普通高等教育基础课规划教材

上册

微积分
同步学习指导

钟漫如　编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育基础课规划教材

微积分同步学习指导

上册

钟漫如　编

机械工业出版社

本书是理工科微积分或高等数学课程的学习指导书，以与学过的知识“同步”的方式解答问题．对于初学者来说，“同步”的方式可以帮助他们更好地理解和巩固当时所学的知识．为了达到同步学习的目的，编者选择了机械工业出版社出版的由陈一宏、张润琦主编的《微积分》（上、下册）作为配套教材，本书与教材一致，也分为上、下册，上册内容包括函数的极限与连续、导数与微分、微分中值定理及其应用、一元函数积分学及常微分方程，下册内容包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、曲线积分和曲面积分及级数．

考虑到读者在阶段复习时已经具备了用更多的知识解决问题的能力，书中有些题采用一题多解，但在编排上把“同步”的解法始终放在“法1”中解答．因此，本书也可以作为准备报考硕士研究生的考生考前综合复习的参考书．

配套教材是依据教育部颁布的《高等数学课程教学基本要求》编写的，因而使用其他教材的读者，选择本书也是适合的．

图书在版编目（CIP）数据

微积分同步学习指导．上册/钟漫如编．—北京：机械工业出版社，2016.11

普通高等教育基础课规划教材

ISBN 978-7-111-55243-7

Ⅰ.①微…　Ⅱ.①钟…　Ⅲ.①微积分-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 257492 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：郑　玫　责任编辑：郑　玫　李　乐
责任校对：刘秀芝　封面设计：路恩中
责任印制：孙　炜
北京京丰印刷厂印刷
2017 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
190mm×210mm · 13.667 印张 · 458 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-55243-7
定价：39.80 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
服务咨询热线：010-88379833	机 工 官 网：www.cmpbook.com
读者购书热线：010-88379649	机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
	教育服务网：www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版	金 书 网：www.golden-book.com

前言

微积分或高等数学是高等院校非数学专业的理工科学生的一门重要的基础课，学好这门课程对后续课程以及专业课程的学习有着很大的帮助.

由于微积分内容多、课时紧，要想学好这门课程，解题指导是重要的不可或缺的一个环节，为了帮助学生厘清概念，抓住重点，系统地掌握微积分的思想、方法和技巧，编者根据近 30 年微积分课程的教学经验，编写了这本《微积分同步学习指导》.

一本指导书如果没有把解题的方法与学生当时是否具备相关的知识相联系，使用起来就会事倍功半. 因为对一个初学者来说，他是无法知道自己之前学习的知识能否解决目前的问题，会在看解答之前苦思冥想，浪费很多时间. 更糟糕的是，当自己解决不了问题时，会对自己的能力产生怀疑——这是学好这门课程最忌讳的一点. 这本指导书在解题时充分考虑了这个问题，以与学过的知识“同步”的方式解答问题，同时这本指导书又考虑到读者在阶段复习的时候可以用更多的知识解决问题，开阔思路，书中有些题采用了一题多解，在编排上把“同步”的解法始终放在“法 1”中解答，其他解法放在“法 1”之后.

为了达到同步学习的目的，编者选择了机械工业出版社出版的由陈一宏、张润琦主编的《微积分》（上、下册）作为配套主教材（简称主教材），主教材每节的习题难易适中、理论与计算兼有，内容丰富全面. 这本指导书按照“熟练掌握、掌握、理解、会、了解”列出了各章内容学习的程度，同时以主要篇幅对每章所有习题（除主教材标有“ * ”号的内容）进行分析和详细解答，并提示数学思维的过程，总结解题规律，从而起到对理论教学内容的消化和巩固的作用. 对于使用其他主教材的初学者来说，这本指导书可以起到同样的作用，因为所有的理工科高等数学课程都是依据教育部颁布的《高等数学课程教学基本要求》编写的，只是在内容的编排顺序上略有不同而已. 初学者选择此书可得事半功倍之效.

本书既可以作为微积分初学者的学习指导书，同时也可以作为准备报考硕士研究生的考生考前综合复习的参考书. 主教材每一章最后一节为“综合例题”，精选了一些历年研究生考题中的综合题来讲解，同时配置了难度深、综合性强的习题，本书对这部分习题也进行了详细的解答，目的在于起到对理论教学内容的深入和提高的作用.

