



结构动力学与

MATLAB程序

孙作玉 王晖 编著

非外借



科学出版社

结构动力学与 MATLAB 程序

孙作玉 王 晖 编著



科学出版社

内 容 简 介

本书主要介绍结构动力学的基本概念、力学模型、数值方法及相关的 MATLAB 程序。全书以线弹性结构的动力分析为主,内容包括基本力学原理及结构运动方程的建立、单自由度体系、多自由度体系、多自由度体系运动方程的数值求解方法、大型系统分析的实用计算方法和分布参数系统的振动。此外,书中基于动力分析的原理和数值算法编制相关的 MATLAB 程序,并通过一些简单的算例,介绍交互式动力仿真分析的相关技术,详细讲解图形用户界面(GUI)的实现方法和动态系统的 SIMULINK 仿真技术。

本书可供高等院校工科类高年级本科生、研究生及相关专业科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

结构动力学与 MATLAB 程序/孙作玉,王晖编著. —北京:科学出版社, 2017.9

ISBN 978-7-03-054359-2

I. ①结… II. ①孙… ②王… III. ①结构动力学-Matlab 软件-程序设计 IV. ①O342-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 216462 号

责任编辑:童安齐 / 责任校对:王万红
责任印制:吕春珉 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

三河市骏杰印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 9 月第 一 版 开本: B5 (720×1000)

2017 年 9 月第一次印刷 印张: 15 3/4 插页: 7

字数: 300 000

定价: 56.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换(骏杰))

销售部电话 010-62136230 编辑部电话 010-62137026 (BA08)

版权所有,侵权必究

举报电话: 010-64030229; 010-64034315; 13501151303

前 言

结构动力学是高等院校工科类研究生最先学习的一门重要的基础课程，该课程着重解决两方面的问题，即结构运动方程的建立和动力响应的数值求解。面对矩阵形式的运动学方程，大多数初学者困惑的是“方程是如何‘推出来的’”；而对于数值求解，看着相关的数值算法公式，往往想象不出该“如何编程”。鉴于此，本书以线性结构为主要内容，详细讲解结构运动方程的建立过程，并在介绍算法的基础上给出相关的 MATLAB 程序。

全书共七章，前六章以介绍线性结构的离散系统分析为主，第 7 章介绍分布参数系统，各章内容安排如下：第 1 章绪论，介绍结构动力学的任务及动力分析的特点；第 2 章基本力学原理及结构运动方程的建立，介绍相关的力学原理，如牛顿第二定律、动量矩定理、D'Alembert 原理、虚功原理、哈密顿原理和拉格朗日方程；第 3 章单自由度体系，介绍动力分析的基本概念、时域求解方法——Duhamel 积分、拉普拉斯变换法、基于图形用户界面 (GUI) 的交互式动力分析和 SIMULINK 仿真技术；第 4 章多自由度体系，介绍振型叠加法和结构阻尼矩阵的构造；第 5 章多自由度体系运动方程的数值求解方法，介绍多自由度体系运动方程的状态空间表达、Runge-Kutta 法、中心差分法、Houbolt 法、Newmark 法、Wilson- θ 法、精细积分法，并给出了对应的 MATLAB 程序，最后介绍了算法的稳定性分析；第 6 章大型系统分析的实用计算方法，介绍大型系统的特征值问题、近似求解时的误差估计、近似求解的向量迭代法、矩阵变换法、Rayleigh-Ritz 法、子空间迭代法和 Lanczos 迭代法，给出了相关的 MATLAB 程序；第 7 章分布参数系统的振动，以直梁弯曲振动为主，介绍微分方程建立，动力特性分析及振型叠加法，同时简单介绍了直杆的轴向振动、扭转振动和剪切振动。

本书由孙作玉、王晖编写。

由于作者水平所限，书中不足之处在所难免，恳请读者批评指正。

目 录

前言

第 1 章 绪论	1
1.1 结构动力学的任务	1
1.2 结构动力学问题的特点	1
1.3 结构动力学问题的分类	2
1.4 结构动力学问题的工程实例	4
第 2 章 基本力学原理及结构运动方程的建立	6
2.1 应用牛顿第二定律建立系统的运动微分方程	6
2.2 动量矩定理(或刚体的质心运动定律)	14
2.3 D'Alembert 原理	18
2.4 虚功原理	21
2.5 哈密顿原理	24
2.6 拉格朗日方程	26
第 3 章 单自由度体系	35
3.1 单自由度线性系统的无阻尼自由振动	35
3.2 单自由度线性系统的有阻尼自由振动	37
3.3 单自由度有阻尼线性系统自由振动的 GUI 仿真	41
3.4 单自由度线性系统的库仑阻尼自由振动	49
3.4.1 单自由度线性系统的库仑阻尼自由振动的理论	49
3.4.2 单自由度线性系统的库仑阻尼自由振动的 SIMULINK 仿真	50
3.5 单自由度体系在简谐荷载作用下的响应	56
3.5.1 单自由度无阻尼体系在简谐荷载作用下的响应	56
3.5.2 单自由度有阻尼体系在简谐荷载作用下的响应	57
3.5.3 单自由度有阻尼体系在简谐荷载作用下的仿真	59
3.5.4 单自由度有阻尼体系的动力放大系数与相位角的仿真	63
3.5.5 基于简谐强迫振动实验确定体系的黏性阻尼比	67
3.6 体系的阻尼和系统振动过程中的能量变化	69
3.6.1 自由振动系统振动过程中的能量变化	69

