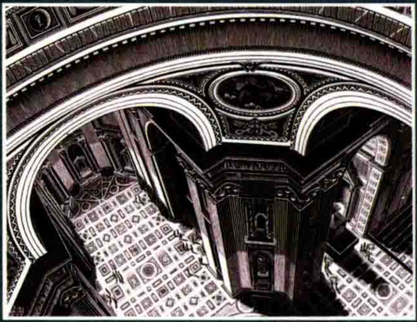
高等数学习题集
精 品 系 列

# 超越普里瓦洛夫

## 微分、解析函数、导数卷

● 刘培杰数学工作室 编



普里瓦洛夫（Привалов,Иван Иванович），苏联人。1891 年 2 月 11 日生于别依津斯基。1913 年毕业于莫斯科大学后，曾在萨拉托夫大学工作。1918 年获数学物理学博士学位，并成为教授。1922 年回到莫斯科，先后在莫斯科大学和航空学院任教。1939 年成为苏联科学院通讯院士。1941 年 7 月 13 日逝世。

普里瓦洛夫的研究工作主要涉及函数论与积分方程。有许多研究成果是他与鲁金共同取得的，他们用实变函数论的方法研究解析函数的边界特性与边界值问题。1918 年他在学位论文《关于柯西积分》中，推广了鲁金－普里瓦洛夫唯一性定理，证明了柯西型积分的基本引理和奇异积分定理。他是苏联较早从事单值函数论研究的数学家之一，所谓黎曼－普里瓦洛夫问题就是他的研究成果之一。他还写了三角级数论及次调和函数论方面的著作。他发表了 70 多部专著和教科书，其中《复变函数引论》、《解析几何》都是多次重版的著作，并且被译成多种外文出版。



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

# 超越普里瓦洛夫

## 微分、解析函数、导数卷

● 刘培杰数学工作室　编

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

CHAOYUE PULIWALUOFU—WEIFEN JIEXI HANSHU DAOSHU JUAN

## 内容简介

本书对于积分给予了更深层次的介绍，总结了一些计算积分的常用方法和惯用技巧，叙述严谨、清晰、易懂.

本书适合高等院校数学与应用数学专业学生学习，也可供数学爱好者及教练员作为参考.

**图书在版编目(CIP)数据**

超越普里瓦洛夫. 微分、解析函数、导数卷/刘培杰数学工作室编. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018. 1

ISBN 978-7-5603-6936-5

Ⅰ. ①超…　Ⅱ. ①刘…　Ⅲ. ①微分②解析函数③导数　Ⅳ. ①O1②O172. 1③O174. 55

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 218200 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　张　佳
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress. hit. edu. cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16　印张 17　字数 317 千字
版　　次　2018 年 1 月第 1 版　2018 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-6936-5
定　　价　48.00 元

---

# 目录

# 题目及解答

**1** 证明：$f(z)=z^n$（$n$ 为自然数）在整个 $z$ 平面上任一点可导.

**证** 因为

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}(C_n^1 z^{n-1}+C_n^2 z^{n-2}\Delta z+\cdots+C_n^n\Delta z^{n-1})$$

$$=C_n^1 z^{n-1}=nz^{n-1}$$

**2** 证明：函数 $f(z)=\operatorname{Re} z$ 在 $z$ 平面上的任何点都不可导.

**证** 因为

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\operatorname{Re}(z+\Delta z)-\operatorname{Re} z}{\Delta z}=\frac{\Delta x}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}$$

所以，当 $\Delta z$ 取实数值而趋向零时（即 $z+\Delta z$ 沿平行于实轴的方向趋向 $z$ 时），$\frac{\Delta f}{\Delta z}\to 1$；当 $z+\Delta z$ 取纯虚数而趋向零时（即 $z+\Delta z$ 沿平行于虚轴的方向趋向 $z$ 时），$\frac{\Delta f}{\Delta z}\to 0$. 这表明 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}$ 不存在，即 $f(z)=\operatorname{Re} z$ 不可导.

