“同步”的解法始终放在“法1”中解答。因此，本书也可以作为准备报考硕士研究生的考生考前综合复习的参考书。

配套教材是依据教育部颁布的《高等数学课程教学基本要求》编写的，因而使用其他教材的读者选择本书也是适合的。

图书在版编目（CIP）数据

微积分同步学习指导. 下册/钟漫如编. —北京：机械工业出版社，2017. 7

普通高等教育基础课规划教材

ISBN 978-7-111-56501-7

Ⅰ. ①微…　Ⅱ. ①钟…　Ⅲ. ①微积分－高等学校－教学参考资料　Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 069744 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：郑　玫　责任编辑：郑　玫　李　乐
责任校对：张晓蓉　封面设计：路恩中
责任印制：孙　炜
保定市中画美凯印刷有限公司印刷
2017 年10月第 1 版第 1 次印刷
190mm×210mm · 13 印张 · 434 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-56501-7
定价：38.00元

前 言

微积分或高等数学是高等院校非数学专业理工科学生的一门重要的基础课，学好这门课程对后续课程以及专业课程的学习有着很大的帮助.

由于微积分内容多、课时紧，要想学好这门课程，解题指导是重要的、不可或缺的一个环节，为了帮助学生厘清概念，抓住重点，系统地掌握微积分的思想、方法和技巧，编者根据近 30 年微积分课程的教学经验，编写了这套《微积分同步学习指导》(上、下册).

一本指导书如果没有把解题的方法与学生当时是否具备相关的知识联系起来，就会事倍功半.因为对一个初学者来说，他是无法知道自己能否用之前学习的知识来解决目前的问题，会在看解答之前苦思冥想，浪费很多时间. 更糟糕的是，当自己解决不了问题时，会对自己的能力产生怀疑——这是学好这门课程最忌讳的一点. 本书在解题时充分考虑了这个问题，以与学过的知识“同步”的方式解答问题，同时又考虑到读者在阶段复习时可以用更多的知识解决问题，开阔思路，书中有些题采用了一题多解，在编排上把“同步”的解法始终放在“法 1”中解答，其他解法放在“法 1”之后.

为了达到同步学习的目的，编者选择了机械工业出版社出版的由陈一宏、张润琦主编的《微积分》(上、下册) 作为配套主教材 (简称主教材)，主教材每节的习题难易适中、理论与计算兼有，内容丰富全面. 本书按照“熟练掌握、掌握、理解、会、了解”列出了各章内容学习的程度，同时以主要篇幅对每章所有习题 (除主教材标有“ * ”号的内容外) 进行分析和详细解答，并提示数学思维的过程，总结解题规律，从而起到对理论教学内容的消化和巩固的作用. 对于使用其他主教材的初学者来说，本书可以起到同样的作用，因为所有的理工科高等数学课程都是依据教育部颁布的《高等数学课程教学基本要求》编写的，只是在内容的编排顺序上略有不同而已. 初学者选择此书可得事半功倍之效.

本书既可以作为微积分初学者的学习指导书，同时也可以作为准备报考硕士研究生的考生考前综合复习的参考书. 主教材每一章最后一节为“综合例题”，精选了一些历年研究生考题中的综合题来讲解，同时配置了难度深、综合性强的习题，本书对这部分习题也进行了详细的解答，目的在于对理论教学内容的学习起到深入和提高的作用.

由于主教材中习题较多，受篇幅所限，本书只能从其每节的习题中挑选较难或具有代表性的题作为典型例题，同时为了便于读者参考，本书保持了主教材原有的习题顺序，典型例题只标出题号.

为了能够检验读者掌握的程度，每一节内容都为读者精选了自测题，并为自测题提供了详细的解答.

为了解答过程的连贯性，本书根据需要，对一些知识点或公式在解答之后用【注】列出；为了节省篇幅，有些题一题多解时，重复的步骤放在【续】中.