前言

由于主教材中习题较多，受篇幅所限，只能从其每节的习题中挑选较难或具有代表性的题作为典型例题，同时为了便于读者参考，本书保持了主教材原有的习题顺序，典型例题只标出题号.

为了能够检验读者掌握的程度，每一节内容都为读者精选了自测题，并为自测题提供了详细的解答.

为了解答过程的连贯，在编排中必要时对涉及的知识点或公式在解答之后用【注】列出；为了节省篇幅，有些题一题多解时，重复的步骤在【续】中.

本书的特色：一是解题方法与所学内容完全同步；二是对习题的解题思路进行总结，对习题中容易出现的问题进行分析，所做的提示是直接针对实际题目提出的.

为了与主教材配套和方便使用，《微积分同步学习指导》也分为上、下两册.

由于编者水平有限，书中不足和错误在所难免，恳请广大读者批评指正.

编　者

2016 年春 于北京理工大学

目录

0 第0章 预备知识

一、学习要求

1. 理解函数的概念，会求函数的定义域、函数值，掌握函数的其他表示方法：由参数方程及极坐标方程表示的函数.

2. 了解函数的单调性、奇偶性、周期性和有界性.

3. 理解分段函数、复合函数及反函数的概念；会求分段函数的定义域、函数值，了解几个特殊分段函数（符号函数、取整函数、狄利克雷函数、取最值函数）的定义域、值域和图像；熟练掌握复合函数的复合过程；了解函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 之间的关系（定义域、值域、图像）；会求单调函数的反函数.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图像.

5. 理解初等函数的概念.

6. 会建立简单实际问题的函数关系式.

7. 了解双曲函数和双曲反函数的定义域、值域、图像及其相关性质.

二、典型例题

0.2 函数

P5 第 5 题、P5 第 6 题、P6 第 8 题、P7 第 13 题、P9 第 19 题、P9 第 20（6）题、P10 第 22（4）题.

三、习题及解答

0.1 集合与区间

无习题.

0.2 函数

1. 解下列不等式，用区间表示 x 的范围.

(1) $\left|\frac{x}{1+x}\right|>\frac{x}{1+x}$；　　(2) $|x-1|<|x+1|$；

(3) $0<|x-2|<4$；　　(4) $|x+1|\geqslant 2$.

【解】 (1) 当 $\frac{x}{1+x}<0$ 时不等式成立，故有 $\begin{cases}x>0\\1+x<0\end{cases}\Rightarrow$ 无解；

或有 $\begin{cases}x<0\\x>-1\end{cases}$，得 $x\in(-1,0)$.

(2) $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|<1$，即 $-1<\frac{x-1}{x+1}<1\Rightarrow -1<1-\frac{2}{x+1}<1$

$\Rightarrow -1<-\frac{1}{x+1}<0\Rightarrow 1<x+1<+\infty\Rightarrow 0<x<+\infty$，即 $x\in(0,+\infty)$.

(3) $-4<x-2<4$，且 $x-2\neq 0\Rightarrow -2<x<6$，且 $x\neq 2$；即 $x\in(-2,2)\cup(2,6)$.

(4) $x+1\leqslant -2$，或 $x+1\geqslant 2$；故 $x\leqslant -3$，或 $x\geqslant 1$，即 $x\in(-\infty,-3]\cup[1,+\infty)$.

2. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\frac{1}{\lg(x+1)}$；　　(2) $y=\arccos\frac{2x}{1+x}$；

(3) $y=\sqrt{\tan\frac{x}{2}}$；　　(4) $y=\ln\frac{x+2}{x-1}+3$；

(5) $y=\arcsin(2+3^x)$；　　(6) $y=\sqrt{3-x}+\arctan\frac{1}{x}$；

(7) $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{16-x^2}$；　　(8) $y=\sqrt[3]{\frac{1}{x-2}}-\log_a(2x-3)$ $(a>1)$；

(9) $y=\frac{1}{[x+1]}$；　　(10) $y=(x+|x|)\sqrt{x\sin^2\pi x}$.

【解题要点】 掌握基本初等函数及一些特殊的分段函数（符号函数、取整函数、取最值函数等）的定义域及值域.