3.6.2	有阻尼简谐受迫振动系统振动过程中的能量变化仿真	70
3.6.3	等效黏性阻尼	74
3.7	周期荷载作用下单自由度体系的响应	76
3.8	任意荷载作用下单自由度体系的响应	77
3.8.1	时域求解方法——Duhamel 积分	77
3.8.2	单自由度无阻尼体系在几种典型荷载作用下的仿真	82
3.9	频域方法——傅里叶变换法	86
3.10	拉普拉斯变换法求解振动微分方程	87
3.10.1	拉普拉斯变换	88
3.10.2	拉普拉斯变换的重要性质	89
3.10.3	拉普拉斯逆变换的计算	90
3.10.4	应用拉普拉斯变换求解振动微分方程	92
3.10.5	应用传递函数对连续系统进行 SIMULINK 仿真	94
第 4 章	多自由度体系	97
4.1	多自由度系统振动微分方程的建立	97
4.2	多自由度系统动力特性分析	100
4.2.1	多自由度系统的频率方程及振型	100
4.2.2	广义质量、广义刚度及振型的标准化处理	103
4.2.3	结构振动位移的振型分解	105
4.2.4	结构振型的正交性	106
4.3	多自由度系统动力反应分析的振型叠加法	107
4.3.1	无阻尼多自由度系统的振型叠加法	107
4.3.2	有阻尼多自由度系统的振型叠加法	112
4.4	结构阻尼矩阵的构造	114
4.4.1	瑞利阻尼	114
4.4.2	扩展的瑞利阻尼 (Caughey 阻尼)	116
4.4.3	振型阻尼矩阵叠加法	117
第 5 章	多自由度体系运动方程的数值求解方法	119
5.1	多自由度体系运动方程的状态空间表达	119
5.2	Runge-Kutta 法	120
5.2.1	Runge-Kutta 法公式	120
5.2.2	Runge-Kutta 法程序及应用	123
5.3	中心差分法	131
5.3.1	中心差分法公式	131

5.3.2	中心差分法程序及应用	132
5.3.3	中心差分法的变异格式——蛙跳格式	136
5.3.4	蛙跳格式 (Leapfrog) 程序	137
5.4	Houbolt 法	138
5.4.1	Houbolt 法公式	138
5.4.2	Houbolt 法程序	139
5.5	Newmark 法	141
5.5.1	Newmark 法公式	141
5.5.2	Newmark 法程序	142
5.6	Wilson- θ 法	144
5.6.1	Wilson- θ 法公式	144
5.6.2	Wilson- θ 法程序	145
5.7	精细积分法	147
5.7.1	精细积分法公式	147
5.7.2	精细积分法程序	150
5.8	算法的稳定性分析	152
5.8.1	直接积分法稳定性的概念	152
5.8.2	中心差分法的稳定性分析	154
5.8.3	Houbolt 法的稳定性分析	155
5.8.4	Newmark 法的稳定性分析	158
5.8.5	Wilson- θ 法的稳定性分析	161
第 6 章	大型系统分析的实用计算方法	164
6.1	大型系统的特征值问题	164
6.1.1	归一化特征向量的性质	165
6.1.2	Sturm 序列与系统特征值个数的判定	165
6.1.3	半正定矩阵的特征值问题及其处理方法	166
6.1.4	瑞利商的概念与特征值的估计	166
6.2	特征值问题近似求解时的误差估计	167
6.3	特征值问题近似求解的向量迭代法	169
6.3.1	逆迭代法	169
6.3.2	正迭代法	173
6.3.3	正交化处理与其他振型的计算	175
6.3.4	带移轴的迭代法	177
6.3.5	瑞利商迭代法	178
6.3.6	迭代法程序应用	180