本书的特色：一是解题方法与所学内容完全同步；二是对习题的解题思路进行总结，对习题中容易出现的问题进行分析，所做的提示是直接针对实际题目提出的.

为了与主教材配套并方便使用，《微积分同步学习指导》也分为上、下两册.

由于编者水平有限，书中不足和错误在所难免，恳请广大读者批评指正.

编　者

2016 年春 于北京理工大学

目 录

第 6 章 向量代数与空间解析几何

一、学习要求

1. 理解空间直角坐标系、向量的概念及其表示.

2. 掌握单位向量、向量的模、方向余弦及向量的坐标表达式，以及用坐标表达式进行向量运算的方法.

3. 掌握向量的运算（线性运算、数量积、向量积、混合积），了解两个向量垂直、平行的条件及三个向量共面的条件.

4. 掌握空间平面的方程和空间直线的方程及其求法，会利用平面、直线的相互关系解决有关的问题.

5. 理解曲面方程的概念，了解常用二次曲面的方程及其图形，会求以坐标轴为旋转轴的旋转曲面方程及母线平行于坐标轴的柱面方程.

6. 了解空间曲线的参数方程和一般方程.

7. 会求曲面的交线在坐标平面上的投影.

二、典型例题

6.1 空间直角坐标系

P3 第 4 题、P3 第 5 题、P3 第 6 题.

6.2 向量及其线性运算

P3 第 1 题、P4 第 5 题、P5 第 8 题、P5 第 11 题、P6 第 13 题、P6 第 14 题.

6.3 向量的乘积

P8 第 6 题、P8 第 7 题、P9 第 9 题、P9 第 10 题、P10 第 13 题、P10 第 14 题、P11 第 17 题.

6.4 平面的方程

P12 第 1 题、P13 第 4 题、P13 第 5 题、P14 第 8 题、P14 第 9 题、P16 第 13 题、P17 第 15 题.

6.5 空间直线的方程

P19 第 1 题、P20 第 3 题、P20 第 5 题、P21 第 8 题、P21 第 9 题、P24 第 16 题、P25 第 19 题.

6.6 空间曲面与空间曲线

P25 第 2 题、P26 第 4 题、P27 第 6 题、P27 第 7 题、P27 第 9 题.

6.7 二次曲面

P27 第 1 题.

6.8 综合例题

P32 第 5 题、P32 第 6 题、P33 第 9 题、P34 第 10 题、P36 第 15 题、P37 第 16 题、P38 第 17 题、P39 第 20 题.

三、习题及解答

6.1 空间直角坐标系

1. 指出下列各点在空间直角坐标系中的位置.

$A(1,\ -2,\ 3)$, $B(2,\ 3,\ -4)$, $C(2,\ -3,\ -4)$, $D(-2,\ -3,\ 1)$, $E(3,\ 4,\ 0)$, $F(0,\ 4,\ -1)$, $G(0,\ 0,\ 3)$, $H(0,\ -2,\ 0)$.

【解】 按顺序分别在第Ⅳ卦限、第Ⅴ卦限、第Ⅷ卦限、第Ⅲ卦限、xOy 平面、yOz 平面、z 轴、y 轴上.

2. 求点 $(2,\ -1,\ 3)$ 关于原点、各坐标轴及各坐标面的对称点的坐标.

【解】 关于原点对称的点为 $(-2,\ 1,\ -3)$,
关于 x 轴对称的点为 $(2,\ 1,\ -3)$,
关于 y 轴对称的点为 $(-2,\ -1,\ -3)$,
关于 z 轴对称的点为 $(-2,\ 1,\ 3)$,
关于 xOy 面对称的点为 $(2,\ -1,\ -3)$,
关于 yOz 面对称的点为 $(-2,\ -1,\ 3)$,

关于 zOx 面对称的点为 (2, 1, 3).

3. 求点 $M(4, -3, 5)$ 到各坐标轴的距离.