【解】（1）$x+1>0$ 且 $x+1\neq 1$，故 $x>-1$ 且 $x\neq 0$，因而 $x\in(-1,0)\cup(0,+\infty)$.

（2）$-1\leqslant\dfrac{2x}{1+x}\leqslant 1\Rightarrow -1\leqslant 2-\dfrac{2}{1+x}\leqslant 1\Rightarrow -3\leqslant -\dfrac{2}{1+x}\leqslant -1$

$\Rightarrow\dfrac{1}{3}\leqslant\dfrac{1+x}{2}\leqslant 1\Rightarrow\dfrac{2}{3}\leqslant 1+x\leqslant 2\Rightarrow -\dfrac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$，故$x\in\left[-\dfrac{1}{3},1\right]$.

（3）$\tan\dfrac{x}{2}\geqslant 0\Rightarrow k\pi\leqslant\dfrac{x}{2}<\dfrac{\pi}{2}+k\pi\quad(k\in\mathbf{Z})$

$\Rightarrow 2k\pi\leqslant x<\pi+2k\pi\quad(k\in\mathbf{Z})$，

故 $x\in[2k\pi,\pi+2k\pi)(k\in\mathbf{Z})$.

（4）$\dfrac{x+2}{x-1}>0$，且 $x\neq 1$，故由 $\begin{cases}x+2<0\\x-1<0\end{cases}$ 得 $x<-2$，或由 $\begin{cases}x+2>0\\x-1>0\end{cases}$ 得 $x>1$，故 $x\in(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$.

（5）$-1\leqslant 2+3^x\leqslant 1\Rightarrow -3\leqslant 3^x\leqslant -1$，由于 $3^x>0$，故此函数的定义域为空集.

（6）$3-x\geqslant 0$ 且 $x\neq 0$，$x\leqslant 3$ 且 $x\neq 0$，故 $x\in(-\infty,0)\cup(0,3]$.

（7）$\sin x\geqslant 0$ 且 $16-x^2\geqslant 0$

$\Rightarrow 2k\pi\leqslant x\leqslant\pi+2k\pi\quad(k\in\mathbf{Z})$ 且 $-4\leqslant x\leqslant 4$

$\Rightarrow -4\leqslant x\leqslant -\pi$ 或 $0\leqslant x\leqslant\pi$，故 $x\in[-4,-\pi]\cup[0,\pi]$.

（8）$x-2\neq 0$ 且 $2x-3>0\Rightarrow x>\dfrac{3}{2}$ 且 $x\neq 2$，故 $x\in\left(\dfrac{3}{2},2\right)\cup(2,+\infty)$.

（9）$[x+1]\neq 0$，即 $x+1\notin[0,1)\Rightarrow x\notin[-1,0)$，故

$$x\in(-\infty,-1)\cup[0,+\infty).$$

（10）该式有意义必有 $x\sin^2\pi x\geqslant 0$，由于 $\sin^2\pi x\geqslant 0$，所以当 $x\geqslant 0$ 时，$x\sin^2\pi x\geqslant 0$；当 $x<0$ 时，使得 $\sin^2\pi x=0$ 的 $x=-1,-2,-3,\cdots$；故定义域为$\{x\mid x\geqslant 0$，或 $x=-1,-2,-3,\cdots\}$.

3. 下列各组函数相同吗?

（1）$\lg(x^2)$ 与 $2\lg x$；　　（2）$\sqrt{x^2}$ 与 x；

（3）$\frac{x^2-1}{x+1}$与$x-1$；（4）$\sin(\arcsin x)$与x；

（5）1与$\sec^2 x-\tan^2 x$；（6）$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$与$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

【解题要点】 函数的两个要素是：定义域、对应法则，所以两个函数相同必须这两个要素都相同. 由于当两个函数值域不同时，这两个函数的定义域和对应法则中必有一个是不相同的，因而，当两个函数的定义域、对应法则和值域这三项有一个不相同时，说明它们不是同一个函数.

【解】 这6组函数都不相同.

（1）$\lg(x^2)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而$2\lg x$的定义域为$(0,+\infty)$.

（2）$\sqrt{x^2}$的值域为$[0,+\infty)$，而x的值域为$(-\infty,+\infty)$.

（3）$\frac{x^2-1}{x+1}$的定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，而$x-1$的定义域为$(-\infty,+\infty)$.