6.4	特征值问题近似求解时的矩阵变换法	183
6.4.1	雅可比法	184
6.4.2	广义雅可比法	189
6.4.3	Householder-QR 迭代法	192
6.5	Rayleigh-Ritz 法	197
6.6	子空间迭代法	199
6.7	Lanczos 迭代法	204
第 7 章	分布参数系统的振动	211
7.1	直梁弯曲振动的微分方程	211
7.1.1	基本弯曲振动方程	211
7.1.2	考虑轴向力时梁的弯曲振动方程	212
7.1.3	考虑剪切变形和转动惯量时梁的弯曲振动方程	213
7.1.4	考虑黏滞阻尼梁的弯曲振动方程	215
7.1.5	考虑弹性基础和轴向力的弯曲振动微分方程	216
7.2	直梁弯曲振动的固有特性	217
7.2.1	基本弯曲的振动特性	217
7.2.2	考虑轴向力的弯曲振动固有特性	222
7.2.3	考虑剪切和转动惯量的梁的弯曲振动固有特性	224
7.3	固有振形的正交性	225
7.4	用振形叠加法计算梁的强迫振动响应	227
7.5	直杆的轴向振动、扭转振动和剪切振动	236
7.5.1	直杆的轴向自由振动	236
7.5.2	圆轴的自由扭转振动	239
7.5.3	高腹梁的剪切自由振动	240
	主要参考文献	242

第1章 绪 论

1.1 结构动力学的任务

结构动力学是一门研究结构在动力荷载作用下相关问题的学科，研究的内容主要涉及动力荷载的特点、结构本身的动力特性以及在动力荷载作用下结构响应的分析计算方法。随着社会的发展，科学家和工程师发明和设计了多种多样的结构以方便人类的生产和生活，以交通工具为例，就有天空中飞翔的飞机、地面上行驶的列车和海中遨游的轮船；再如生产所需的各类厂房、人类生活居住的楼房等。这些结构在其使用过程中不可避免地经受各种环境荷载的作用，如结构的自重、强风、地震激励等。这些荷载可以分为两类：一类称为“静荷载”，是指荷载不随时间变化（或变化非常缓慢），包括荷载的大小、作用方向和作用位置都是恒定的（或变化非常缓慢）；另一类称为“动荷载”，荷载随时间发生变化，是指上述荷载三要素（荷载的大小、作用方向和作用位置）中的一项、多项或全部随时间发生变化。结构设计和分析的重要任务就是保障结构的安全和可靠，为此不但要考虑结构在静荷载作用下的问题，还要考虑结构在动力荷载作用下的行为。结构动力分析关注的就是结构在动力荷载作用下其响应的求解和内力计算的问题，通过了解“荷载-结构动力特性-结构响应”之间的内在规律，为改善结构的安全性和可靠性提供坚实的理论基础。

1.2 结构动力学问题的特点

相比于静力学问题，结构动力学问题具有一些鲜明的特点和随之而来的难点，主要表现在以下两个方面。

1. 惯性力和阻尼力的影响

由于动力荷载的作用，结构的位移、速度、加速度都随时间发生变化，从而产生了阻尼力和惯性力，这些力又对结构的后续响应产生了重要的影响。

2. 计算复杂和计算量大

荷载随时在变，因此动力学问题需要求解的是微分方程，相比于静力学所需求解的线性代数方程，问题的复杂程度和难度大大增加。另外，结构动力学问题需要解算的是在多个不同时刻结构响应的问题，因此计算工作量大大增加。

1.3 结构动力学问题的分类

结构动力学问题的主要影响因素包括结构材料本身的力学特性、建筑的结构形式（或机械结构的空问构型及其运动方式）和结构所经受的动力荷载。

根据所使用材料的力学特性不同可以将结构分类为线性结构或非线性结构，例如常见的钢筋混凝土建筑结构，在正常使用环境下其构件材料的应力-应变关系具有很好的线性特性，我们称之为线性结构，如果构件材料的应力-应变关系具有很强的非线性，则称之为非线性结构，例如橡胶就是一种典型的非线性材料，采用橡胶垫隔震的钢筋混凝土建筑结构就是非线性结构（结构中含有非线性构件，即便结构的其他部分构件是线性的，结构的动力行为也会受到非线性构件的影响，因此也称为非线性结构）。需要强调的是，这里所说的“结构材料本身的力学特性”需要根据问题的特点进行合理的描述，即便是钢筋混凝土建筑结构，当其所经受的动力荷载超过一定的幅值时，材料的应力-应变关系也会展现出很强的非线性特性，这时就必须用非线性本构方程进行描述。如果材料的非线性特性不强，采用线性描述能够达到足够的精度时，就可以当作线性结构处理，否则就必须按照非线性结构进行分析。一般而言，当材料的应力-应变关系可用线性方程描述时，所建立的结构运动方程相比非线性结构的运动方程要简单许多，后续的动力学方程求解也容易很多，因此按照线性结构进行分析和计算是结构动力分析的首选。