**3** 函数 $f(z)=|z|$ 在整个复平面上是连续的，试用定义证明：它在复平面上任一点处均不可导.

**证法一** 由导数定义，有

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{|z+h|-|z|}{h}$$

$$=\frac{(z+h)\overline{(z+h)}-z\bar{z}}{h(|z+h|+|z|)}$$

$$=\frac{\bar{z}h+z\bar{h}+|h|^2}{h(|z+h|+|z|)}$$

(1) 当 $z=0,h=h_1+\mathrm{i}h_2$ 时，有

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{|h|}{h}\to\begin{cases}1,\text{当 } h_2=0,h_1\to 0^+ \text{ 时}\\ -1,\text{当 } h_2=0,h_1\to 0^- \text{ 时}\end{cases}$$

(2) 当 $z\neq 0$ 时，令 $h_1=0,h_2\to 0$，得

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{\mathrm{i}\bar{z}h_2-\mathrm{i}zh_2+h_2^2}{\mathrm{i}h_2(|z+\mathrm{i}h_2|+|z|)}$$

$$=\frac{\bar{z}-z-\mathrm{i}h_2}{|z+\mathrm{i}h_2|+|z|}$$

$$=\frac{-\mathrm{i}(2\mathrm{Im}(z)+h_2)}{|z+\mathrm{i}h_2|+|z|}$$

$$\to\frac{-\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)}{|z|}\quad(\text{纯虚数})$$

令 $h_2=0,h_1\to 0$,得

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{\bar{z}h_1+zh_1+h_1^2}{h_1(|z+h_1|+|z|)}$$

$$=\frac{2\mathrm{Re}(z)+h_1}{|z+h_1|+|z|}\to\frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|}\quad(\text{实数})$$

所以,对任意的 $z$,极限 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ 均不存在.

**证法二** (1) 当 $z=0$ 时,令 $h=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\to 0(r\to 0,-\pi<\varphi\leqslant\pi)$,有

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{|h|}{h}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\to\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$$

这随 $\varphi$ 值变化而取不同的值,故极限 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ 不存在;

(2) 当 $z\neq 0$ 时,$h=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}(-\pi<\varphi\leqslant\pi)$,当 $r\to 0$ 时,$h\to 0$,有

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\frac{\bar{z}h+z\bar{h}+|h|^2}{h(|z+h|+|z|)}$$

$$=\frac{\bar{z}+z\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\varphi}+r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{|z+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}|+|z|}$$

$$\to\frac{\bar{z}+z\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\varphi}}{2|z|}$$

这也随 $\varphi$ 值变化而取不同的值,故对任意的 $z$,极限 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$ 不存在.

**证法三** 对 $w=|z|=|x+\mathrm{i}y|=\sqrt{x^2+y^2}$,而 $u+\mathrm{i}v=\sqrt{x^2+y^2}$. 故

$$u=\sqrt{x^2+y^2},v=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

从而对 $z\neq 0$ 时不满足 C-R 方程[1].

在 $z=0$ 处，$\dfrac{\Delta w}{\Delta z}=\dfrac{|\Delta z|}{\Delta z}=\dfrac{|\Delta x+\mathrm{i}\Delta y|}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=\begin{cases}\dfrac{1}{\mathrm{i}},\Delta x=0,\Delta y>0\\ 1,\Delta y=0,\Delta x>0\end{cases}$.

**4** 给定函数 $w=f(z)=u+\mathrm{i}v$，试证明以下论断：

(1) 若极限 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\mathrm{Re}\,\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ 存在，则偏导数 $v'_x$ 与 $u'_y$ 也存在，并且相等；

(2) 若极限 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\mathrm{Im}\,\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$ 存在，则偏导数 $u'_y$ 与 $v'_x$ 也存在，并且绝对值相等且符号相反；

(3) 若 $u,v$ 可全微分，则(1)与(2)中任一个极限存在，都能保证另一个极限也存在，因而函数 $f(z)$ 可导.

**证** (1) 因为

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=\frac{(\Delta u+\mathrm{i}\Delta v)(\Delta x-\mathrm{i}\Delta y)}{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

又

$$\lim_{\Delta z\to 0}\mathrm{Re}\,\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta u\Delta x+\Delta v\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}=a$$

所以

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=0}}\frac{\Delta u\Delta x}{\Delta x^2}=\lim_{\substack{\Delta x=0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta v\Delta y}{\Delta y^2}=a$$

即

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=a$$

(2) 因为

$$\lim_{\Delta z\to 0}\mathrm{Im}\,\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{-\Delta u\Delta y+\Delta v\Delta x}{\Delta x^2+\Delta y^2}=b$$