（4）$\sin(\arcsin x)$的定义域和值域为$[-1,1]$，而x的定义域和值域为$(-\infty,+\infty)$.

（5）1的定义域为$(-\infty,+\infty)$，而$\sec^2 x-\tan^2 x$的定义域为$\left\{x \mid x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\quad(k\in\mathbf{Z})\right\}$.

（6）$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$的定义域为$[1,+\infty)$，而$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$的定义域为$(-\infty,-1)\cup[1,+\infty)$.

4. 设$f(x)=\begin{cases}2x & -1<x<0\\ 2 & 0\leqslant x<1\\ x-1 & 1\leqslant x\leqslant 3\end{cases}$，求$f(3)$，$f(2)$，$f(0)$，$f(0.5)$，$f(-0.5)$.

【解】 $f(3)=(x-1)\big|_{x=3}=2$；　$f(2)=(x-1)\big|_{x=2}=1$；

$f(0)=(2)\big|_{x=0}=2$；　$f(0.5)=(2)\big|_{x=0.5}=2$；

$f(-0.5)=(2x)\big|_{x=-0.5}=-1$.

5. 设$f(x)=\begin{cases}2x+1 & x\geqslant 0\\ x^2+4 & x<0\end{cases}$，求$f(x-1)$和$f(x+1)$.

【解】 $f(x-1)=\begin{cases}2(x-1)+1 & x-1\geqslant 0\\ (x-1)^2+4 & x-1<0\end{cases}=\begin{cases}2x-1 & x\geqslant 1\\ x^2-2x+5 & x<1\end{cases}$；

$f(x+1)=\begin{cases}2(x+1)+1 & x+1\geqslant 0\\ (x+1)^2+4 & x+1<0\end{cases}=\begin{cases}2x+3 & x\geqslant -1\\ x^2+2x+5 & x<-1\end{cases}$.

6. 已知$f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}\,(x<0)$，求$f(x)$.

【解题要点】 给出$f(g(x))$的表达式，求$f(x)$的表达式时，利用函数的表示与符号无关的性质，因而有如下方法：①令$t=g(x)$，再把t换为x；②当$g(x)$表达式较为复杂时，则利用代数恒等式把$f(g(x))$的表达式改写为关于$g(x)$的函数（见 P5 0.2 节第 7(2)(3) 题解法），再按方法①做.

【解】 令$t=\dfrac{1}{x}\ (t<0)$，则

$$f(t)=\frac{1}{t}+\sqrt{1+\frac{1}{t^2}}=\frac{1}{t}(1-\sqrt{1+t^2}),$$

故
$$f(x)=\frac{1}{x}(1-\sqrt{1+x^2})\ (x<0).$$

7. (1) 设$f(x-2)=x^2-2x+3$，求$f(x+2)$；

(2) 设$f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}(|x|\geqslant 2)$，求$f(x)$；

(3) 设$f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x$，求$f(\cos x)$.

【解】 (1) 法1：
$$\begin{aligned}f(x+2)&=f((x+4)-2)\\&=(x+4)^2-2(x+4)+3\\&=x^2+6x+11.\end{aligned}$$

法2：$f(x-2)=x^2-2x+3=(x-2+1)^2+2$，即

$$f(x)=(x+1)^2+2,$$

故
$$f(x+2)=(x+2+1)^2+2=(x+3)^2+2.$$

(2) $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$，令$t=x+\dfrac{1}{x}$，得

$$f(t)=t^2-2,$$

由于$|t|>2$，故$f(x)=x^2-2(|x|>2)$.

(3) $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=2-(1-\cos x)=2-2\sin^2\dfrac{x}{2}=2\left(1-\sin^2\dfrac{x}{2}\right)$，令 $t=\sin\dfrac{x}{2}$，得 $f(t)=2(1-t^2)$，

所以 $f(x)=2(1-x^2)$，故 $f(\cos x)=2(1-\cos^2 x)=2\sin^2 x$.

8. 若 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，试求 $f(x^2)$，$f(\sin x)$，$f(x+a)$，$f(x+a)+f(x-a)\,(a>0)$ 的定义域.

【解题要点】 已知 $f(x)$ 的定义域 D，求 $f(g(x))$ 的定义域时，由 $g(x)\in D$ 解出 x 的取值范围即可；当出现多个取值范围时，则取其交集.

