线性系统理论导引

〔美〕陈启宗 著
杜正秋 译

北京工业学院二系203教研室翻印
1982.5

译 后 记

二十世纪是控制理论飞速发展的时期 [illegible] 经典控制理论的发展的阶段。在这一阶段中，由奈 [illegible] 创立的频域方法对线性、定常单变量控制系统的 [illegible]

随着宇航和工 [illegible] 性多变量控制系统的设计问题。为了适应这种 [illegible] 频域方法移到本质上说是时域法的状态空间方法 [illegible] 现代控制理论的发展阶段。彼时，用状态空间观点撰写的文献，报告大量问世。然而，在最近数年间，用频域方法进行研究的趋势又日益高涨。这种变趋势实质上反映了在控制理论领域中存在着频域方法和状态空间方法何者为好的不同观点的争论，对于这种争论，当然毋需急于作出定论。重要的是，要根据历史的观点对二者的异同及相互关系作更深入的研究。事实上，许多研究工作已经开始使二者的概念和方法相互沟通，其间的界线正在逐渐消融。看来，创立一种新的、统一的兼有二者优点的现代线性系统理论是可能的。

在这一方面，美国纽约州立大学石溪分校电气工程系主任陈启宗教授做了有意义的工作。在其所著"线性理论导引"一书中，对于频域方法和状态空间方法并未偏弃一方而是予以同等重视，对它们各自的特点作了比较并阐明了其间的相互关系。译者认为，了解该书所反映的观点是有价值的。考虑及此，决定翻译本书。

由于本书的翻译工作是利用暑假的时间匆促完成的，因此，对于文体、措词特别是专门术语不及详加推敲，对原文内容之理解亦不无谬误。译者将会非常乐意地取听来自各方面的批评意见。

全书译成后，承郐信鹤同志作了详细校阅。对此，谨表谢意。自动控制系及工业自动化教研室的同事们对翻译工作给予了鼓励，在此一并致谢。

杜正秋　1979 年 9 月　上海

翻 印 说 明

本书是根据上海市业余工业大学自动控制系杜正秋同志的译本翻印的，经译者同意，我们作了一些必要的改动。因时间关系，未能将改动的地方送给译者审阅，特此说明，并向杜正秋同志表示歉意。

前　言

本书是线性系统分析及初步设计的教科书，供具有大学毕业水平的学生使用，也可供工程师和应用数学家的自修之用。阅读本书所需的数学预备知识是矩阵运算的知识和微分方程的基本知识。书中未加星号的各节是从作者四年来在纽约州立大学石溪分校（*The State University of New York at Stony Brook*）讲授系统理论方面第一门研究生课程的讲课书记扩充而来的。

本书主要介绍关于线性系统的分析和初步设计。过去十年来，工程师所关心的不仅是设计出能够运行的系统，而且要设计出最富有成效的系统。终因结构上的原因，系统往往具有某些固有的限制，而且系统所能达到的最好情况也不是沒有限度的。不通晓这一限制，设计者就可能为了尝试设计不能实现的系统而浪费时间和精力。因此，在设计过程中，对系统的特性作全面的研究是至关系重要的。事实上，许多设计技术均来源于这一研究。

在惯用的控制理论中，分析和设计基本上是用传递函数——一种输入——输出描述——来实现的。另一方面，状态变量描述则主要用于近代控制理论中。本书从线性、因果律、松弛性、时不变性以及状态等概念导出这两种数学描述，给它们以同样的重视，并介绍它们之间的关系。

在工程设计方面，数字计算机是强有力的工具。作为工程师，我们应该充分利用它。为此目的，本书的大部分结果都推导成适合于编制计算机程序的形式。鉴于程序的细节均能在关于数值计算的书中找到，故不予讨论。

第二章介绍所需的数学预备知识。关于系统理论的基本概念则在第三章介绍。对于概念的引出，力求直观明了，而不追求数学上的严密性。第四章给出状态方程的解。可控性和可观测性的概念则在第五章引出。至于这些概念的实际含义将在第七章研究。第六章包含实现问题。最后两章研究稳定性和组合系统。

本教科书的使用具有灵活性，可供一个学期或两个学期课程之用。若删去定理3－1、4－5、4－11、5－2、5－5、5－11、8－3、8－7及第九章，并略去定理2－6、2－8、2－10到2－13、4－1、4－40、4－21和8－10的证明，则书中未注星号的各节及附录A能在一学期讲完，石溪分校就是按此处理的。由于第六章、第七章和第八章、第九章之间的逻辑依从关系并不密切（见前言的结尾），未加星号诸节的材料易于用作一学期或一季的课程。若包括注有星号的各节，则可用作两学期的课程。