所以

---

[1] 指柯西－黎曼方程.——编者注

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=0}}\frac{\Delta v\Delta x}{\Delta x^2}=\lim_{\substack{\Delta x=0\\ \Delta y\to 0}}\frac{-\Delta u\Delta y}{\Delta y^2}=b$$

即

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}=b$$

(3) 设(1) 中极限$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\mathrm{Re}\,\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$存在,$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$,而 $u,v$ 可全微分,故

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\eta_1,\Delta v=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\eta_2$$

其中

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\eta_1}{|\Delta z|}=0,\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\eta_2}{|\Delta z|}=0$$

于是

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,\frac{\Delta w}{\Delta z}&=\frac{\Delta u\Delta x+\Delta v\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}\\&=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x^2+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}+\frac{\frac{\partial u}{\partial y}\Delta x\Delta y+\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}+\frac{\eta_1\Delta x+\eta_2\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}\\&=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\frac{\partial u}{\partial y}\Delta x\Delta y+\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}+\frac{\eta_1\Delta x+\eta_2\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}\end{aligned}$$

由(1) 知

$$\lim_{\Delta z\to 0}\mathrm{Re}\,\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\frac{\partial u}{\partial y}\Delta x\Delta y+\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}+\frac{\eta_1\Delta x+\eta_2\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}\right]=\frac{\partial u}{\partial x}$$

而

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\eta_1\Delta x+\eta_2\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}=0$$

所以

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\frac{\partial u}{\partial y}\Delta x\Delta y+\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}=0$$

即应有

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}=0$$

但$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 不存在,故

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

又

$$\operatorname{Im}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{-\Delta u\Delta y+\Delta v\Delta x}{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

$$=\frac{\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x^2-\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}+\frac{\eta_2\Delta x-\eta_1\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

而

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\eta_2\Delta x-\eta_1\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}=0$$

所以

$$\lim_{\Delta z\to 0}\operatorname{Im}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\partial v}{\partial x}\left(\frac{\Delta x^2+\Delta y^2}{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)=\frac{\partial v}{\partial x}$$

故

$$f'(z)=\lim_{\Delta z\to 0}\operatorname{Re}\frac{\Delta w}{\Delta z}+\mathrm{i}\lim_{\Delta z\to 0}\operatorname{Im}\frac{\Delta w}{\Delta z}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$$

即 $w=f(z)$ 在点 $z$ 可导.

若先假设(2)中极限$\lim\limits_{\Delta z\to 0}\operatorname{Im}\frac{\Delta w}{\Delta z}$存在,同上可证.

**5** 若函数 $w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在点 $z=x+\mathrm{i}y$ 处可导,则在点$(x,y)$处必有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

**证** 记 $\Delta z=\Delta x+\mathrm{i}\Delta y,\Delta u=u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y),\Delta v=v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)$.

$$\begin{aligned}\Delta f&=f(z+\Delta z)-f(z)\\&=u(x+\Delta x,y+\Delta y)+\mathrm{i}v(x+\Delta x,y+\\&\quad\Delta y)-u(x,y)-\mathrm{i}v(x,y)\\&=[u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)]+\end{aligned}$$

$$\mathrm{i}[v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)]$$
$$=\Delta u+\mathrm{i}\Delta v$$

因为 $w=f(z)$ 在点 $z=x+\mathrm{i}y$ 处可导,所以 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta z}$ 为有限数,故必有下式成立

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=0}}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\substack{\Delta x=0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta f}{\Delta z} \tag{1}$$

但

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=0}}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+\frac{\mathrm{i}[v(x+\Delta x,y)-v(x,y)]}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}+\mathrm{i}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x,y)-v(x,y)}{\Delta x}$$
$$=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{2}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x=0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x,y+\Delta y)-u(x,y)}{\mathrm{i}\Delta y}+$$
$$\mathrm{i}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{v(x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\mathrm{i}\Delta y}$$
$$=-\mathrm{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$
$$=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y} \tag{3}$$

联合式(1)(2)(3),即知

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}$$

由复数相等的定义立即得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

证毕.

**6** 证明:$f(z)=\mathrm{e}^x\cos y+\mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin y$ 在任何点 $z=x+\mathrm{i}y$ 解析.

