Smirnov Advanced Mathematics (Volume II (3))

俄罗斯数学精品译丛

"十二五"国家重点图书

斯米尔诺夫高等数学

（第二卷·第三分册）

［俄罗斯］斯米尔诺夫 著　斯米尔诺夫高等数学编译组 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯数学精品译丛

"十二五"国家重点图书

斯米尔诺夫高等数学

Smirnov Advanced Mathematics (Volume II (3))

(第二卷·第三分册)

[俄罗斯]斯米尔诺夫 著

斯米尔诺夫高等数学编译组 译

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

黑版贸审字 08－2016－040 号

内容简介

本书根据苏联国立技术理论书籍出版社出版的斯米尔诺夫院士的《高等数学教程》第二卷 1952 年第十一版译出. 原书经苏联高等教育部确定为综合大学数理系及高等工业学院需用较高深数学的各系教科书，主要介绍了数学物理偏微分方程知识.

本书可供数学系高年级学生、高等学校数学教师，以及其他需要数学物理偏微分方程知识的技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

斯米尔诺夫高等数学. 第二卷. 第三分册/(俄罗斯)斯米尔诺夫著；斯米尔诺夫高等数学编译组译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018.3

ISBN 978－7－5603－6524－4

Ⅰ.①斯…　Ⅱ.①斯… ②斯…　Ⅲ.①高等数学－高等学校－教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 050729 号

书名：Курс высшей математики

作者：В. И. Смирнов

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　刘春雷
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress. hit. edu. cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 10.25　字数 184 千字
版　　次　2018 年 3 月第 1 版　2018 年 3 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－6524－4
定　　价　48.00 元

⊙ 目录

数学物理偏微分方程

第七章

§1 波动方程

163. 弦的振动方程

求偏微分方程的积分问题属于分析中最艰深且最广泛的部分，这里我们只限于考虑这个范围中的基本问题. 这一节中我们讲联系于所谓波动方程的问题. 下面形状的方程叫作波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

或

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u$$

其中

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\operatorname{div}\operatorname{grad} u$$

在[116]与[118]中考虑声与电的振动时，我们遇到过这个方程. 设 u 不依赖于 y 与 z，就是说，在任何一个垂直于 X 轴的平面上的所有的点，u 有相同的值. 在这种情形下，波动方程

的形状如下

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

在这样的情形下，我们通常说有平面波. 现在我们来说明，当考虑紧张的弦的微小的横振动时，我们得到这样的方程.

所谓弦我们指的是纤细的线，它可以自由地弯曲. 我们设它受到很强的张力 T_0 的作用，并且在平衡状态下，不受沿 X 轴方向的外力(图 127). 如果它由平衡位置受到了随意的外力的作用，弦就开始振动，而且当平衡时，弦上具有横坐标为 x 而位置在 N 的点，在时刻 t 就具有位置 M. 我们只限于考虑横振动，假定全部运动出现在一个平面上，而且弦上的点垂直于 X 轴运动. 我们把弦上的点的位置 $\overline{NM}$ 记作 u. 这个位移就是两个自变量 x 与 t 的未知函数.

取弦的单元 MM'，平衡时，它的位置在 NN'. 我们算作形变是很小的，以至于与 1 比较起来可以忽略掉微商$\frac{\partial u}{\partial x}$的平方项. 设 α 是弦的切线与 X 轴做成的锐角. 我们有

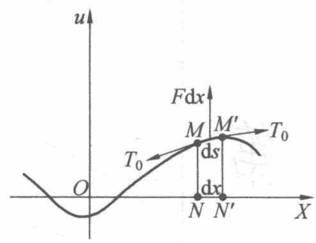

图 127

$$\tan\alpha=\frac{\partial u}{\partial x}$$

于是

$$\sin\alpha=\frac{\tan\alpha}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}\approx\frac{\partial u}{\partial x}$$