习题是本书的重要部分，其作用是帮助读者理解和应用书中所涉及的概念和结论。为了确保主要内容的连续性，某些重要结论被列入习题部分。

在本书写作过程中我要对许多人表示感谢。*Kalman* 的著作以及 *Zadeh* 和 *Desoer* 的《线性系统理论》构成本书的基础。受教于 *C. A. Desoer* 教授，使我得益非浅。对此，不胜感激之至。对于他的经常鼓励和评审原稿，亦当表示我的谢意。我愿对 *B. C. Leon* 教

授、*E.J.Craig* 教授和 *I.B.Rhodes* 教授的评论和有价值的建议表示谢意。*P.E. Barry* 教授的令人鼓舞的讨论，*N. Y. Wu* 教授在校对上的帮助，都应致以谢意。感谢纽约州立大学石溪分校电气科学系前主任 *S. L. Chang* 教授提供了行政上的帮助。我还愿意对我的学生表示感谢之意，特别是 *C. Waters* 和 *C. H. Hsu* 先生关于改进文体表达的建议。我还要感谢 *R. Lusting*，*V. Donahue* 和 *C.Calmiros* 诸位夫人，*B. Martim* 和 *J. Gould* 诸位小姐打印了多种手抄原稿，*Holt*，*Rinechart and Wiston, Inc* 的 *L. Liang* 夫人和 *L. Banks* 小姐在本书出版过程中的协助。最后我要特别感谢我的妻子 *Beatrice*，由于她的耐心和协助，使本书的写作成为可能。

各章的逻辑依从关系

$$
\begin{tikzcd}
 & \text{第一章} \arrow[d] & \\
 & \text{第二章} \arrow[r, shift left] \arrow[d] & \text{第三章（第二章和第三章的顺序可以颠倒）} \arrow[l, shift left] \\
 & \text{第四章} \arrow[d] & \\
 & \text{第五章} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\text{第七章} & \text{第六章} \arrow[l, dotted, "\text{（仅用于节 7.5）}"'] \arrow[r, dotted, "\text{（仅用节 6.2）}"'] & \text{第八章} \arrow[d] \\
 & & \text{第九章}
\end{tikzcd}
$$

C. T. Chen（陈启宗）

纽约，石溪

1970 年 3 月

符 号 一 览 表

$\blacksquare$	在陈述或例题的结尾不明显时，这符号表示终了。
$\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$，$\mathbf{P}$，…	黑体大写字母表示矩阵。
$\mathbf{u}$，$\mathbf{y}$，$\boldsymbol{\alpha}$，…	黑体小写字母表示向量。
u，y，α，…	斜体或希腊小写字母表示标量函数或标量。
$\mathscr{L}$	*Laplace* 变换。
$\hat{\mathbf{u}}(s)$，$\hat{G}(s)$，…	字母上冠以“∧”符号表示该字母的 *Laplace* 变换（例如 $\hat{\mathbf{u}}(s)\triangleq\mathscr{L}[u]$）。有两种例外：(1) $\hat{\mathbf{A}}$ 表示 *Jordan* 型矩阵，(2) $\hat{\mathbf{x}}$，$\hat{\bar{\mathbf{x}}}$ 表示 $\mathbf{x}$ 和 $\bar{\mathbf{x}}$ 的估计。
$\rho(\mathbf{A})$，…	常数矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩。
$\nu(\mathbf{A})$，…	常数矩阵 $\mathbf{A}$ 的零度。
$\delta(\hat{\mathbf{G}}(s))$，…	有理矩阵 $\hat{\mathbf{G}}(s)$的方次。
$\mathbf{A}'$，$\mathbf{x}'$，…	矩阵 $\mathbf{A}$ 和向量 $\mathbf{x}$ 的转置。
$\mathbf{A}^*$，$\mathbf{x}^*$，…	矩阵 $\mathbf{A}$ 和向量 $\mathbf{x}$ 的共轭转置。
$det\,\mathbf{A}$，	$\mathbf{A}$ 的行列式。
C	复数域。
R	实数域。
$\triangleq$	按定义等于。
$\frac{d}{dt}\mathbf{A}\triangleq(\frac{d}{dt}aij)$，	
$\mathscr{L}[\mathbf{A}]\triangleq\mathscr{L}[aij]$…	算子加在矩阵或向量上的意义是算子加在阵矩或向量的每一元素。
$\dot{\mathbf{x}}\triangleq\frac{d}{dt}\mathbf{x}$	