**解析**　按至今已学过的知识,欲证一函数在一个区域解析,可有两种方法:一是利用解析的定义,证明此函数在区域的任一点可导(这通常要计算极限);二是利用 C-R 条件[①],只要能判定此函数的实、虚部在区域的任一点都满足 C-R 条件,且实、虚部均为可微函数就行了.

---

① 指柯西－黎曼条件.——编者注

对于此题,利用第二种方法证明较简单.

**证** 由数学分析的知识,$f(z)$ 的实部 $u=e^x\cos y$ 和虚部 $v=e^x\sin y$ 明显是可微的,剩下就是验证 C-R 条件了,然而由

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cos y,\frac{\partial v}{\partial y}=e^x\cos y$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\sin y,\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\sin y$$

即见 C-R 条件成立,证毕.

**7** 证明:$\omega=f(z)=\bar{z}$ 在任何点都不可微.

**证法一**
$$\frac{\Delta\omega}{\Delta z}=\frac{(\omega+\Delta\omega)-\omega}{\Delta x+i\Delta y}$$
$$=\frac{[(x+\Delta x)-(y+\Delta y)i]-x+iy}{\Delta x+i\Delta y}$$
$$=\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}$$
$$=\begin{cases}-1,\Delta x=0,\Delta y\neq 0\\1,\Delta y=0,\Delta x\neq 0\end{cases}$$

故无确定极限.

**证法二** 因为 $f(z)=\bar{z}=x-iy$,即 $u=x,v=-y$,所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1,\frac{\partial v}{\partial y}=-1$$

因此,$u,v$ 在任何点均有 $\frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}$,按 C-R 条件不成立.从而可知 $f(z)=\bar{z}$ 处处不可微.

**思考题** 若 $f(z)$ 可微,试讨论 $\overline{f(z)}$ 的可微性.

**8** 讨论 $f(z)=z\mathrm{Re}\,z$ 的可微性.

**解** 因为 $f(z)=z\mathrm{Re}\,z=x^2+ixy$,即 $u=x^2,v=xy$,所以

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\frac{\partial v}{\partial y}=x,\frac{\partial u}{\partial y}=0,\frac{\partial v}{\partial x}=y$$

因此,$f(z)$ 在任何点 $z\neq 0$ 处不可微.在原点 $z=0$ 处,$u,v$ 满足 C-R 条件;但不能据此断定 $f(z)$ 在原点处可微.需另作判断,因为在 $z=0$ 时,有

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{\Delta z\mathrm{Re}\,\Delta z-0}{\Delta z}=\mathrm{Re}\,\Delta z=\Delta x$$

所以

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=0$$

故 $f(z)=z\mathrm{Re}\,z$ 在点 $z=0$ 处可微.

在本题的讨论中,我们已提醒注意:不能由满足 C-R 条件而推出 $f(z)$ 可微的结论.下面一例对此作进一步说明.

**9** 证明:$f(z)=\sqrt{|\mathrm{Im}\,z^2|}$ 的实、虚部在 $(0,0)$ 处满足 C-R 条件,但 $f(z)$ 在 $z=0$ 处不可微.

**证** 因为 $f(z)=\sqrt{|\mathrm{Im}\,z^2|}=\sqrt{|2xy|}$,即 $u=\sqrt{|2xy|}$,$v=0$,所以在点 $(0,0)$ 处有

$$\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(0,\Delta y)-u(0,0)}{\Delta y}=0$$

同时,显然在点 $(0,0)$ 处有

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

故 $u,v$ 在点 $z=0$ 处满足 C-R 条件.但在点 $z=0$,有

$$\frac{\Delta f}{\Delta z}=\frac{f(\Delta z)-f(0)}{\Delta z}=\frac{\sqrt{|2\Delta x\Delta y|}}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}$$

因而

$$\lim_{\Delta x=\Delta y\to 0+0}\frac{\Delta f}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\sqrt{2|\Delta x|^2}}{\Delta x(1+\mathrm{i})}=\frac{\sqrt{2}}{1+\mathrm{i}}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=0}}\frac{\Delta f}{\Delta z}=0$$

即 $f(z)$ 在 $z=0$ 处不可微.

**10** 假设 $f(z)=\begin{cases}\dfrac{x^3(1+\mathrm{i})-y^3(1-\mathrm{i})}{x^2+y^2}, z=x+\mathrm{i}y\neq 0\\ 0, z=0\end{cases}$.