实际结构所经受的动力荷载可能有多种不同的形式，但其共性是荷载都随着时间发生变化。由于动力荷载是由一个或许多力组成的，力的大小、方向和作用点都必须加以考虑，如高层建筑所受的风荷载就与这三个因素同时相关，风速大小的变化直接决定了风压的大小，从而影响了荷载的幅值；而风向变化则直接改变了结构受力的方向；在不同高度处，风速的特性也不相同，这体现了荷载作用位置的影响。如果荷载的作用位置和方向保持不变，则可以根据其幅值变化进行分类，下面介绍一些常见荷载，其中一些能够知道其确定性数值时程的称为确定性荷载，否则称为随机荷载。

1. 简谐荷载

这类荷载具有单一的频率，可以用式（1-1）加以描述。

$$F(t) = A \cos(\omega t + \theta) \quad (1-1)$$

式中：参数 A 、 ω 、 θ 分别代表荷载的幅值、圆频率和初相位。

2. 周期性荷载

这类荷载是由多个简谐荷载叠加而成，可以用式（1-2）加以描述。

$$F(t) = \sum_{i=1}^n A_i \cos(\omega_i t + \theta_i) \quad (1-2)$$

3. 冲击荷载

荷载的幅值在短时间内急剧增大，然后又迅速变小，如建筑物附近爆炸引起的作用在结构上的冲击压力。

4. 随机荷载

荷载的幅值变化没有明显的规律，难以用解析函数表达，荷载随着时间的变化具有随机性，因此仅能通过测试仪器获得相关的记录并作为类似荷载作用下结构分析的参考或输入。建筑结构所经受的风荷载就是典型的随机荷载。地震激励也是随机荷载，其发生的时间、地点、强度及其变化规律无法准确预测，具有很强的随机性。地震动加速度的时程仅能在地震发生时利用地震仪加以观测和记录。

几种典型荷载曲线如图 1.1 所示。

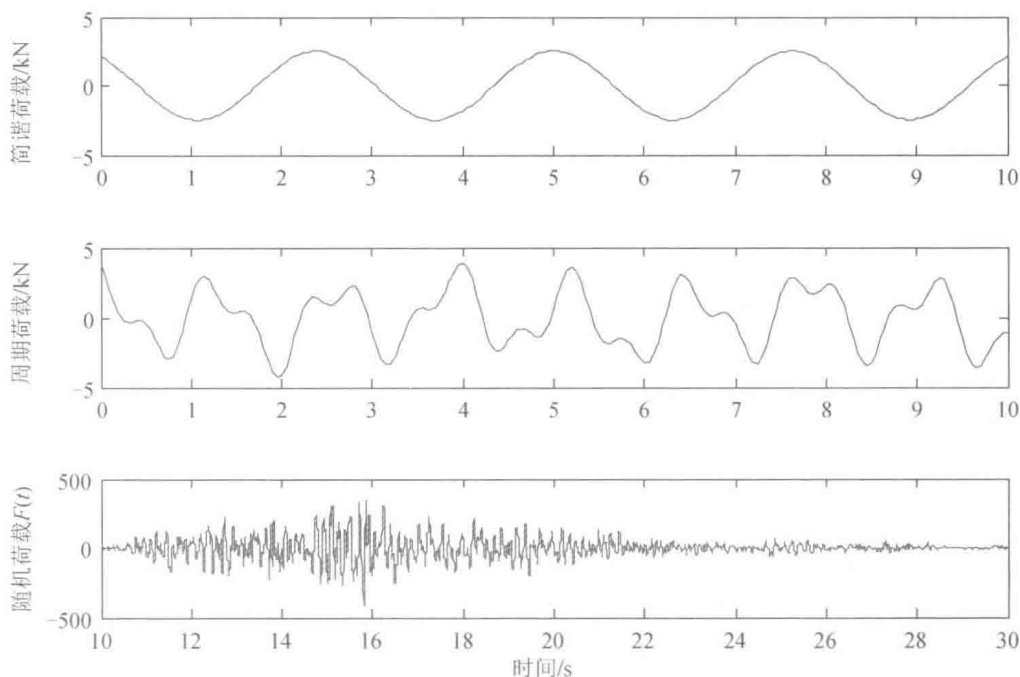


图 1.1 简谐荷载、周期荷载和随机荷载

建筑的结构形式不同代表了不同的建筑结构，如同样采用钢筋混凝土作为建筑材料，可以建造框架结构，也可以建造框架剪力墙结构，还可以建造更高层的筒中筒结构。显然，不同的建筑结构其质量、刚度分布也不相同，但是对应的运动方程形式却是相同的（对于线性结构而言），因此建筑的结构形式不作为结构动力学问题分类的参数。

根据结构的材料特性和所受荷载不同，结构动力学问题可分为如下四类。

- (1) 线性结构在确定性荷载作用下的问题。
- (2) 非线性结构在确定性荷载作用下的问题。
- (3) 线性结构在随机荷载作用下的问题。
- (4) 非线性结构在随机荷载作用下的问题。