目　录

第八章 线性系统的稳定性

第九章 线性时不变组合系统

注：注有星号*者略去而不失连续性。

第一章 绪 论

1—1 系统的研究

物理系统的研究通常包括下列四个步骤：

1. 建立模型（建模）。
2. 建立数学描述。
3. 分析。
4. 设计。

第一个步骤，建模，是指寻找一个模型，其特征类似于物理系统，但对它进行研究较为容易。物理系统是存在于现实世界中的客体，对我们来说，其确实的特征往往是尚未知道的。然而，我们能够加各种测试信号于其上，并从测出的数据确定其特性。如欲对物理系统进行有分析的研究，就必须根据测得的特性确定与它相类似的模型。确定模型的过程称为建模。作为工程师，我们必须通晓物理系统和模型的区别。例如，在电气工程中，图 1—1(*a*)所示的放大器电路，可用图 1—1(*b*)所示网络来模拟。在机械工程中，汽车悬浮系统可用图 1—2 作为模型。设计之成败取决于模型的选择是否适当。因而建模是一个至为重要的问题。

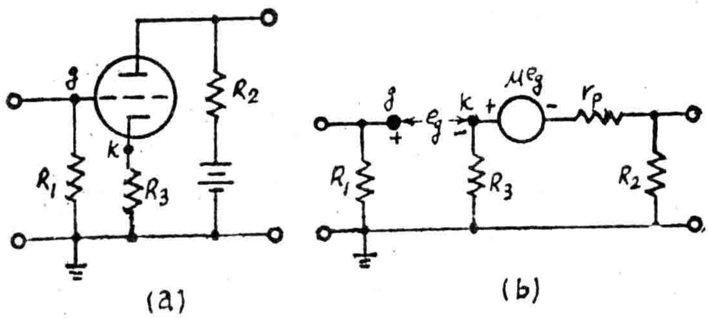

图 1—1 放大器

(a) 电路 (b) 模型

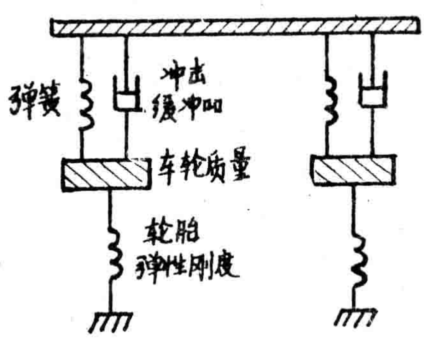

图 1—2 汽车悬系统的模型

随着所要解决问题的不同或运行范围的不同，一个物理系统可以有许多不同的模型。例如，电放大器在高频和低频可以有不同的模型。又如宇宙飞船，若欲研究它的运行轨道，就可模拟为一个质点，而若欲研究它的运动情况，就必须用刚体来模拟。为了导出物理系统的适当模型，透彻了解物理系统及其运行范围是很重要的。本书把物理系统的模型称作系统。因

此，物理系统是存在于现实世界中的一个装置或是若干装置的集体，而系统则是物理系统的模型。

在我们找到系统即模型以后，下一步是寻找描述系统的数学方程。对于不同的系统，可以用不同的物理定律来建立数学方程。例如，对于电气系统，可用*Kirchhoff*电压和电流定律；而在机械系统中，则可采用*Newton*定理。描述系统的方程有诸如线性方程、非线性方程、积分方程、差分方程、微分方程以及其它等等的多种形式。描述同一系统的不同形式的方程中，何者更优，取决于所提问题的不同。总之，正如一个物理系统可以具有多种模型一样，一个系统可以具有多种不同的数学方程描述。

系统的数学描述一经获得，下一步的研究就要对系统进行分析——定量分析和(或)定性分析。在定量分析中，我们关心的是系统对于某一输入和初始条件的确定响应，这一分析可用数学计算机或模拟计算机来完成。在定性分析中，我们关心的是诸如稳定性，可控性和可观测性等系统的一般特性。各种设计方法往往来源于这一分析，因此，定性分析是至为重要的。