把对于单位长计算的，弦上垂直于 X 轴的作用力记作 F. 作用在所考虑的单元 MM' 上的就有下列各力：在点 M' 的张力，它的方向沿着点 M' 处的切线方向，而与 X 轴做成锐角；在点 M 的张力，方向沿着点 M 处的切线方向，与 X 轴做成钝角；以及沿 u 轴方向的力 $F\mathrm{d}x$. 由于假定了形变是很小的，我们可以算作上述两个张力的大小等于张力 T_0 的大小. 先设在所说的力 F 的作用下，弦成平衡. 投影在 u 轴上，就有下面的平衡条件

$$T_0\sin\alpha'-T_0\sin\alpha+F\mathrm{d}x=0 \tag{1}$$

其中 α' 是上面说的角度 α 在点 M' 的值，就是说

$$\sin\alpha'=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M'};\sin\alpha=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M}$$

于是推知

$$T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M'}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M}\right]+F\mathrm{d}x=0 \tag{2}$$

在中括号中的差表示的是当 x 改变了 $\mathrm{d}x$ 时函数$\frac{\partial u}{\partial x}$的改变量. 用微分来替

代这个改变量,就得到[Ⅰ,50]

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M'}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{M}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}x$$

代入到方程(2)中,消去 $\mathrm{d}x$,就得到弦的平衡方程

$$T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F=0 \tag{3}$$

为了得到运动方程,我们只需依照达朗贝尔原理,对于外力再补充以惯性力,它可以由下述方法得到:点 M 的速度显然是 $\frac{\partial u}{\partial t}$,加速度是 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$,惯性力等于加速度与质量的乘积而取相反的符号,所以单元 MM' 的惯性力是

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\rho\mathrm{d}x$$

其中 ρ 是弦的线密度,就是单位长的质量,对于单位长来讲,惯性力就是

$$-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

于是,在方程(3)中用 $F-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ 来替代 F,我们就得到运动方程

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=T_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F$$

用 ρ 除并设

$$\frac{T_0}{\rho}=a^2,\frac{F}{\rho}=f \tag{4}$$

我们就得到弦的强迫横振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f \tag{5}$$

若外力消失,我们就有 $f=0$,于是得到弦的自由振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6}$$

以上我们假定了外力是连续地分布在整条弦上的,有时我们遇到的是力 P 集中在一个点 C 的情形. 考虑这样的情形时,或者看作是上面的极限情形,就是算作力是作用在点 C 附近的一个长度为 ε 的无穷小单元上,而当 $\varepsilon\to 0$ 时,力的大小与 ε 的乘积趋向有限的极限,这个极限不等于零;或者对于点 C 附近的单元 MM' 直接运用方程(2),而用 P 来替代 $F\mathrm{d}x$. 这时要注意我们对于 $F\mathrm{d}x$ 不补充以惯性力$\left(-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\rho\mathrm{d}x\right)$,因为当 $\mathrm{d}x\to 0$ 时,我们算作它趋向零.

设单元的端点逼近于点 C,我们把当自右或自左逼近于点 C 时 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 所趋向的极限值分别记作

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{+}, \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{-}$$

由方程(2) 取极限就得到

$$T_0\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{+}-\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{-}\right]=-P \tag{7}$$

如此我们看出，这条弦在集中力作用所在的点 C 具有叉点，就是左右切线方向不同的点.

像在动力学中一般的情形一样，一个运动方程(5) 不足以完全确定弦的运动，还需要给定在初始时刻 $t=0$ 时的状态，也就是它的点 u 的位置，以及当 $t=0$ 时它们的速度 $\frac{\partial u}{\partial t}$，这都是 x 的已知函数

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x);\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\varphi_1(x) \tag{8}$$

当 $t=0$ 时，未知函数 u 应当满足这两个条件，它们叫作初始条件.

理论上讲，可以考虑无穷的弦，在这种情形下要求解只需方程(5) 与条件(8) 就够了，其中 $\varphi(x)$ 与 $\varphi_1(x)$ 应当是给定在整个无穷区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的. 这种情形就对应于在无界空间中对于平面波的讨论. 以后我们将看到，由无穷的弦得到的结果所给出的扰动分布的景象，当这些扰动没有达到有界弦的端点时，在这样的时间区间里，这种景象也就是对于有界弦的景象.

不过若是在点 $x=0$ 与 $x=l$，弦是介于一端或介于两端的，就需要说明它的端点的现象. 例如，设弦的一端 $x=0$ 是固定的. 在这种情形下，我们应当有

$$u\big|_{x=0}=0 \tag{9}$$

若是端点 $x=l$ 也是固定的，则我们又得到

$$u\big|_{x=l}=0 \tag{9_1}$$

对于任何 t，这两个条件应当满足.