对于非线性结构的分析，一般需要多次迭代处理，即在给定的特定时刻 t_i ，通过多次迭代求出其在该时刻的“等效线性结构”，然后求解出对应的结构动力响应，再进行下一时刻 t_{i+1} 的迭代计算，依次类推可以求出非线性结构的动力响应。由此可以看出，线性结构的求解是结构非线性分析的基础。

对于随机荷载作用下的结构分析，则需要应用“结构随机振动”的相关理论和方法处理。一般而言，结构随机振动分析需要知道输入随机荷载的功率谱和方差，利用结构的传递函数的概念，应用随机过程的理论计算出结构响应的功率谱和方差。这一过程中无法利用确定性的荷载时程作为输入，因此不能用通常的动力学方法求解。而随机过程理论则是将随机荷载的统计信息和特征（输入量的方差和功率谱）作为输入，利用结构的动力特性确定其传递函数，推导并计算出结构响应量的统计信息和特征（输出量的功率谱和方差）。显然，结构的传递函数是随机振动分析的关键影响因素，也是结构动力特性的有效表达。

本书重点阐述第一类问题的建立和求解方法，同时为其他几类问题的求解打好基础。对于大型工程结构的动力学问题，还要用到有限元的知识，读者可以参考相关的书籍。需要说明的是，对于线性结构而言，最终得到的多自由度系统运动方程的形式与本书介绍的相同，因此本书中所讲的求解方法可以直接应用，所不同的是“运动方程的建立”更为复杂。

1.4 结构动力学问题的工程实例

为了保证结构的安全性和可靠性，大型工程结构均需要进行动力分析，如斜拉桥结构、不规则的房屋结构等，如图 1.2 和图 1.3 所示。对于结构中的一些非线性结构模块，还需采用相关的模型加以处理，如对橡胶隔震垫，可以采用 Buc-Wen 模型拟合，如图 1.4 所示。



图 1.2 斜拉桥结构在演变地震动激励下的动力响应分析

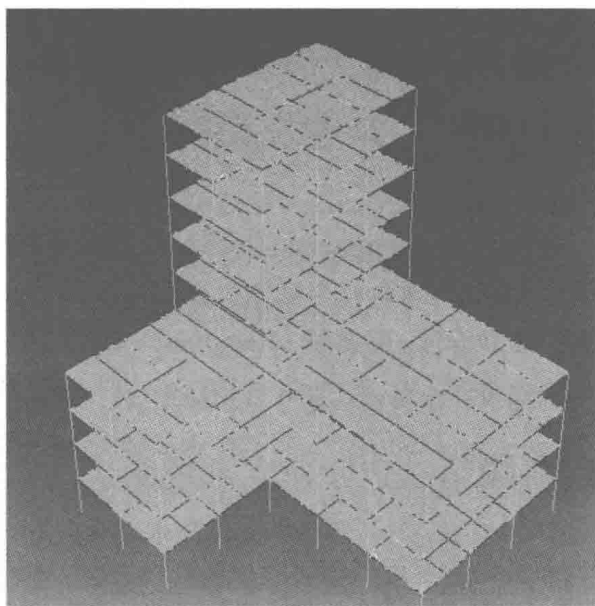


图 1.3 不规则房屋结构在地震激励下的动力响应分析

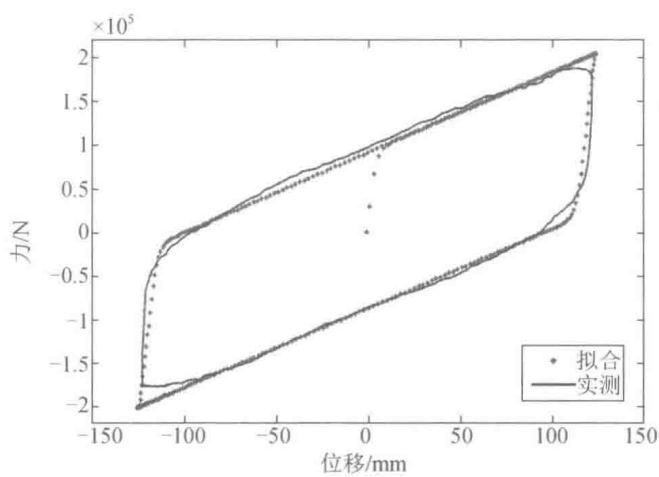


图 1.4 橡胶垫结构采用 Buc-Wen 模型模拟的本构关系与实验曲线对比

第 2 章 基本力学原理及结构运动方程的建立

本章介绍结构动力学分析的重要基础、相关的基本力学原理及应用这些原理建立结构运动方程的方法，内容包括牛顿第二定律、动量矩定理及质心运动定律、D'Alembert 原理、虚功原理、哈密顿 (Hamilton) 原理和拉格朗日 (Lagrange) 方程。