【解】 $f(x^2)$：由 $0\leqslant x^2\leqslant 1$，得 $-1\leqslant x\leqslant 1$；

$f(\sin x)$：由 $0\leqslant \sin x\leqslant 1$，得 $2k\pi\leqslant x\leqslant(2k+1)\pi\,(k\in\mathbf{Z})$；

$f(x+a)$：由 $0\leqslant x+a\leqslant 1$，得 $-a\leqslant x\leqslant 1-a$；

$f(x+a)+f(x-a)$：由 $0\leqslant x-a\leqslant 1$，得 $a\leqslant x\leqslant 1+a$，

即 $\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\ a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}$，

由于 $a>0$，故当 $1-a<a$ 时，即 $a>0.5$，$D=\varnothing$；

当 $1-a\geqslant a$ 时，即 $a\leqslant 0.5$，D 非空.

故当 $a=0.5$ 时，$D=\{0.5\}$，当 $0<a<0.5$ 时，$D=[a,1-a]$.

9. 画出下列方程所表示的曲线的图形.

(1) $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}\quad(a>0,t\in[0,2\pi])$；　(2) $\rho=\sin\theta$；

(3) $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases}\quad(a,b>0,t\in[0,2\pi])$.

【解】 (1) 图 0-1；　(2) 图 0-2；　(3) 图 0-3.

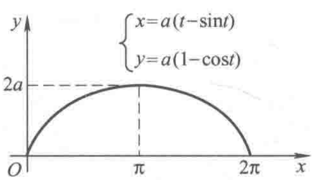

图 0-1

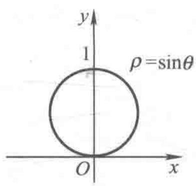

图 0-2

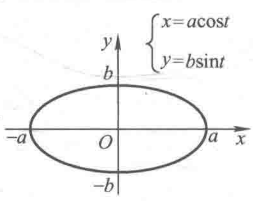

图 0-3

10. 下列函数是否具有奇偶性？

(1) $y=(1-x)^{\frac{2}{3}}(1+x)^{\frac{2}{3}}$；　(2) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；

(3) $y=x\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$；　(4) $y=2^x$.

【解】 (1) $f(-x)=(1+x)^{\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}=f(x)$，故其为偶函数；

(2) $f(-x)=\ln(\sqrt{1+x^2}-x)=\ln\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$

$$=-\ln(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x),$$

故其为奇函数；

(3) $f(-x)=(-x)\dfrac{e^{-x}+1}{e^{-x}-1}=(-x)\dfrac{1+e^{x}}{1-e^{x}}=x\dfrac{e^{x}+1}{e^{x}-1}=f(x)$，故其为偶函数；

(4) $f(-x)=2^{-x}\neq f(x)$，$f(-x)=2^{-x}\neq -f(x)$，故其为非奇非偶函数.

11. 证明：两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，一个偶函数与一个奇函数的乘积是奇函数.

【证明】 设 $F(x)=f(x)g(x)$，

若 $f(x)$，$g(x)$ 都是偶函数，即 $f(-x)=f(x)$，$g(-x)=g(x)$，

则 $F(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)g(x)=F(x)$，即 $F(x)$ 是偶函数；

若 $f(x)$，$g(x)$ 都是奇函数，即

$$f(-x)=-f(x),\ g(-x)=-g(x),$$

则 $F(-x)=f(-x)g(-x)=[-f(x)]\cdot[-g(x)]=f(x)g(x)=F(x)$，即 $F(x)$ 是偶函数；

若 $f(x)$ 是偶函数，$g(x)$ 是奇函数，即

$$f(-x)=f(x),\ g(-x)=-g(x),$$

则 $F(-x)=f(-x)g(-x)=f(x)\cdot[-g(x)]=-f(x)g(x)=-F(x)$，即 $F(x)$ 是奇函数.

12. 对于任一定义在对称区间 $(-l,l)$ 上的函数 $f(x)$，证明：$g(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$ 是偶函数，$h(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$ 是奇函数.

【证明】 $g(-x)=\dfrac{1}{2}[f(-x)+f(x)]=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]=g(x)$，故 $g(x)$ 是偶函数；

$h(-x)=\dfrac{1}{2}[f(-x)-f(x)]=-\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=-h(x)$，

故 $h(x)$ 是奇函数.