弦的端点也可能不是固定的，而是按给定的方式运动的. 那时弦的这两个点的纵坐标应当算作是时间的已知函数，就是说，设

$$u\big|_{x=0}=\chi_1(t);u\big|_{x=l}=\chi_2(t) \tag{10}$$

无论怎样，如果弦是介于一端或介于两端的，对于它的每一个端点就应当有给定的条件，这样的条件叫作边值条件.

总之，我们看出，对于具体的物理问题的解来讲，补充的初始条件与边值条件的重要性并不低于运动方程，并且我们的兴趣不在于运动方程的任意的解或者甚至于它的一般解的求法，而是在于求适合于所设的初始条件与边值条件的解.

164. 达朗贝尔解

在无穷弦的自有振动的情形下，要求的函数 $u(x,t)$ 应当满足方程(6)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

且要适合初始条件(8)

$$u\mid_{t=0}=\varphi(x);\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(x)$$

这里由于弦是无界的，函数 $\varphi(x)$ 与 $\varphi_1(x)$ 应当是在给定区间$(-\infty,+\infty)$上的.

可以求出方程(6)的一般解，而且具有这样的形状，使得其容易适合于条件(8).

为此，我们变换方程(6)，引用新的自变量

$$\xi=x-at;\eta=x+at$$

由此

$$x=\frac{1}{2}(\eta+\xi);t=\frac{1}{2a}(\eta-\xi)$$

看作 u 通过中间变量 ξ 与 η 依赖于 x 与 t，应用求复合函数的微商的法则，通过对新变量的微商来表达对原来的变量的微商

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta};\frac{\partial u}{\partial t}=a\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)$$

再应用这两个公式一次，就得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)-a^2\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}-\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)$$

由此

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-4a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}$$

于是方程(6)就与下面这个方程等价

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0 \tag{11}$$

把方程(11)写成

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)=0$$

就可以看出$\frac{\partial u}{\partial \xi}$不依赖于 η，也就是说它只是 ξ 的函数. 设

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=\theta(\xi)$$

求积分，就得到

$$u=\int\theta(\xi)\mathrm{d}\xi+\theta_2(\eta)$$

其中 $\theta_2(\eta)$ 是 η 的任意函数(当对 ξ 求积分时,“常数”可以依赖于 η). 这里,第一项可以算作是 ξ 的任意函数,因为 $\theta(\xi)$ 是 ξ 的任意函数,我们用 $\theta_1(\xi)$ 来记第一项,就有

$$u=\theta_1(\xi)+\theta_2(\eta)$$

或者,换到原来的变量 (x,t) 有

$$u(x,t)=\theta_1(x-at)+\theta_2(x+at) \tag{12}$$

其中 θ_1 与 θ_2 各为所写的变量的任意函数. 方程(6) 的这个一般解叫作达朗贝尔解,它含有两个任意函数 θ_1 与 θ_2. 我们利用初始条件(8) 来确定这两个函数,根据等式

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a[-\theta'_1(x-at)+\theta'_2(x+at)]$$

以及等式(12),得到

$$\theta_1(x)+\theta_2(x)=\varphi(x);\ -\theta'_1(x)+\theta'_2(x)=\frac{\varphi_1(x)}{a} \tag{13}$$

由后一个等式求积分并变号得

$$\theta_1(x)-\theta_2(x)=-\frac{1}{a}\int_0^x\varphi_1(z)\mathrm{d}z+C$$

令 $x=0$,我们来确定任意常数 C 有

$$C=\theta_1(0)-\theta_2(0)$$

可以算作 $C=0$,就是设

$$\theta_1(0)-\theta_2(0)=0 \tag{14}$$

这并不失去一般性,因为如果 $C\neq 0$,我们可以引用函数

$$\theta_1(x)+\frac{C}{2},\theta_2(x)-\frac{C}{2}$$

来替代函数 $\theta_1(x)$ 与 $\theta_2(x)$,这样等式(13) 并不改变,且满足了式(14).