试证明:函数 $f(z)$ 在点 $z=0$ 处满足 C-R 条件,但不可导.

**证** 考虑极限 $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f(z)-f(0)}{z}$.

(1) 沿虚轴的极限 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(\mathrm{i}y)-f(0)}{\mathrm{i}y}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{-y^3(1-\mathrm{i})}{\mathrm{i}y^3}=1+\mathrm{i}$;

(2) 沿实轴的极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3(1+\mathrm{i})}{x^3}=1+\mathrm{i}$.

所以满足 C-R 条件.

但若考虑沿直线 $y=x$ 的极限,则有

$$\lim_{y=x\to 0}\frac{f(x+\mathrm{i}x)-f(0)}{x+\mathrm{i}x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3(1+\mathrm{i})-x^3(1-\mathrm{i})}{x(1+\mathrm{i})2x^2}=\frac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$$

故极限$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f(z)-f(0)}{z}$不存在,即函数 $f(z)$ 在点 $z=0$ 处不可导.

**11** 设 $f(z)=\begin{cases}\dfrac{x(x^2+y^2)(y-x\mathrm{i})}{x^2}+y^4, z\neq 0\\ 0, z=0\end{cases}$.

证明:当 $z$ 沿任何向径趋于 0 时,$\dfrac{f(z)-f(0)}{z}\to 0$;但当 $z$ 沿其他方式趋于 0 时,它不一定趋于 0.

**证** 令 $y=mx$,则

$$f(z)=f[x(1+m\mathrm{i})]=\frac{x^3(m^2+1)(mx-x\mathrm{i})}{x^2+m^4x^4}$$

所以

$$\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3(1+m^2)(mx-\mathrm{i}x)}{x^3(1+m^4x^2)(1+m\mathrm{i})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(1+m^2)(m-\mathrm{i})}{(1+m^4x^2)(1+m\mathrm{i})}=0$$

但若当 $y^2=x$ 时(如图 1)

$$f(z)=\frac{y^2(y^4+y^2)(y-y^2\mathrm{i})}{y^4+y^4}$$

$$=\frac{(y^2+1)(1-y\mathrm{i})y}{2}$$

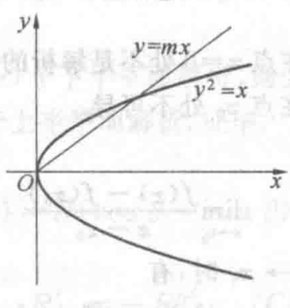



图 1

而

$$\frac{f(z)-f(0)}{z}=\frac{1}{2}\frac{(1+y^2)(1-yi)}{y+i}\to\frac{1}{2i}\quad(\text{当 } y\to 0 \text{ 时})$$

**12** 证明：函数 $f(z)=x^3-y^3\mathrm{i}$ 仅在原点有导数.

证 
$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}&=\lim_{z\to 0}\frac{x^3-y^3\mathrm{i}}{x+\mathrm{i}y}\\&=\lim_{z\to 0}\frac{(x+\mathrm{i}y)(x^2-\mathrm{i}xy-y^2)}{x+\mathrm{i}y}\\&=\lim_{z\to 0}x^2-\mathrm{i}xy-y^2\\&=\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}x^2-\mathrm{i}\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}xy-\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}y^2=0\end{aligned}$$

所以在 $z=0$ 处的导数为 0. 但

$$\begin{aligned}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}&=\frac{x^3-\mathrm{i}y^3-x_0^3+\mathrm{i}y_0^3}{x+\mathrm{i}y-(x_0+\mathrm{i}y_0)}\quad(\text{取 } y=y_0)\\&=\frac{x^3-x_0^3}{x-x_0}\\&=x^2+xx_0+x_0^2\to 3x_0^2\quad(x\to x_0)\end{aligned}$$

若取 $x=x_0$，则

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}=\frac{-\mathrm{i}y^3+\mathrm{i}y_0^3}{\mathrm{i}(y-y_0)}=-(y^2+yy_0+y_0^2)\to -3y_0^2\quad(y\to y_0)$$

故除非 $x_0=y_0=0$，否则导数不存在.