2.1 应用牛顿第二定律建立系统的运动微分方程

牛顿第二定律是描述动力学问题的简洁且有效的手段，如式 (2-1) 所示，其含义是指作用在结构上的合力矢量等于其质量与质心加速度矢量的乘积。

$$ma = F \quad (2-1)$$

【例 2-1】 物块-弹簧-阻尼系统如图 2-1 (a) 所示，物块质量为 m ，放置于光滑的水平面上，受到随时间变化的水平力 $F(t)$ 的作用，同时物块受到弹簧和阻尼的约束。已知弹簧的刚度为 k ，阻尼器的阻尼系数为 c ，试建立该物块的运动方程。

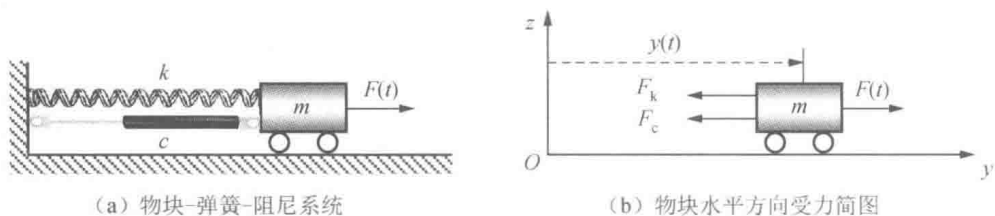


图 2-1 物块-弹簧-阻尼单自由度系统分析

解：首先建立一个参考坐标系 Oyz ，如图 2-1 (b) 所示，坐标原点位于弹簧未变形时的初始位置，物块在外力作用下振动时的位置用 $y(t)$ 表示，对应的速度和加速度分别用 $\dot{y}(t)$ 和 $\ddot{y}(t)$ 表示，符号中的小圆点表示对时间的导数，即 $\dot{y}(t)$ 对应于位移对时间的一阶导数， $\ddot{y}(t)$ 对应于位移对时间的二阶导数。为了建立物块在水平方向上振动的运动方程，需要画出物块的力学分析简图，如图 2-1 (b) 所示。物块在振动过程中弹簧的伸长变形为 $y(t)$ ，此时弹簧对物块施加一个弹性约束力 F_k ，其大小为 $F_k = ky(t)$ ，方向与位移方向相反，因该约束力阻止物块的振动位移，习惯上称为弹性恢复力。物块在振动过程中具有速度，此时阻尼器产生的约束反力为 F_c ，其大小为 $F_c = c\dot{y}(t)$ ，方向与速度方向相反，称为阻尼力。再考虑物块所受到的水平作用力 $F(t)$ ，应用牛顿第二定律，列出式 (2-1) 在 y 轴

方向的投影

$$m\ddot{y}(t) = F(t) - F_c - F_k \quad (2-2a)$$

代入阻尼力和弹性恢复力的计算式, 可得

$$m\ddot{y}(t) = F(t) - c\dot{y}(t) - ky(t) \quad (2-2b)$$

经整理, 物块-弹簧-阻尼系统的运动方程为

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = F(t) \quad (2-2c)$$

对于两自由度及多个自由度组成的系统而言, 应用牛顿第二定律建立系统的运动方程, 过程与上例类似, 不同之处在于需要针对每一个物体分别画出其力学简图, 然后应用牛顿第二定律列出其方程, 再将所有方程综合在一起就得到了整个系统的运动方程, 下面通过两个算例分别说明。

【例 2-2】 两物块质量分别为 m_1 和 m_2 , 放置于光滑的水平面上, 受力及约束如图 2-2 所示, 试建立该系统的运动方程。

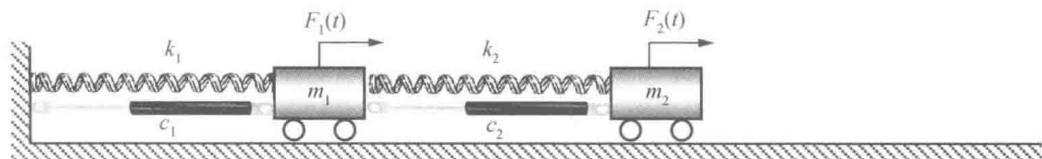


图 2-2 两物块-弹簧-阻尼系统

解: 首先建立一个参考坐标系 Oyz , 并分别画出两个物块的受力分析简图, 如图 2-3 所示, 图中 $y_1(t)$ 与 $y_2(t)$ 分别表示两个物块的位移 (两个弹簧均未产生变形的位置作为位移计算的参考原点)。物块 1 受到两个弹簧力的作用, 弹簧 k_1 的恢复力为 $F_{k1} = k_1 y_1(t)$, 弹簧 k_2 的恢复力为 $F_{k2} = k_2 (y_2(t) - y_1(t))$, 这是因为弹簧 k_2 的实际变形 (伸长位移) 为 $y_2(t) - y_1(t)$ 。类似地, 物块 1 受到两个阻尼力的作用, 阻尼器 c_1 的阻尼力为 $F_{c1} = c_1 \dot{y}_1(t)$, 阻尼器 c_2 的阻尼力为 $F_{c2} = c_2 (\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t))$, 式中阻尼器 c_2 的相对速度为 $\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)$ 。