总之,我们有

$$\theta_1(x)+\theta_2(x)=\varphi(x);\theta_1(x)-\theta_2(x)=-\frac{1}{a}\int_0^x\varphi_1(z)\mathrm{d}z \tag{15}$$

由此我们不难确定函数 $\theta_1(x)$ 与 $\theta_2(x)$,即

$$\theta_1(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x\varphi_1(z)\mathrm{d}z$$

$$\theta_2(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x\varphi_1(z)\mathrm{d}z \tag{16}$$

把所得到的表达式代入到公式(12) 中,就求得

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\varphi(x-at)-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at}\varphi_1(z)\mathrm{d}z+$$

$$\frac{1}{2}\varphi(x+at)+\frac{1}{2a}\int_{0}^{x+at}\varphi_1(z)\mathrm{d}z$$

结果得到

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi_1(z)\mathrm{d}z \tag{17}$$

165. 特殊情形

公式(17) 给出了所提出的问题的完全的解. 为了更好地理解所得到的解，我们分为下列几种情形：

a. 初始衡量等于零.

就是说，弦上点的初始速度等于零. 这时由条件 $\varphi_1(x)=0$ 及公式(17) 给出

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} \tag{18}$$

在初始时刻

$$u\mid_{t=0}=u(x,0)=\varphi(x)$$

现在我们看解(18) 的物理意义. 表达式(18) 的分子由两项组成，我们先看第一项：$\varphi(x-at)$.

设一个观察者由初始时刻 $t=0$ 开始，由弦上的点 $x=c$ 在 OX 轴的正方向移动，速度为 a，也就是说他的横坐标依照公式 $x=c+at$ 或 $x-at=c$ 改变. 对于这样的观察者来讲，由公式 $u=\varphi(x-at)$ 所确定的弦的位移总保持一个常数值，而等于 $\varphi(c)$. 函数 $u=\varphi(x-at)$ 所确定的这个现象叫作正波的传播. 回到达朗贝尔公式(12)，我们可以说，$\theta_1(x-at)$ 这一项给出正波，它以速度 a 在 OX 轴的正方向传播. 同理，第二项 $\theta_2(x+at)$ 所确定的弦的振动是这样的，这时扰动在 OX 轴的负方向以速度 a 传播，并且在时刻 t 具有横坐标 $c-at$ 的点与当 $t=0$ 时的点 $x=c$ 具有相同的离开距离 u. 它所对应的现象我们叫作反波的传播.

a 的大小是扰动或振动(横的) 的传播速度. 公式(4) 指出

$$a=\sqrt{\frac{T_0}{\rho}} \tag{19}$$

就是说，横振动的传播速度与弦的密度的平方根成反比而与张力的平方根成正比.

上述的解(18) 是正波 $\varphi(x-at)$ 与反波 $\varphi(x+at)$ 的算术平均值，它可以由下述方法得到：作出两个相同的当 $t=0$ 时弦的图形 $u=\varphi(x)$ 的模样，想象它们彼此是重合在一起的，然后向两侧以速度 a 移动. 弦在时刻 t 的图形就可以作为这样移动的两个图形的算术平均值得出来，就是说，弦在时刻 t 的图形平分诸纵坐标介于两个移动的图形之间的线段.

例如，设在初始时刻，弦具有如图 128 所示的形状

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & (\text{在区间}(-\alpha,\alpha)\text{之外})\\ x+\alpha & (\text{当}-\alpha\leqslant x\leqslant 0\text{时})\\ -x+\alpha & (\text{当}0\leqslant x\leqslant \alpha\text{时})\end{cases}$$

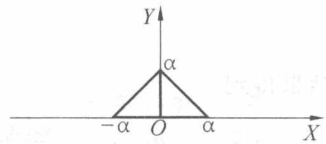

图 128

图 129 上表示出弦在下列时刻的图形

$$t=\frac{\alpha}{4\alpha},\frac{2\alpha}{4\alpha},\frac{3\alpha}{4\alpha},\frac{\alpha}{\alpha},\frac{5\alpha}{4\alpha},\frac{2\alpha}{\alpha}$$