如若所得系统响应不能令人满意，必须对系统加以改进或使它最优化。在某些情况下，能够通过调整系统的某一参数来改进系统的响应。而在另一些情况下，则必须引入补偿器。应予注意的是，设计是在物理系统的模型上完成的。若物理系统模型选取得当，在设计时引入补偿器和必要的调整，势必能相应地改善物理系统的特性。

1—2 本书的范围

上节业已提及，系统研究可分四步：建模、建立数学描述、分析和设计。本书仅研究系统数学描述的建立和系统的分析，略为提及设计问题而建模问题则不予涉及。这样的内容选取基于如下考虑。物理系统模型的推导需要各专门领域的知识，且需要一定的仪器设备。例如，在推导晶体管的模型时，不仅需要量子物理的知识，而且也需要实验室试验技术；在建立汽车悬浮系统模型时，需要进行实际试验和测量，决非仅靠纸和笔所能完成。建模问题应与各专门领域联系在一起予以研究，故此，本书不予涉及。本书的主要篇幅将致力于系统数学方程的推导和分析。至于设计，我们仅限于讨论那些能直接从系统分析导出的设计技术。虽然我们并不讨论与最优控制理论有关的设计技术，但本书将提供为研究最优控制所必需的准备知识。

用以描述系统的数学方程可分为线性方程和非线性方程两类。本书仅研究线性方程，其原因如下：(1)大多数在正常运行范围内工作的物理系统均能由线性方程所描述的模型来模拟。(2)线性方程的理论是完整的且组织良好。(3)线性方程的理论是研究非线性方程的基础。

在研究网络和控制系统时，如下两种形式的线性方程是基本的而且是最重要的：

$$\mathbf{y}(t)=\int_{t_0}^{t}\mathbf{G}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \qquad (1-1)$$

和
$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \tag{1-2a}$$
$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \tag{1-2b}$$

方程(1－1)描述系统输入 $\mathbf{u}$ 和输出 $\mathbf{y}$ 之间的关系，称为系统的输入——输出描述或称外部描述，传递函数是这种描述的特殊情况。(1－2)形式的两个方程称为动态方程。若用动态方程描述系统，则称之为系统的动态方程描述或称状态变量描述。在本书中，我们将从非常一般的装置导出这两个方程，并将全面地研究这些方程和建立这两类方程之间的关系。与这些方程有关的概念和方法也将予以介绍。

1—3 各章概貌

在这一节中，扼要地介绍各章的内容。

第二章复习有关线性代数的一些概念和结论。其目的是使读者能完成相似变换，能变换一个矩阵为*Jordan*标准型，以及计算矩阵函数。在线性系统分析和设计中，这些技术，即使不是必不可少的也是十分重要的。

第三章系统地导出了线性系统的输入——输出描述和状态变量描述。这些描述是基于线性、松弛性、因果性和时不变性而导出的。我们还将用例子来说明系统的这些描述是如何建立的。组合系统和离散时间系统的数学描述也将在本章中介绍。

线性动态方程的解将在第四章中研讨。并要指出，不同的分析方法通常导致同一系统的不同的动态方程描述。本章中还将建立输入——输出描述和状态变量描述之间的关系。可控性和可观测性概念在第五章中引出。从下面的例子可以看出引出这两个概念的重要性。考虑图1－3所示网络。图中两个网络的传递函数均为1。对于图1－3(*b*)网络的传递函数为1是毫无疑义的。然而，我们可能要问，图1－3(*a*)网络中的电容为何对传递函数不起任何作用？为了回答这一问题，就需要用到可控性和可观测性的概念。对于最优控制理论、稳定性研究以及信号预测和滤波，这两个概念也是重要的。动态方程可控和可观测的各种充分和必要条件也将在本章中引出。

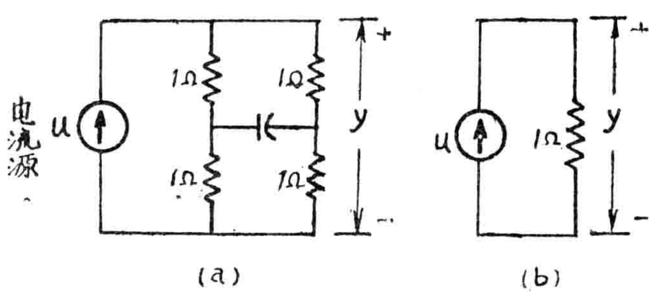

图 1—3 两个具有同一传递函数1的不同网络

在第六章，要研究有理传递函数矩阵的不可简约实现。这一问题的实质就是要寻找一个可控且可观测的线性、时不变动态方程，使其具有指定的有理传递函数矩阵。这一问题的解决是至为重要的，因为它提供了在模拟计算机或数字计算机上仿真系统的一种方法。它也提供了用运算放大器电路来综合有理传递函数矩阵的一种方法。