13. 证明：任一定义在对称区间 $(-l,l)$ 上的函数 $f(x)$ 总可以表示为一个偶函数与一个奇函数的和.

【证明】 设 $g(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$，　$h(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-$

$f(-x)]$,

由 P7 0.2 节第 12 题知 $g(x)$ 是偶函数，$h(x)$ 是奇函数，则 $f(x)=g(x)+h(x)$.

14. 设函数 $y=f(x)$ 是以 T 为周期的周期函数，证明：函数 $f(\omega x)$（$\omega>0$，常数）是以 T/ω 为周期的周期函数.

【证明】 因为 $y=f(x)$ 是以 T 为周期的，则有 $f(x+T)=f(x)$，设 $g(x)=f(\omega x)$，则 $g(x+T/\omega)=f(\omega(x+T/\omega))=f(\omega x+T)=f(\omega x)=g(x)$.

15. 已知 $f(x)$ 以 2 为周期，且在 $[-1,1)$ 上 $f(x)=\begin{cases}x^2 & -1\leqslant x\leqslant 0\\ 0 & 0<x<1\end{cases}$，在 $[-5,5)$ 上画出 $y=f(x)$ 的图形.

【解】 见图 0-4.

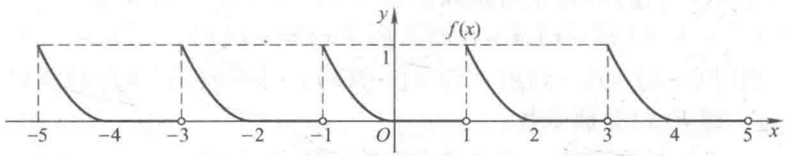

图 0-4

16. 设 $f(x)=x^2$，$\varphi(x)=2^x$，求 $f(\varphi(x))$，$\varphi(f(x))$.

【解】 $f(\varphi(x))=(2^x)^2=2^{2x}=4^x$，$\varphi(f(x))=2^{x^2}$.

17. 设 $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求 $f(f(x))$，$f(f(f(x)))$.

【解】 $f(f(x))=\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}=1-\dfrac{1}{x}$，$f(f(f(x)))=\dfrac{1}{1-\left(1-\dfrac{1}{x}\right)}=x$.

18. 设 $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$，$g(x)=\begin{cases}1 & x<10\\ 5 & x>10\end{cases}$，证明：$g(x)=2f(x-10)+3$.

【证明】 $f(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 1 & x>0\end{cases}$,

$$f(x-10)=\begin{cases}-1 & x-10<0\\ 1 & x-10>0\end{cases}=\begin{cases}-1 & x<10\\ 1 & x>10\end{cases},$$

$$2f(x-10)+3=\begin{cases}2\times(-1)+3 & x<10\\ 2\times 1+3 & x>10\end{cases}=\begin{cases}1 & x<10\\ 5 & x>10\end{cases}=g(x).$$

19. 设 $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & |x|=1\\ -1 & |x|>1\end{cases}$，$g(x)=\mathrm{e}^x$，求 $f(g(x))$，$g(f(x))$，并作图.

【解题要点】 求两个分段函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 的复合函数 $y=f(g(x))$，实际上与初等函数的复合一样，都是将 $u=g(x)$ 代入 $y=f(u)$（见 P8 0.2 节第 16、17 题），但要弄清分段函数 $y=f(u)$ 定义域的各个分段区间上对应的 $g(x)$ 的定义区间.

【解】 $f(g(x))=\begin{cases}1 & |g(x)|<1\\ 0 & |g(x)|=1\\ -1 & |g(x)|>1\end{cases}=\begin{cases}1 & |\mathrm{e}^x|<1\\ 0 & |\mathrm{e}^x|=1\\ -1 & |\mathrm{e}^x|>1\end{cases}=\begin{cases}1 & x<0\\ 0 & x=0,\\ -1 & x>0\end{cases}$

见图 0-5.