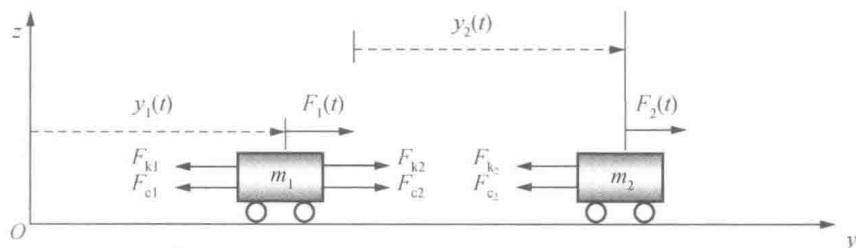


图 2-3 两物块受力分析简图

依据物块 1 的受力图, 应用牛顿第二定律, 列出其在 y 轴方向的投影式

$$m_1 \ddot{y}_1(t) = F_1(t) - F_{c1} - F_{k1} + F_{c2} + F_{k2} \quad (2-3a)$$

代入阻尼力和弹性恢复力的计算式，有

$$m_1 \ddot{y}_1(t) = F_1(t) - c_1 \dot{y}_1(t) - k_1 y_1(t) + c_2 (\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)) + k_2 (y_2(t) - y_1(t)) \quad (2-3b)$$

整理后，物块 1 的运动方程为

$$m_1 \ddot{y}_1(t) + (c_1 + c_2) \dot{y}_1(t) - c_2 \dot{y}_2(t) + (k_1 + k_2) y_1(t) - k_2 y_2(t) = F_1(t) \quad (2-3c)$$

类似地，依据物块 2 的受力图，应用牛顿第二定律，同样可以列出其在 y 轴方向的投影式

$$m_2 \ddot{y}_2(t) = F_2(t) - F_{c2} - F_{k2} \quad (2-4a)$$

代入阻尼力和弹性恢复力的计算式，有

$$m_2 \ddot{y}_2(t) = F_2(t) - c_2 (\dot{y}_2(t) - \dot{y}_1(t)) - k_2 (y_2(t) - y_1(t)) \quad (2-4b)$$

整理后，物块 2 的运动方程为

$$m_2 \ddot{y}_2(t) - c_2 \dot{y}_1(t) + c_2 \dot{y}_2(t) - k_2 y_1(t) + k_2 y_2(t) = F_2(t) \quad (2-4c)$$

综合式 (2-3c) 与式 (2-4c) 就得到了描述两物块-弹簧-阻尼系统的运动方程。

【例 2-3】 三物块质量分别为 m_1 、 m_2 和 m_3 ，放置于光滑的水平面上，受力及约束如图 2-4 所示，挡板 A 与物块 1 固结，挡板 B 与物块 3 固结，挡板 A 与挡板 B 之间连接有弹簧 k_5 和阻尼器 c_5 。在初始时刻，各弹簧均无变形，三物块处于静止状态，试建立该系统在图示荷载作用下的运动方程。

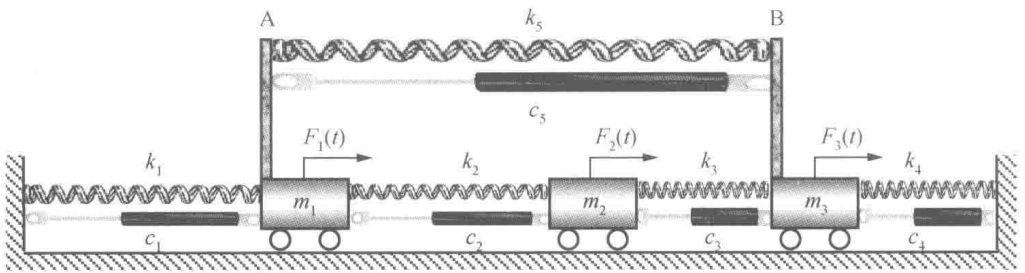


图 2-4 三物块-弹簧-阻尼系统

解：首先建立一个参考坐标系 Oyz ，并分别画出三个物块的受力分析简图，如图 2-5 所示，图中 $y_1(t)$ 、 $y_2(t)$ 与 $y_3(t)$ 分别表示三个物块的位移（弹簧均未产生变形的位置作为位移计算的参考原点）。