第七章研究了可控性和可观测性两个概念的实际含义。我们要指出，在可控性和可观测性的假定下，将能得到何种结果。本章还介绍若干设计方法。

线性系统的定性特性将在冠以稳定性标题的第八章中予以研讨。在系统设计中首先要遇到的就是稳定性问题。我们要引出有界输入、有界输出稳定性，*Lyapunov* 意义下的稳定性，以及总体稳定性等概念，并将研究它们的特性及其间的关系。

在最后一章中，要讨论与线性时不变组合系统有关的各种问题。传递函数零极点相消的含义就是要研究的问题之一。作为一个例子，考虑具有传递函数 $1/(s-1)$ 和 $(s-1)/(s+1)$ 的两个系统作图 1－4 所示的三种不用联结。我们要证明图 1－4(b)系统能用它的组合传递函数来研究，而图 1－4(a) 和 (c) 则不能。我们还要讨论单变量和多变量反馈系统的稳定性。最后，我们要研究用代数方法进行反馈系统的设计。

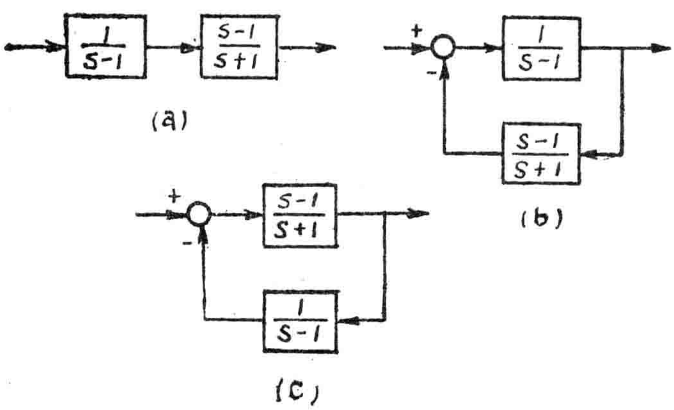

图 1—4 $1/(s-1)$和$(s-1)/(s+1)$的三种联结

第二章　线性空间和线性算子

2—1　引　　言

在本章中我们将复习一些有关线性代数的概念和结果，所有这些对于线性系统理论的发展是至关重要的。这些论题是经过仔细选择的，只有那些在往后章节中要用到的内容才在这里予以介绍。本章的目的在于使读者了解相似变换的结构、寻找正方矩阵的 *Jordan* 型表示以及掌握矩阵函数的计算。（见节 2－9 结语[1]）

在节 2－2 中介绍有关数域和在数域上的线性空间的概念。在本书中所涉及到的数域是实数域、复数域以及有理数函域。为了表示线性空间的向量，我们将在节 2－3 中介绍基底的概念，并建立同一向量的不同表示之间的关系。在节 2－4 中将研究线性算子及其表示，并引入相似变换的概念。线性代数方程组的解则在节 2－5 中予以研究，这里秩和零度的概念是主要的。在节 2－6 中将证明每一个方阵均有 *Jordan* 型表示，这种表示是借助于引入特征向量和广义特征向量作为基底向量而获得的。最小多项式、*Cayley－Hamilton* 定理以及正方矩阵函数则在节 2－7 中研究。在最后一节中将介绍有关内积和范数的概念。

本章企图能自成一体，并假定读者已具有诸如行列式、矩阵相加、矩阵相乘以及逆矩阵等矩阵理论的某些基本知识。下面介绍的矩阵恆等式亦将用到。设 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$ 及 $\mathbf{D}$ 分别为 $n\times m$、$m\times r$、$l\times n$ 和 $r\times p$ 常量矩阵，并设 $\mathbf{a}^i$ 为 $\mathbf{A}$ 的第 i 列，$\mathbf{b}^j$ 为 $\mathbf{B}$ 的第 j 行。则有：

$$\mathbf{AB}=[\mathbf{a}^1\ \ \mathbf{a}^2\cdots\mathbf{a}^m]\begin{pmatrix}\mathbf{b}^1\\ \mathbf{b}^2\\ \vdots\\ \mathbf{b}^m\end{pmatrix}=\mathbf{a}^1\mathbf{b}^1+\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2+\cdots\cdots+\mathbf{a}^m\mathbf{b}^m \tag{2－1}$$