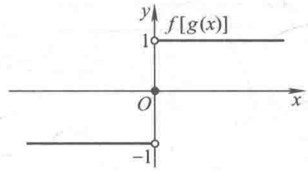

图 0-5

$$g(f(x))=\mathrm{e}^{f(x)}=\begin{cases}\mathrm{e}^1 & |x|<1\\ \mathrm{e}^0 & |x|=1\\ \mathrm{e}^{-1} & |x|>1\end{cases}=\begin{cases}\mathrm{e} & |x|<1\\ 1 & |x|=1\\ \mathrm{e}^{-1} & |x|>1\end{cases}$$，见图 0-6.

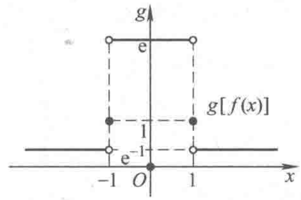

图 0-6

20. 写出下列初等函数的复合过程.

（1）$y=\mathrm{e}^{x^2}$；　（2）$y=\tan^3(1-3x)$；

（3）$y=(\sin\sqrt{1-2x})^2$；　（4）$y=\arctan\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{2}}$；

（5）$y=4^{(3x-2)^5}$；　（6）$y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

【解题要点】 分解复合函数的复合过程，其目的在于为复合函数的求导做准备. 因而要求在分解时把每个函数写为基本初等函数或者常数与基本初等函数四则运算的形式，这样就可以运用复合函数求导法，并结合基本导数公式及导数四则运算法则顺利地求出复合函数的导数.

【解】（1）$y=\mathrm{e}^u$，$u=x^2$；

（2）$y=u^3$，$u=\tan v$，$v=1-3x$；

（3）$y=u^2$，$u=\sin v$，$v=w^{\frac{1}{2}}$，$w=1-2x$；

（4）$y=\arctan u$，$u=v^{\frac{1}{3}}$，$v=\dfrac{x-1}{2}$；

（5）$y=4^u$，$u=v^5$，$v=3x-2$；

（6）$y=\ln u$，$u=x+v$，$v=w^{\frac{1}{2}}$，$w=1+x^2$.

21. 已知 $y=u^2$，$u=\sqrt[3]{x+1}$，$x=\arcsin t$，把 y 表示为 t 的函数.

【解】 $y=u^2=(\sqrt[3]{x+1})^2=(\sqrt[3]{\arcsin t+1})^2$.

22. 求下列函数的反函数.

(1) $y=\dfrac{2^x+1}{2^x}$；　　(2) $y=1+\lg(x+2)$；

(3) $y=\cosh x,(x\in[0,+\infty))$；　　(4) $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x\geqslant 0\\ x^3 & x<0\end{cases}$；

(5) $y=f(x)=\dfrac{ax-b}{cx-a}$；　　(6) $f(x)=\begin{cases}x & -\infty<x<1\\ x^2 & 1\leqslant x\leqslant 4\\ 2^x & 4<x<+\infty\end{cases}$.

【解题要点】 求分段函数的反函数，要分段考虑.

【解】 (1) $y=1+\dfrac{1}{2^x}\Rightarrow 2^x=\dfrac{1}{y-1}\Rightarrow x=-\log_2(y-1)$，

故反函数 $y=-\log_2(x-1)$.

(2) $\lg(x+2)=y-1\Rightarrow x+2=10^{y-1}\Rightarrow x=10^{y-1}-2$，

故反函数 $y=10^{x-1}-2$.

(3) $y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\dfrac{e^{2x}+1}{2e^x}(y\geqslant 1)\Rightarrow(e^x)^2-2ye^x+1=0$，

令 $u=e^x\Rightarrow u^2-2yu+1=0\Rightarrow u=\dfrac{2y\pm\sqrt{(-2y)^2-4}}{2}=y\pm\sqrt{y^2-1}$，

由于 $x\in[0,+\infty)$，故 $u\in[1,+\infty)$，而 $y-\sqrt{y^2-1}$ 是单调减少函数，其最大值为 1，所以 $e^x=y+\sqrt{y^2-1}\Rightarrow x=\ln(y+\sqrt{y^2-1})$，

故反函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

(4) 当 $x\geqslant 0$ 时，$y\geqslant 1$，由 $y=2x+1$，得 $x=\dfrac{y-1}{2}$；

当 $x<0$ 时，$y<0$，由 $y=x^3$，得 $x=\sqrt[3]{y}$；

即 $x=\begin{cases}\dfrac{y-1}{2} & y\geqslant 1\\ \sqrt[3]{y} & y<0\end{cases}$，　故反函数 $y=\begin{cases}\dfrac{x-1}{2} & x\geqslant 1\\ \sqrt[3]{x} & x<0\end{cases}$.