【解】 M 到 x 轴的距离 $D_x=\sqrt{0^2+(-3)^2+5^2}=\sqrt{34}$,

M 到 y 轴的距离 $D_y=\sqrt{4^2+0^2+5^2}=\sqrt{41}$,

M 到 z 轴的距离 $D_z=\sqrt{4^2+(-3)^2+0^2}=5$.

4. 证明：以 $A(4, 1, 9)$、$B(10, -1, 6)$、$C(2, 4, 3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

【证明】 $|AB|=\sqrt{(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2}=7$,

$|AC|=\sqrt{(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2}=7$.

法 1：$|BC|=\sqrt{(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2}=\sqrt{98}$,

因为 $|BC|^2=|AB|^2+|AC|^2$；(转续)

法 2：$\overrightarrow{AB}=\{6, -2, -3\}$，$\overrightarrow{AC}=\{-2, 3, -6\}$,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，即 $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}$,

【续】 $|AB|=|AC|$，所以 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

5. 在 z 轴上求与点 $A(-4, 1, 7)$ 和 $B(3, 5, -2)$ 等距离的点.

【解】 设所求点为 $M(0, 0, z)$，由于 $|AM|=|BM|$，故

$$(0+4)^2+(0-1)^2+(z-7)^2=(0-3)^2+(0-5)^2+(z+2)^2,$$

解得 $z=\dfrac{14}{9}$，故所求点为 $M\left(0, 0, \dfrac{14}{9}\right)$.

6. 在 yOz 平面上求与点 $A(3, 1, 2)$、$B(4, -2, -2)$ 和 $C(0, 5, 1)$ 等距离的点.

【解】 设所求点为 $M(0, y, z)$，由于 $|AM|=|BM|=|CM|$，故

$$(0-3)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=(0-4)^2+(y+2)^2+(z+2)^2,$$

$$(0-0)^2+(y-5)^2+(z-1)^2=(0-4)^2+(y+2)^2+(z+2)^2,$$

解得 $y=1$，$z=-2$，故所求点为 $M(0, 1, -2)$.

6.2 向量及其线性运算

1. 已知向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角 $\theta=60°$，且 $|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=8$，计算 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 和 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

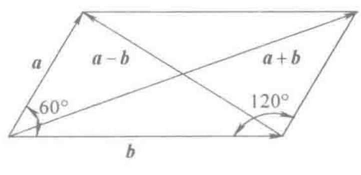

图 6-1

【解】 法 1：如图 6-1 所示，由余弦定理得

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{5^2+8^2-2\times5\times8\times\cos120^\circ}=\sqrt{129},$$

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{5^2+8^2-2\times5\times8\times\cos60^\circ}=7.$$

法 2：$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{5^2+8^2+2\times5\times8\times\cos60^\circ}=\sqrt{129},$

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2}=\sqrt{5^2+8^2-2\times5\times8\times\cos60^\circ}=7.$$

2. 试用向量证明：如果平面上一个四边形的对角线互相平分，则它是平行四边形.

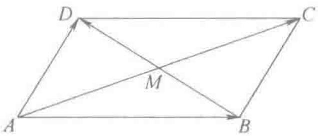

图 6-2

【证明】 如图 6-2 所示，设对角线相交于 M，则 $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$，$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{MD}$，

故 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}$，即该四边形是平行四边形.

3. 正六边形 $ABCDEF$（字母按逆时针方向排列），设 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AE}=\boldsymbol{b}$，试用向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 表示向量 $\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{AF}$ 和 $\overrightarrow{CB}$.

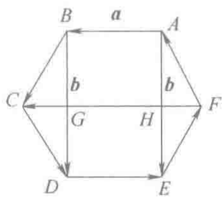

图 6-3

【解】 如图 6-3 所示，由图得

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GC}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=\frac{3}{2}\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b},$$

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HF}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a},$$

$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GB}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}.$$

4. 设向量 $\overrightarrow{AB}=8\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k}$，其中点 A 的坐标为（2，−1，7），求点 B 的坐标.