$$\mathbf{CA}=\mathbf{C}[\mathbf{a}^1\ \ \mathbf{a}^2\cdots\cdots\mathbf{a}^m]=[\mathbf{Ca}^1\ \ \mathbf{Ca}^2\cdots\cdots\mathbf{Ca}^m] \tag{2－2}$$

$$\mathbf{BD}=\begin{pmatrix}\mathbf{b}^1\\ \mathbf{b}^2\\ \vdots\\ \mathbf{b}^m\end{pmatrix}\mathbf{D}=\begin{pmatrix}\mathbf{b}^1\mathbf{D}\\ \mathbf{b}^2\mathbf{D}\\ \vdots\\ \mathbf{b}_m\mathbf{D}\end{pmatrix} \tag{2－3}$$

这些等式是极易验证的。务须注意的是 $\mathbf{a}^i\mathbf{b}^i$ 是 $n\times r$ 矩阵，它是 $n\times 1$ 矩阵 $\mathbf{a}^i$ 和 $1\times r$ 矩阵 b^i 的乘积。

本章中所提及的内容是人所周知的，并可在参考文献[5]、[38]、[39]、[43]－[45]、[77]、[86]和[116][2] 中找到。但本书的提法是与众不同的。我们着重强调向量及其表示之间的差

注 1：希望读者注意结语，因它为读者学习本章介绍的数学定理提供了指导。

注 2：方括号中的数字与书末所列参考文献序号相一致。

则（详见式(2－12)及定义 2－7）。在强调这些差别以后，算子的矩阵表示以及相似变换等概念就可以很自然的引出来了。

2—2 数域上的线性空间

在数学研究中往往要首先阐明作为研究核心的对象的全体。这种对象或元素的全体称为集合。例如，在算术中我们研究的是实数集合，在 *Boolean* 代数中研究的是集合{0，1}，在该集合中仅含有两个元素。集合的其它例子尙有复数集合、正整数集合、次数小于5的多项式集合以及所有 2×2 的矩阵集合。在本节中所讨论的集合可以是上述集合中的任何一种，也可以是其它所希望说明的集合。

考察实数集合，很明显，实数集合具有下述性质：任何两个实数和、差、积、商（除以零的情况除外）仍是实数。任何具有这一性质的集合称为数域，数域的正式定义如下。

定义 2－1

数域 $\mathscr{F}$ 是由称为标量的元素的集合以及称为加“+”和乘“·”的两种运算所构成，这两种运算定义在 $\mathscr{F}$ 上，并满足下列条件：

1. 对于 $\mathscr{F}$ 中每一个元素 α 和 β，有相应的称为 α 与 β 之和的元素 $\alpha+\beta$ 以及称为 α 与 β 之积的元素 $\alpha\cdot\beta$ 存在于 $\mathscr{F}$ 中。

2. 加法和乘法都是可交换的：对于 $\mathscr{F}$ 中的任何 α 和 β，

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha \qquad \alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$$

3. 加法和乘法都是可结合的：对于 $\mathscr{F}$ 中的任何 α，β 和 γ，

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma) \qquad (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$$

4. 乘法关于加法是可分配的：对于 $\mathscr{F}$ 中的任何 α，β 和 γ，

$$\alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$$

5. $\mathscr{F}$ 中含有元素 0 和元素 1，使对于 $\mathscr{F}$ 中每一元素 α 均有 $\alpha+0=\alpha$，$1\cdot\alpha=\alpha$。

6. 对于 $\mathscr{F}$ 中的每一个元素 α，$\mathscr{F}$ 中有一个元素 β，使 $\alpha+\beta=0$。

7. 对于 $\mathscr{F}$ 中每一个非零元素 α，$\mathscr{F}$ 中有一个元素 γ，使 $\alpha\cdot\gamma=1$。

下面给出一些例子以说明这一概念。

例 1

考虑包括 0 和 1 的数的集合，若用通常的加法和乘法的定义，集合{0，1}不构成数域，这是因为元素 $1+1=2$ 不属于集合{0，1}。但若定义 $0+0=1+1=0$，$1+0=1$，$0\cdot1=0\cdot0=0$，$1\cdot1=1$，则可证明集合{0，1}满足关于数域的所有条件，因此，集合{0，1}对于这样定义的运算就构成了数域。并称之为二进制数域。

例 2

考虑如下形式的所有 2×2 矩阵的集合：