(5) $cxy-ay=ax-b\Rightarrow(cy-a)x=ay-b\Rightarrow x=\dfrac{ay-b}{cy-a}$，

即反函数 $y=\dfrac{ax-b}{cx-a}$.

(6) 当 $-\infty<x<1$ 时，$-\infty<y<1$，由 $y=x$，得 $x=y$；

当 $1\leqslant x\leqslant 4$ 时，$1\leqslant y\leqslant 16$，由 $y=x^2$，得 $x=\sqrt{y}$；

当 $4<x<+\infty$ 时，$16<y<+\infty$，由 $y=2^x$，得 $x=\log_2 y$；

即 $x=\begin{cases} y & -\infty<y<1 \\ \sqrt{y} & 1\leqslant y\leqslant 16 \\ \log_2 y & 16<y<+\infty \end{cases}$，故反函数 $y=\begin{cases} x & -\infty<x<1 \\ \sqrt{x} & 1\leqslant x\leqslant 16 \\ \log_2 x & 16<x<+\infty \end{cases}$.

23. 已知函数 $y=f(x)$ 的图形，作出下列各函数的图形.

(1) $y=-f(x)$，$y=f(-x)$；　(2) $y=f(x-x_0)$，$y=y_0+f(x)$.

【解】 (1) $y=-f(x)$ 与原图形关于 x 轴对称，$y=f(-x)$ 与原图形关于 y 轴对称. 见图 0-7.

(2) $y=f(x-x_0)$ 把原图形向左 ($x_0<0$) 或向右 ($x_0>0$) 平行移动了 $|x_0|$，$y=y_0+f(x)$ 把原图形向上 ($y_0>0$) 或向下 ($y_0<0$) 垂直移动了 $|y_0|$，见图 0-8.

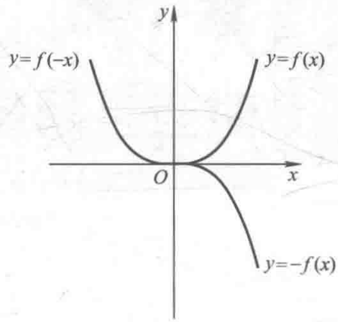

图 0-7

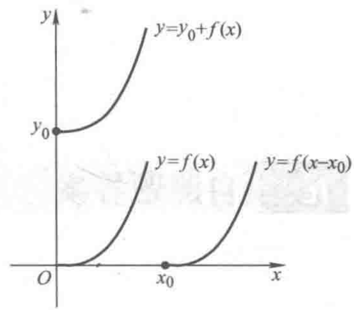

图 0-8

24. 自一圆铁片中心处剪下中心角为 α 的扇形，用此扇形铁片围成一个无底圆锥，试将此圆锥的容积 V 表示成角度 α 的函数（设圆铁片的半径为 R）.

【解】 剪下的扇形如图0-9 所示，设圆锥的高和底半径分别为 h 和 r，见图 0-10，则有 $2\pi r=\alpha R$，即 $r=\dfrac{\alpha R}{2\pi}$，　又

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot h=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot\sqrt{R^2-r^2},$$

所以 $$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{\alpha R}{2\pi}\right)^2\cdot\sqrt{R^2-\left(\frac{\alpha R}{2\pi}\right)^2}=\frac{\alpha^2R^3}{24\pi^2}\cdot\sqrt{4\pi^2-\alpha^2}.$$

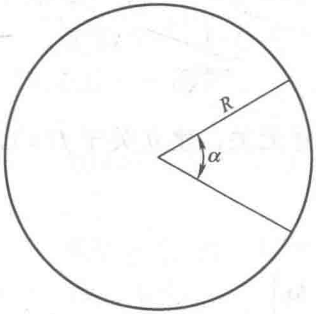

图 0-9

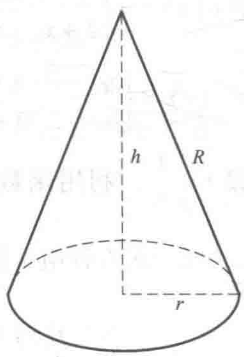

图 0-10