【解】 设点 B 的坐标为（x，y，z），故

$$\overrightarrow{AB}=(x-2)\boldsymbol{i}+(y+1)\boldsymbol{j}+(z-7)\boldsymbol{k}=8\boldsymbol{i}+9\boldsymbol{j}-12\boldsymbol{k},$$

即 $x-2=8$，$y+1=9$，$z-7=-12$，解得 $x=10$，$y=8$，$z=-5$，

故点 B 的坐标为（10，8，−5）.

5. 求平行于向量 $\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$ 的单位向量.

【解】 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{6^2+7^2+(-6)^2}=11,$

故所求的单位向量 $\boldsymbol{b}=\pm\boldsymbol{a}^0=\pm\left(\frac{6}{11}\boldsymbol{i}+\frac{7}{11}\boldsymbol{j}-\frac{6}{11}\boldsymbol{k}\right).$

6. 已知向量 $\boldsymbol{a}=\{1,-2,3\}$，$\boldsymbol{b}=\{-4,5,8\}$，$\boldsymbol{c}=\{-2,1,0\}$，求向量 $\boldsymbol{d}$，使 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}$ 是零向量.

【解】 因 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{d}=-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=\{5,-4,-11\}$.

7. 证明：三点 $A(1,0,-1)$，$B(3,4,5)$，$C(0,-2,-4)$

共线.

【证明】 $\overrightarrow{AB}=\{2,4,6\}$，$\overrightarrow{BC}=\{-3,-6,-9\}$，

因为$\overrightarrow{AB}=-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$，故三点共线.

8. 设向量 $\boldsymbol{m}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{n}=2\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}-7\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{p}=5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，求向量 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}$ 在 x 轴上的投影.

【解】 $\boldsymbol{a}=4\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}=13\boldsymbol{i}+7\boldsymbol{j}+15\boldsymbol{k}$，

故向量 $\boldsymbol{a}$ 在 x 轴上的投影为 13.

9. 设点 $A(3,2,-1)$，$B(5,-4,7)$，$C(-1,1,2)$，求 $\triangle ABC$ 的由点 C 向 AB 边所引的中线的长度.

【解】 设点 A，B 的中点为 $M(x,y,z)$，则

$$x=\frac{3+5}{2}=4,\quad y=\frac{-4+2}{2}=-1,\quad z=\frac{-1+7}{2}=3,$$

故 $|CM|=\sqrt{(4+1)^2+(-1-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{30}$.

10. 设点 A，B，M 在同一直线上，$A(1,2,3)$，$B(-1,2,3)$，且 $AM:MB=-\dfrac{3}{2}$，求点 M 的坐标.

【解】 由点 A，B 的坐标及点 A，B，M 在同一直线上，可设点 M 的坐标为 $(x,2,3)$，

由于 $AM:MB=-\dfrac{3}{2}$，所以有$\dfrac{x-1}{-1-x}=-\dfrac{3}{2}$，解得 $x=-5$，

故所求点 M 的坐标为 $(-5,2,3)$.

11. 已知点 $M(4,\sqrt{2},1)$，$N(3,0,2)$，计算向量$\overrightarrow{MN}$的模、方向余弦和方向角.

【解】 $\overrightarrow{MN}=(3-4)\boldsymbol{i}+(0-\sqrt{2})\boldsymbol{j}+(2-1)\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{i}-\sqrt{2}\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，

$$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{2})^2+1^2}=2,$$

$$\overrightarrow{MN}^0=-\frac{1}{2}\boldsymbol{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j}+\frac{1}{2}\boldsymbol{k},$$

故 $\cos\alpha=-\dfrac{1}{2},\cos\beta=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\cos\gamma=\dfrac{1}{2}$；从而 $\alpha=\dfrac{2\pi}{3},\beta=\dfrac{3\pi}{4},\gamma=\dfrac{\pi}{3}$.