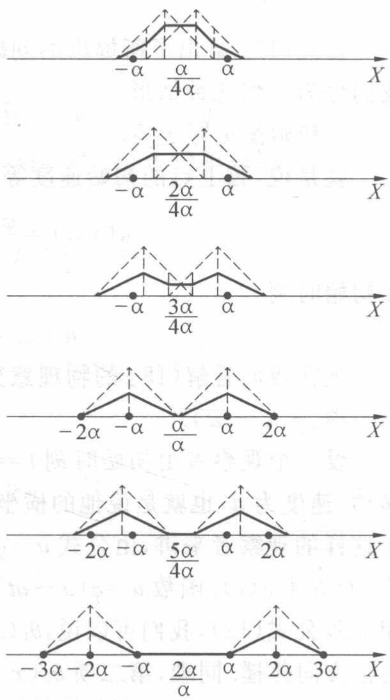

图 129

我们在平面上作出两条互相垂直的轴：一个是关于变量 x 的，另一个是关于 t 的. 在图 130 上，我们只画出了一个 X 轴. 这个平面上任何一点由两个坐标 (x,t) 确定，就是说，这样的点表现出在确定的时刻 t 弦上确定的点 x. 这时，不难用画图的方法确定出弦上那样的点，这些点的初始扰动在时刻 t_0 达到点 x_0. 依照以上所述，这就是具有横坐标 $x_0\pm at_0$ 的点. 因为 a 是振动的传播速度，为了在 OX 轴上找出它们来，只需过点 (x_0,t_0) 作两条直线

$$\begin{aligned}x-at&=x_0-at_0\\ x+at&=x_0+at_0\end{aligned}\tag{20}$$

它们与 OX 轴的交点就是所要求的点. 直线 (20) 叫作点 (x_0,t_0) 的特征线. 沿着其中第一条直线 $\varphi(x-at)$ 保持常数值，就是说，对于由这条直线给出的那些值 (x,t) 来讲，正波给出相同的离开距离，也就是对应于 (x_0,t_0) 这一对值的离开距离. 对于反波来讲，直线 (20) 中第二条直线有同样的作用. 简单的可以说是，扰动沿着特征线传播.

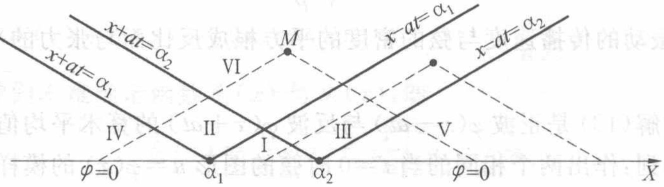

图 130

应用上述的作法，可以发觉下述的事实.

设只在弦的某一个区间 (α_1,α_2) 上具有初始扰动(图 130)，就是说在这区间

之外 $\varphi(x)=0$. 我们只限制上半个 (x,t) 平面 $(t>0)$ 有物理意义，作出 OX 轴上的点 α_1 与 α_2 的特征线 —— 图上画的实线. 这些特征线把整个上半平面分为六个区域. 区域 Ⅰ 所对应的点是这样的，在所指定的时刻，正波与反波都要达到这些点. 区域 Ⅱ 所对应的点在指定的时刻只有反波达到. 区域 Ⅲ 则相反，只有正波达到. 区域 Ⅳ 与 Ⅴ 所对应的点是这样的，在所指定的时刻，没有扰动达到这些点. 最后，区域 Ⅵ 所对应的点是这样的，扰动已经达到它们而且经过了它们，在所指定的时刻，它们呈静止状态. 这是由于，如果过这个区域中随便哪一点作特征线，它们与 OX 轴的交点 $x=c$ 落在有初始扰动的线段之外，于是 $\varphi(x\pm at)=\varphi(c)$ 等于零. 此外，若过点 M 作垂直于 OX 轴的直线，则这条直线的下段，就是对应于 x 不变而时间提前的一段，至少通过区域 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ 中之一，而这条直线的上段，就是对应于时间推后的一段，整个出现在区域 Ⅵ 中. 以下我们将看到，弦所具有的这个值得注意的性质 —— 波经过之后回到原来的状态 —— 并非对于任何的初始扰动都是如此的.

b. 初始位移等于零而只有初始衡量.