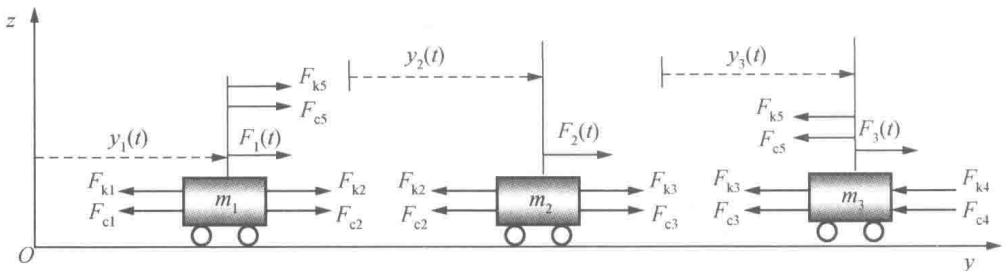


图 2-5 三物块受力分析简图

物块 1 受到的约束力包括弹簧 1、弹簧 2 和弹簧 5 的恢复力, 还有阻尼器 1、阻尼器 2 和阻尼器 5 的阻尼器力, 其中弹簧 5 的恢复力 $F_{k5} = k_5(y_3(t) - y_1(t))$, 表明该恢复力与物块 1 和物块 3 之间的相对位移相关; 阻尼器 5 的阻尼力 $F_{c5} = c_5(\dot{y}_3(t) - \dot{y}_1(t))$, 表明该阻尼力与物块 1 和物块 3 之间的相对速度成正比。

应用牛顿第二定律, 列出物块 1 在 y 轴方向的运动方程

$$m_1 \ddot{y}_1(t) = F_1(t) - F_{c1} - F_{k1} + F_{c2} + F_{k2} + F_{c5} + F_{k5} \quad (2-5a)$$

参考物块 2 的受力图, 其运动方程为

$$m_2 \ddot{y}_2(t) = F_2(t) - F_{c2} - F_{k2} + F_{c3} + F_{k3} \quad (2-5b)$$

同理, 物块 3 的运动方程为

$$m_3 \ddot{y}_3(t) = F_3(t) - F_{c3} - F_{k3} - F_{c4} - F_{k4} - F_{c5} - F_{k5} \quad (2-5c)$$

上述公式中弹簧 1、弹簧 2 的弹性恢复力及阻尼器 1、阻尼器 2 的阻尼力计算均与例 2-2 相同。弹簧 3 的恢复力 $F_{k3} = k_3(y_3(t) - y_2(t))$, 阻尼器 3 的阻尼力 $F_{c3} = c_3(\dot{y}_3(t) - \dot{y}_2(t))$ 。弹簧 4 的恢复力 $F_{k4} = k_4 y_3(t)$, 阻尼器 4 的阻尼力 $F_{c4} = c_4 \dot{y}_3(t)$ 。由此可见, 弹簧恢复力的计算依赖于弹簧的真实变形, 而阻尼力则取决于运动时阻尼器活塞杆与活塞套筒的相对速度。约束力的方向则要根据实际受力情况具体分析, 如本题中物块 3 的受力。

将上述弹性恢复力及阻尼力的关系式代入式 (2-5a)、式 (2-5b) 和式 (2-5c), 可得三物块系统的运动方程为

$$m_1 \ddot{y}_1(t) + (c_1 + c_2 + c_5) \dot{y}_1(t) - c_2 \dot{y}_2(t) - c_5 \dot{y}_3(t) + (k_1 + k_2 + k_5) y_1(t) - k_2 y_2(t) - k_5 y_3(t) = F_1(t) \quad (2-6a)$$

$$m_2 \ddot{y}_2(t) - c_2 \dot{y}_1(t) + (c_2 + c_3) \dot{y}_2(t) - c_3 \dot{y}_3(t) - k_2 y_1(t) + (k_2 + k_3) y_2(t) - k_3 y_3(t) = F_2(t) \quad (2-6b)$$

$$m_3 \ddot{y}_3(t) - c_5 \dot{y}_1(t) - c_3 \dot{y}_2(t) + (c_3 + c_4 + c_5) \dot{y}_3(t) - k_5 y_1(t) - k_3 y_2(t) + (k_3 + k_4 + k_5) y_3(t) = F_3(t) \quad (2-6c)$$

写成矩阵的形式为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{Y}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{Y}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2-7)$$

其中

$$\mathbf{Y}(t) = \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{Bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{Y}}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \dot{y}_3(t) \end{Bmatrix}, \quad \ddot{\mathbf{Y}}(t) = \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) \\ \ddot{y}_3(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{F}(t) = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 + c_5 & -c_2 & -c_5 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ -c_5 & -c_3 & c_3 + c_4 + c_5 \end{bmatrix}$$