12. 设一向量与 x 轴和 y 轴的夹角相等，与 z 轴的夹角是前者的两倍，求此向量的方向角.

【解】 由题意得：$\alpha=\beta$，$\gamma=2\alpha$，

因为 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$，

所以 $2\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha=1$，即 $2\cos^2\alpha+(2\cos^2\alpha-1)^2=1$，

解得 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 或 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$，

故所求向量的方向角为

$$\alpha=\frac{\pi}{2},\ \beta=\frac{\pi}{2},\ \gamma=\pi$$

或 $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$，$\beta=\dfrac{\pi}{4}$，$\gamma=\dfrac{\pi}{2}$.

13. 设向量 $\boldsymbol{a}$ 与单位向量 $\boldsymbol{j}$ 成 $60°$ 角，与单位向量 $\boldsymbol{k}$ 成 $120°$ 角，且 $|\boldsymbol{a}|=5\sqrt{2}$，求向量 $\boldsymbol{a}$.

【解】 设向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向角为 α、$60°$、$120°$，则有

$\cos^2\alpha+\cos^2 60°+\cos^2 120°=1$，即 $\cos^2\alpha=\dfrac{1}{2}$，

解得 $\cos\alpha=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故

$$\boldsymbol{a}^0=\{\cos\alpha,\ \cos 60°,\ \cos 120°\}=\left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right\},$$

所以 $\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}^0=5\sqrt{2}\left\{\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right\}=\left\{\pm 5,\dfrac{5\sqrt{2}}{2},-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right\}$.

14. 向量 $\boldsymbol{a}$ 平行于两向量 $\boldsymbol{b}=\{7,\ -4,\ -4\}$ 和 $\boldsymbol{c}=\{-2,\ -1,\ 2\}$ 夹角的平分线，且 $|\boldsymbol{a}|=5\sqrt{6}$，求 $\boldsymbol{a}$.

【解】 因为 $|\boldsymbol{b}|=9$，$|\boldsymbol{c}|=3$，

所以 $\boldsymbol{b}^0=\left\{\dfrac{7}{9},\ -\dfrac{4}{9},\ -\dfrac{4}{9}\right\}$，$\boldsymbol{c}^0=\left\{-\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right\}$，

$$\boldsymbol{b}^0+\boldsymbol{c}^0=\left\{\frac{1}{9},\ -\frac{7}{9},\ \frac{2}{9}\right\},$$

又 $|\boldsymbol{b}^0+\boldsymbol{c}^0|=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，所以 $(\boldsymbol{b}^0+\boldsymbol{c}^0)^0=\left\{\dfrac{1}{3\sqrt{6}},\ -\dfrac{7}{3\sqrt{6}},\ \dfrac{2}{3\sqrt{6}}\right\}$，

故 $\boldsymbol{a}=\pm 5\sqrt{6}\left\{\dfrac{1}{3\sqrt{6}},\ -\dfrac{7}{3\sqrt{6}},\ \dfrac{2}{3\sqrt{6}}\right\}=\pm\left\{\dfrac{5}{3},\ -\dfrac{35}{3},\ \dfrac{10}{3}\right\}$.

6.3 向量的乘积

1. 已知 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-4\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，计算（1）$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$；（2）$\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle$；

(3) $(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}}$.

【解】 (1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=1\times1+1\times(-2)+(-4)\times2=-9$,

(2) $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\arccos\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\arccos\dfrac{-9}{\sqrt{18}\times\sqrt{9}}=\dfrac{3\pi}{4}$,

(3) $(\boldsymbol{b})_{\boldsymbol{a}}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}=\dfrac{-9}{\sqrt{18}}=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

2. 在边长为 1 的立方体中，设 OM 为对角线，OA 为棱，求 $(\overrightarrow{OA})_{\overrightarrow{OM}}$.