这时我们得到解

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi_1(z)\mathrm{d}z \tag{21}$$

若用 $\varphi_1(x)$ 记函数 $\frac{1}{2a}\varphi_1(x)$ 的任意一个原函数，就得到

$$u(x,t)=\Phi_1(x+at)-\Phi_1(x-at) \tag{22}$$

就是说，也是具有正波与反波的传播的. 如果初始扰动只限于在区间 (α_1,α_2) 之上，我们可以得到与情形 a 同样的作法，主要的区别是在区域 Ⅵ 中位移不是等于 0 而是由下面这积分来表达

$$\frac{1}{2a}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\varphi_1(z)\mathrm{d}z \tag{23}$$

实际上，依照这个区域的作法，对于区域 Ⅵ 来讲，我们有 $x+at>\alpha_2$ 而 $x-at<\alpha_1$，就是说在公式(21) 中求积分所需要沿着的区间包含 (α_1,α_2) 在其内. 不过依照条件在 (α_1,α_2) 之外，函数 $\varphi_1(z)=0$，于是只剩下沿 (α_1,α_2) 的积分. 对于 $u(x,t)$，我们就得到表达式(23)，它代表某一个常数.

如此，随着时间的变化，初始衡量的作用使得弦上的点移动一条线段，这条线段的长度由积分(23) 表达，并在这个新的位置保持不动.

还可以用下述的方法来解释公式(21). 设点 x 位于区间 (α_1,α_2) 之右，就是说 $x>\alpha_2$. 当 $t=0$ 时，积分区间 $(x-at,x+at)$ 退化为一个点 x，以后当 t 增加时，它以速度 a 向两侧伸展. 当 $t<\frac{x-\alpha_2}{a}$ 时，它与 (α_1,α_2) 没有公共点，在其中函数 $\varphi_1(z)=0$，于是公式(21) 给出 $u(x,t)=0$，就是说在点 x 是静止的. 由时刻

$t=\dfrac{x-\alpha_2}{a}$ 开始，区间$(x-at,x+at)$就重在区间(α_1,α_2)上，在(α_1,α_2)上，$\varphi_1(z)\neq 0$，于是点x开始振动（波的前阵面通过点x的时刻）. 最后，当$t>\dfrac{x-\alpha_1}{a}$时，区间$(x-at,x+at)$就包含整个区间(α_1,α_2)，沿区间$(x-at,x+at)$求积分就化为沿区间(α_1,α_2)求积分，因为依照条件在区间(α_1,α_2)之外，$\varphi_1(z)=0$，就是说当$t>\dfrac{x-\alpha_1}{a}$时，$u(x,t)$具有由表达式(23)所确定的常数值. 时刻$t=\dfrac{x-\alpha_1}{a}$是波的后阵面通过点x的时刻.

关于一般的情形我们做一些附注. 我们提出，在一般情形下，正波或反波可以全部消失. 实际上，例如，设在初始条件中出现的函数$\varphi(x)$与$\varphi_1(x)$满足关系式

$$\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x\varphi_1(z)\mathrm{d}z=0 \tag{24}$$

这时，根据式(16)中第二个公式，函数$\theta_2(x)$就恒等于零，于是在一般解(12)中反波就消失了. 如果我们在式(24)的右边用一个常数来替代零，则$\theta_2(x)$成为常数，而在公式(12)中，这个常数项可以算在$\theta_1(x-at)$中，就是说，也是没有反波的. 回到我们的情形a中所考虑的例. 图128给出初始离开距离的图形（各处的初始速度都等于0）. 图129中最后一个给出在某一个时刻$t=t_0$时弦的图形，它是由独立的两段构成的. 对应于区间$(\alpha,3\alpha)$的右边这一段以速度a向右移动，而左边那一段以速度a向左移动. 不过我们可以用下述方法来描述当$t>t_0$以后的现象：取时刻$t=t_0$作为初始时刻，计算出在这时刻的离开距离u与速度$\dfrac{\partial u}{\partial t}$，并应用一般公式(17)，在其中只是右边需要用$t-t_0$来替代$t$，因为我们现在把$t_0$取作初始时刻. 在这种情形下只是在区间$(-3\alpha,-\alpha)$与$(\alpha,3\alpha)$上初始条件不等于0. 在一般情形下，在这两个区间的每一个上，扰动使得有正波以及反波. 不过在这里的情形下，以上我们看到，例如在区间$(\alpha,3\alpha)$上扰动只给出正波. 这是由于在这区间上，除去由图129中最后一个所表示的离开距离外，当$t=t_0$时，振动的结果中也产生速度，以使得反波消失. 同理，在区间$(-3\alpha,-\alpha)$上的扰动不给出正波. 这种现象是吉金斯原理的构成之一.