**13** 设给定函数 $f(z)=|z^2|$，试证明：函数 $f(z)$ 在点 $z=0$ 处可导，但不解析.

证 $f'(0)=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{f(z)-f(0)}{z}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{|z^2|}{z}=\lim\limits_{z\to 0}\bar{z}=0$，即 $f(z)$ 在点 $z=0$ 处可导.

下面证明函数 $f(z)$ 在点 $z=0$ 处不是解析的，即能够证明：对任意的 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0\neq 0$，函数 $f(z)$ 在点 $z_0$ 处不可导.

考虑极限

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

(1) 在 $z=x+\mathrm{i}y_0$，$x\to x_0$ 时，有

$$\lim_{z\to z_0}\frac{|z|^2-|z_0|^2}{z-z_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2+y_0^2-(x_0^2+y_0^2)}{x+\mathrm{i}y_0-(x_0+\mathrm{i}y_0)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=2x_0$$

(2) 在 $z=x_0+\mathrm{i}y, y\to y_0$ 时,有

$$\lim_{z\to z_0}\frac{|z|^2-|z_0|^2}{z-z_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{x_0^2+y^2-(x_0^2+y_0^2)}{x_0+\mathrm{i}y-(x_0+\mathrm{i}y_0)}=-2\mathrm{i}y_0$$

所以 $f(z)$ 在点 $z_0\neq 0$ 处不可导,故在 $z=0$ 处不解析.

**14** 证明:$f(z)$ 于上半平面内解析的充要条件是 $\overline{f(\bar{z})}$ 于下半平面内解析.

**分析** 我们知道,当 $f(z)$ 与 $\overline{f(z)}$ 都于 $D$ 解析时,$f(z)$ 必为常数. 故当 $f(z)$ 不是常数时,$f(z)$ 与 $\overline{f(z)}$ 不可能同时于 $D$ 解析. 然而本例断言:当 $f(z)$ 解析时,不管 $f(z)$ 是否为常数,$\overline{f(\bar{z})}$ 必解析;反之亦然.

**证** 设 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$,则

$$\overline{f(\bar{z})}=u(x,-y)-\mathrm{i}v(x,-y)$$

先证必要性. 已知 $f(z)$ 解析,故有(此时 $y>0$)

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,y)}{\partial y},\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=-\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

因此

$$\frac{\partial u(x,-y)}{\partial x}=\frac{\partial v(x,-y)}{\partial(-y)}=\frac{\partial[-v(x,-y)]}{\partial y} \tag{1}$$

$$\frac{\partial u(x,-y)}{\partial(-y)}=-\frac{\partial v(x,-y)}{\partial x}=\frac{\partial[-v(x,-y)]}{\partial x}$$

或

$$\frac{\partial u(x,-y)}{\partial y}=-\frac{\partial[-v(x,-y)]}{\partial x} \tag{2}$$

式(1)与式(2)表明 $\overline{f(\bar{z})}$ 的实部 $u(x,-y)$ 和虚部 $-v(x,-y)$ 满足C-R条件;又显然 $u(x,-y)$ 与 $-v(x,-y)$ 可微,所以,$f(z)$ 于下半平面内解析(因为此时 $-y<0$).

再证充分性. 现已知 $\overline{f(\bar{z})}$ 于下半平面解析,则由已证得的结论,$\overline{\overline{f(z)}}$ 必于上半平面解析,亦即 $f(z)$ 于上半平面解析. 证毕.

**15** 设函数 $w=f(z)=R(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta), z\in G$,是 $G$ 内的解析函数,则有

$$R'_x=R\theta'_y, R'_y=-R\theta'_x \quad (\text{C-R 条件})$$

且满足

$$\frac{1}{w}f'(z)=\frac{R'_x}{R}+\mathrm{i}\theta'_x=\theta'_y-\mathrm{i}\frac{R'_y}{R}$$

**证法一** 令 $w=f(z)=R(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=u+\mathrm{i}v$,则

$$u=R\cos\theta,v=R\sin\theta$$

由于 $f(z)$ 在 $G$ 内解析,故满足 C-R 条件,即

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

即

$$R'_x\cos\theta-R\sin\theta\cdot\theta'_x=R'_y\sin\theta+R\cos\theta\cdot\theta'_y$$

$$R'_y\cos\theta-R\sin\theta\cdot\theta'_y=-R'_x\sin\theta-R\cos\theta\cdot\theta'_x$$