【解】 法 1：将立方体如图 6-4 所示置于坐标系中，则

$$\overrightarrow{OA}=\{1,0,0\},\ \overrightarrow{OM}=\{1,1,1\},$$

故 $(\overrightarrow{OA})_{\overrightarrow{OM}}=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OM}}{|\overrightarrow{OM}|}=\dfrac{1\times1+0\times1+0\times1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

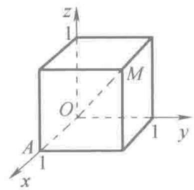

图 6-4

法 2：由几何知识得 $|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{3}$，$(\overrightarrow{OM})_{\overrightarrow{OA}}=1$，

由 $|\overrightarrow{OM}|\ (\overrightarrow{OA})_{\overrightarrow{OM}}=|\overrightarrow{OA}|\ (\overrightarrow{OM})_{\overrightarrow{OA}}$ 得

$$(\overrightarrow{OA})_{\overrightarrow{OM}}=\frac{|\overrightarrow{OA}|\ (\overrightarrow{OM})_{\overrightarrow{OA}}}{|\overrightarrow{OM}|}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3. 将质量为 100kg 的物体从点 $M(3,1,8)$ 沿直线移动到点 $N(1,4,2)$（坐标的单位为 m），计算重力所做的功.

【解】 由题意可得 $\boldsymbol{F}=\{0,0,-100g\}$，$\overrightarrow{MN}=\{-2,3,-6\}$，则

$W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{MN}=0\times(-2)+0\times3+(-100g)\times(-6)=600g$ (J).

4. 设 $|\boldsymbol{a}|=5$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{3}$，求 $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|$.

【解】 $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|^2=(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})\cdot(2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b})=4|\boldsymbol{a}|^2+9|\boldsymbol{b}|^2-12\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$

$=4|\boldsymbol{a}|^2+9|\boldsymbol{b}|^2-12|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=76$,

故 $|2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}|=\sqrt{76}=2\sqrt{19}$.

5. 已知四边形顶点为 $A(2,-3,1)$，$B(1,4,0)$，$C(-4,1,1)$ 和 $D(-5,-5,3)$，证明它的两条对角线 AC 和 BD 互相垂直.

【证明】 因为 $\overrightarrow{AC}=\{-6,4,0\}$，$\overrightarrow{BD}=\{-6,-9,3\}$，

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(-6)\times(-6)+4\times(-9)+0\times3=0,$$

故两条对角线 AC 和 BD 互相垂直.

【注】 两个向量垂直的充要条件是它们的数量积为零. 这个结论会经常用到，要学会利用.

6. 已知向量 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}$，求一向量 $\boldsymbol{p}$，使 $\boldsymbol{p}$ 与 z 轴垂直，且 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{p}=9$，$\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{p}=4$.

【解】 设所求向量 $\boldsymbol{p}=\{x, y, z\}$，由题意得

$$\begin{cases} z=0 \\ 3x-y+5z=9 \\ x+2y-3z=4 \end{cases}，解得 x=\frac{22}{7}，y=\frac{3}{7}，z=0，$$

故所求向量 $\boldsymbol{p}=\left\{\frac{22}{7}, \frac{3}{7}, 0\right\}$.

7. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$，试求 λ 的值，使得：

（1）$\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 z 轴垂直；

（2）$\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 垂直，并证明此时 $|\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 取最小值.