166. 有界弦

设有两端固定的有界的弦，并设弦的端点是$x=0$与$x=l$.

除初始条件(8)之外

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x);\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(x)$$

其中 $\varphi(x)$ 与 $\varphi_1(x)$ 是对于 $0<x<l$ 给定的,还需要满足边值条件

$$u\big|_{x=0}=0;u\big|_{x=l}=0 \tag{25}$$

达朗贝尔解

$$u(x,t)=\theta_1(x-at)+\theta_2(x+at)$$

自然适用于这种情形,不过由公式(16) 可知

$$\begin{aligned}\theta_1(x)&=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_0^x\varphi_1(z)\mathrm{d}z\\ \theta_2(x)&=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_0^x\varphi_1(z)\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{26}$$

来确定函数 θ_1 与 θ_2 在这里遇到了困难,依照问题的物理意义,函数 $\varphi(x)$ 与 $\varphi_1(x)$ 以至于 $\theta_1(x)$ 与 $\theta_2(x)$ 只是确定在区间 $(0,l)$ 上,而在公式(12) 中变量 $x\pm at$ 可能位于该区间之外.

因而,为了应用特征线的方法,就需要把函数 $\theta_1(x)$ 与 $\theta_2(x)$ 开拓到区间 $(0,l)$ 之外,与这完全相当的,是把函数 $\varphi(x)$ 与 $\varphi_1(x)$ 开拓到区间 $(0,l)$ 之外.从物理的观点来看,这个开拓也就是确定一个无穷的弦的这样的扰动,使得它的一段 $(0,l)$ 的运动,就像固定它的两端而去掉弦的其余部分时一样.

在式(12) 的右边代入 $x=0$ 与 $x=l$ 并让结果等于零,就可以把边值条件表示成

$$\begin{aligned}\theta_1(-at)+\theta_2(at)&=0\\ \theta_1(l-at)+\theta_2(l+at)&=0\end{aligned} \tag{27}$$

或者,用 x 来记变量 at 有

$$\begin{aligned}\theta_1(-x)&=-\theta_2(x)\\ \theta_2(l+x)&=-\theta_1(l-x)\end{aligned} \tag{28}$$

当 x 在区间 $(0,l)$ 上改变时,变量 $l-x$ 也在这区间上改变,于是等式(28) 的右边是已知的.不过这时变量 $-x$ 与 $l+x$ 对应在区间 $(-l,0)$ 与 $(l,2l)$ 上改变,于是式(28) 中第二个方程给出 $\theta_2(x)$ 在区间 $(l,2l)$ 上的值,而第一个给出 $\theta_1(x)$ 在区间 $(-l,0)$ 上的值.再者,当 x 在区间 $(l,2l)$ 上改变时,变元 $l-x$ 在区间 $(-l,0)$ 上改变,以上面的计算为基础,等式(28) 的右边是已知的.这时变量 $-x$ 与 $l+x$ 各在区间 $(-2l,-l)$ 与 $(2l,3l)$ 上改变,于是公式(28) 给出 $\theta_2(x)$ 在区间 $(2l,3l)$ 上的值以及 $\theta_1(x)$ 在区间 $(-2l,-l)$ 上的值.这样开拓下去,我们相信公式(28) 给出函数 $\theta_1(x)$ 当 $x\leqslant 0$ 时的确定的值以及 $\theta_2(x)$ 当 $x\geqslant 0$ 时的确定的值,这就是 $t>0$ 时,我们应用公式(12) 所需要的.同理,若 x 在区间 $(-l,0)$ 上改变,则公式(28) 的左边已知,于是我们得到 $\theta_2(x)$ 在区间 $(-l,0)$ 上的值以及 $\theta_1(x)$ 在区间 $(l,2l)$ 上的值.然后,x 在区间 $(-2l,-l)$ 上改变,就得到 $\theta_2(x)$ 在区间 $(-2l,-l)$ 上的值以及 $\theta_1(x)$ 在区间 $(2l,3l)$ 上的值等,就是说,公式(28) 给出当 x 取所有的实数值时 $\theta_1(x)$ 与 $\theta_2(x)$ 的确定的值.