将上面两个等式分别乘以 $\cos\theta,\sin\theta$ 或 $\sin\theta,-\cos\theta$ 后再相加,即得

$$R'_x=R\cdot\theta'_y,R'_y=-R\cdot\theta'_x$$

而

$$\begin{aligned}\frac{1}{w}f'(z)&=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}}{R(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}\\&=\frac{(R\cos\theta)'_x+\mathrm{i}(R\sin\theta)'_x}{R(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}\\&=\frac{R'_x\cos\theta-R\sin\theta\cdot\theta'_x+\mathrm{i}(R'_x\sin\theta+R\cos\theta\cdot\theta'_x)}{R(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)}\\&=\frac{R'_x}{R}+\mathrm{i}\theta'_x\end{aligned}$$

又由上面的 C-R 条件得到

$$\frac{R'_x}{R}+\mathrm{i}\theta'_x=\frac{R\theta'_y}{R}+\mathrm{i}\left(-\frac{R'_y}{R}\right)=\theta'_y-\mathrm{i}\frac{R'_y}{R}$$

**证法二** 设 $u=R\cos\omega,v=R\sin\omega$.

$R,\omega$ 各变为 $u,v$ 的函数,且 $u,v$ 各为 $x,y$ 的函数,于是

$$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial R}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=\cos\omega\frac{\partial u}{\partial x}+\sin\omega\frac{\partial v}{\partial x}\tag{1}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\sin\omega}{R}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\cos\omega}{R}\frac{\partial v}{\partial x}\tag{2}$$

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=\cos\omega\frac{\partial u}{\partial y}+\sin\omega\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{\partial\omega}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial\omega}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\sin\omega}{R}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\cos\omega}{R}\frac{\partial v}{\partial y}$$

后两式应用 C-R 方程得

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\sin\omega\frac{\partial u}{\partial x}-\cos\omega\frac{\partial v}{\partial x} \tag{3}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial y}=\frac{\cos\omega}{R}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\sin\omega}{R}\frac{\partial v}{\partial x} \tag{4}$$

由式(1)(4) 得

$$\frac{\partial R}{\partial x}=R\frac{\partial \omega}{\partial y}$$

由式(2)(3) 得

$$\frac{\partial R}{\partial y}=-R\frac{\partial \omega}{\partial x}$$

再有，若$\frac{1}{R}\times(1)+\mathrm{i}\times(2)$ 可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial \omega}{\partial x}&=\frac{1}{R}(\cos\omega-\mathrm{i}\sin\omega)\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{R}(\mathrm{i}\cos\omega+\sin\omega)\frac{\partial v}{\partial x}\\&=\frac{1}{R}(\cos\omega-\mathrm{i}\sin\omega)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\\&=\frac{1}{\omega}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\end{aligned}$$

同样地，$(4)-(3)\times\frac{\mathrm{i}}{R}$ 时可得

$$\frac{1}{w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=\frac{\partial \omega}{\partial y}-\frac{\mathrm{i}}{R}\frac{\partial R}{\partial y}$$

或

$$\frac{1}{w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=\frac{\partial}{\partial x}\ln w=\frac{\partial}{\partial(y\mathrm{i})}\ln w$$

还可作如下简便处理：考虑 $w$ 各关于 $x,y$ 的偏导数.

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=\frac{\partial[R(\cos\omega+\mathrm{i}\sin\omega)]}{\partial(x+\mathrm{i}y)}$$

先按实轴方向微分得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}&=\frac{\partial}{\partial x}[R(\cos\omega+\mathrm{i}\sin\omega)]\\&=\frac{\partial R}{\partial x}(\cos\omega+\mathrm{i}\sin\omega)+R(-\sin\omega+\mathrm{i}\cos\omega)\frac{\partial \omega}{\partial x}\\&=w\left(\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial \omega}{\partial x}\right)\end{aligned}$$

再按虚轴方向微分得(利用上面结果)

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}=\frac{1}{\mathrm{i}}w\left(\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial y}+\mathrm{i}\frac{\partial \omega}{\partial y}\right)=w\left(\frac{\partial \omega}{\partial y}-\frac{\mathrm{i}}{R}\frac{\partial R}{\partial y}\right)$$