【解】 （1）$\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\{3\lambda+2, 5\lambda+1, -2\lambda+4\}$，

则由 $\{3\lambda+2, 5\lambda+1, -2\lambda+4\}\cdot\{0, 0, 1\}=0$，

得 $-2\lambda+4=0$，即 $\lambda=2$；

（2）由 $\{3\lambda+2, 5\lambda+1, -2\lambda+4\}\cdot\{3, 5, -2\}=0$，得

$3\times(3\lambda+2)+5\times(5\lambda+1)-2(-2\lambda+4)=0$，即 $\lambda=-\frac{3}{38}$，

设 $f(\lambda)=|\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2$，则 $f(\lambda)$ 与 $|\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 有相同的驻点，

又 $f(\lambda)=(3\lambda+2)^2+(5\lambda+1)^2+(-2\lambda+4)^2=38\lambda^2+6\lambda+21$，

$f'(\lambda)=76\lambda+6$，令 $f'(\lambda)=0$，得唯一驻点 $\lambda=-\frac{3}{38}$，

而 $f''(\lambda)=76>0$，故 $|\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 取最小值.

【提示】 求极值或最值时为了便于求出驻点，经常采用改变目标函数的方法，这个技巧在本书的上册 3.4 节第 8 题答案后有详述.

8. 设 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$，求（1）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；（2）$2\boldsymbol{a}\times7\boldsymbol{b}$；（3）$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{a}$.

【解】 （1）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=3\boldsymbol{i}-7\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k}$；

（2）$2\boldsymbol{a}\times7\boldsymbol{b}=14(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\xlongequal{利用(1)}42\boldsymbol{i}-98\boldsymbol{j}-70\boldsymbol{k}$；

（3）$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{a}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}=\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}$.

9. 设 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=5$，$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{4}$，计算以向量 $\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 和 $3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$ 为边的三角形的面积.

【解】 由向量积模的几何意义得

$$\begin{aligned}\text{所求三角形的面积}&=\frac{1}{2}|(\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})\times(3\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})|\xlongequal[\text{反交换律}]{\text{分配律及}}\frac{1}{2}|8\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\\&=4|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\\&=4|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=4\times5\times5\times\sin\frac{\pi}{4}=50\sqrt{2}.\end{aligned}$$

【提示】 本题出错率较高，原因是很多初学者将向量积的反交换律与交换律混淆，即将 $-6\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 错误地计算为 $-6\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$.

10. 求与 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$ 都垂直的单位向量.

【解】 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-1&1\\1&2&-1\end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$,

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=\sqrt{(-1)^2+3^2+5^2}=\sqrt{35},$$

故所求向量为 $\pm\dfrac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|}=\pm\left(-\dfrac{1}{\sqrt{35}}\boldsymbol{i}+\dfrac{3}{\sqrt{35}}\boldsymbol{j}+\dfrac{5}{\sqrt{35}}\boldsymbol{k}\right)$.

11. 已知 $A(1,2,0)$，$B(3,0,-3)$，$C(5,2,6)$，计算 $\triangle ABC$ 的面积.

【解】 $\overrightarrow{AB}=\{2,-2,-3\}$，$\overrightarrow{AC}=\{4,0,6\}$，

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&-2&-3\\4&0&6\end{vmatrix}=-12\boldsymbol{i}-24\boldsymbol{j}+8\boldsymbol{k},$$

故 $\triangle ABC$ 的面积 $=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-12)^2+(-24)^2+8^2}=14$.

12. 试问 λ 为何值时，四点 $(0,-1,-1)$，$(3,0,4)$，$(-2,-2,2)$，$(4,1,\lambda)$ 在一个平面上？

【解】 分别将四点按序记为 A，B，C，D，则

$\overrightarrow{AB}=\{3,1,5\}$，$\overrightarrow{AC}=\{-2,-1,3\}$，$\overrightarrow{AD}=\{4,2,\lambda+1\}$，

由题意知向量 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AD}$ 共面，即 $(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AD}=0$，

亦即 $\begin{vmatrix}3&1&5\\-2&-1&3\\4&2&\lambda+1\end{vmatrix}=-\lambda-7=0$，解得 $\lambda=-7$.