如果我们在式(28)的第二个方程中用 $l+x$ 来替代 x，并利用第一个方程，就得到

$$\theta_2(x+2l)=-\theta_1(-x)=\theta_2(x)$$

这就看出了函数 $\theta_2(x)$ 以 $2l$ 为周期. 之后再由式(28)中第一个方程可以说明函数 $\theta_1(x)$ 也以 $2l$ 为周期. 由此推出，为了固定当 x 取所有的实值时 $\theta_1(x)$ 与 $\theta_2(x)$ 的值，只需作出上面所叙述的这两个函数的开拓的第一步，就是只要 x 在区间 $(0,l)$ 上改变. 公式(28)给出 $\theta_1(x)$ 在区间 $(-l,0)$ 上的值以及 $\theta_2(x)$ 在区间 $(l,2l)$ 上的值，就是说，这就知道了 $\theta_1(x)$ 在区间 $(-l,l)$ 上的值以及 $\theta_2(x)$ 在区间 $(0,2l)$ 上的值. 这两个函数的其余的值可以由它们的周期性得来.

用这样的方法确定了函数 $\theta_1(x)$ 与 $\theta_2(x)$，就不难开拓函数 $\varphi(x)$ 与 $\varphi_1(x)$，因为根据方程(26)，我们有

$$\varphi(x)=\theta_1(x)+\theta_2(x);\frac{1}{a}\int_0^x\varphi_1(z)\mathrm{d}z=\theta_2(x)-\theta_1(x)$$

就是说

$$\varphi_1(x)=a[\theta'_2(x)-\theta'_1(x)]$$

在条件(28)的第一个方程中用 $-x$ 来替代 x，并求微商，就得到

$$\theta_1(x)=-\theta_2(-x);\theta'_1(-x)=\theta'_2(x);\theta'_1(x)=\theta'_2(-x)$$

利用这些关系式以及(28)中第一个方程，可以写成

$$\varphi(-x)=\theta_1(-x)+\theta_2(-x)=-\theta_2(x)-\theta_1(x)=-\varphi(x)$$

$$\varphi_1(-x)=a[\theta'_2(-x)-\theta'_1(-x)]=a[\theta'_1(x)-\theta'_2(x)]=-\varphi_1(x)$$

就是说，对于 $\varphi(x)$ 与 $\varphi_1(x)$，我们得到非常简单的开拓规律：它们依照奇函数的规律，由区间 $(0,l)$ 开拓到区间 $(-l,0)$，然后以 2π 为周期继续开拓.

我们再回到 xOt 平面，由于弦是有界的，我们只需考虑上半平面 $t>0$ 的界于直线 $x=0$ 与 $x=l$ 之间的一竖条(图 131). 如上所述，已经对于 x 的所有的值确定了函数 $\theta_1(x)$ 与 $\theta_2(x)$，现在我们来看解(12)的物理意义. 过点 O 与点 L 作特征线直到与竖条的对边相遇，再过所得到的交点作特征线直到与对边相遇，如此作下去.

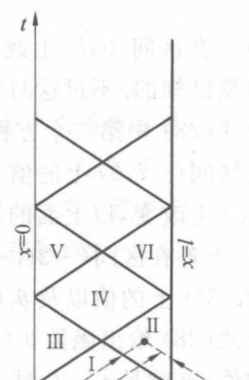

图 131

这样就把这竖条分为区域 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, …. 区域 Ⅰ 中的点对应于弦上那样的点，对于这些点来讲，只是内点的扰动来得及达到这些点，而虚构的弦的无穷部分的补充扰动对于运动没有影响. 在区域 Ⅰ 以外的点，就有由弦的虚构部分传来的扰动. 例如，我们取区域 Ⅱ 中一个点 $M_0(x_0,t_0)$.