【注】　三个向量共面的充要条件是它们的混合积为零．这个结论会经常用到，要学会利用．

13．求以四点 $O(0,\ 0,\ 0)$，$A(2,\ 3,\ 1)$，$B(1,\ 2,\ 2)$，$C(3,\ -1,\ 4)$ 为顶点的四面体体积．

【解】　$\overrightarrow{OA}=\{2,\ 3,\ 1\}$，$\overrightarrow{OB}=\{1,\ 2,\ 2\}$，$\overrightarrow{OC}=\{3,\ -1,\ 4\}$，

$$V=\frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 3 & -1 & 4\end{vmatrix}\right|=\frac{19}{6}.$$

14．已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面，证明：$2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，$3\boldsymbol{b}-5\boldsymbol{c}$，$2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{c}$ 共面．

【证明】　法 1：$(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b},3\boldsymbol{b}-5\boldsymbol{c},2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{c})$

$$\begin{aligned}&=(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\times(3\boldsymbol{b}-5\boldsymbol{c})\cdot(2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{c})\\&=(6\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-10\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}-15\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{c})\\&=-30\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}+30\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\\&=-30\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+30\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=0\text{（转续）},\end{aligned}$$

法 2：因为 $2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{c}=(2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})-(3\boldsymbol{b}-5\boldsymbol{c})$，

即向量 $2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{c}$ 可由向量 $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$、$3\boldsymbol{b}-5\boldsymbol{c}$ 线性表出，

【续】　故 $2\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$，$3\boldsymbol{b}-5\boldsymbol{c}$，$2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{c}$ 共面．

【注】　向量代数中有以下结论：三个向量共面的充分必要条件是至少有一个向量可以由其他两个向量线性表出．

15．应用向量证明不等式

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\geqslant|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|$$

成立，其中 a_1，a_2，a_3，b_1，b_2，b_3 为任意实数，并指出式中等号成立的条件．

【证明】　令 $\boldsymbol{a}=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$，$\boldsymbol{b}=\{b_1,\ b_2,\ b_3\}$，

因为 $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\cos\theta|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，

即　$|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$，

当 $|\cos\theta|=1$ 时，有 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$，

即当 a_1，a_2，a_3 与 b_1，b_2，b_3 成比例时，式中等号成立．

16．已知向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 不共面，但向量 $\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$、$\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}$ 共面，求 λ 的值．

【解】　由题意得 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\neq0$，$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})=0$；

因为$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$

$$\begin{aligned}&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\lambda\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})\\&=2\lambda\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\\&=2\lambda\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=(2\lambda+1)\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c},\end{aligned}$$

故$2\lambda+1=0$，得$\lambda=-\dfrac{1}{2}$.

17. 证明：以平面上三点$A(x_1,\ y_1)$，$B(x_2,\ y_2)$，$C(x_3,\ y_3)$为顶点的三角形的面积等于

$$\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}\right|,$$

并计算顶点为$A(0,\ 0)$，$B(3,\ 1)$，$C(1,\ 3)$的三角形的面积.

【证明】 将平面上的点视为空间中的点，则$A(x_1,\ y_1,\ 0)$，$B(x_2,\ y_2,\ 0)$，$C(x_3,\ y_3,\ 0)$.

所证面积S可以看成以向量$\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$为邻边的平行四边形面积的一半，也可以看成以平行四边形为底而高为1的某平行六面体的体积的一半. 取既垂直于$\overrightarrow{AB}$又垂直于$\overrightarrow{AC}$的基本单位向量$\boldsymbol{k}$，由混合积绝对值的几何意义知$S=\dfrac{1}{2}|\boldsymbol{k}\times\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}|$，

由于
$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}\times\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0\end{vmatrix}\\&\xlongequal[\text{第 2 列}+\text{第 3 列}\times y_1]{\text{第 1 列}+\text{第 3 列}\times x_1}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0\end{vmatrix}\\&\xlongequal[\text{第 3 行}+\text{第 1 行}]{\text{第 2 行}+\text{第 1 行}}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix},\end{aligned}$$

故

$$S=\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}\right|.$$