QUSHI JUBU JUNZHI
FENJIE FANGFA JI YINGYONG

趋势局部均值分解方法及应用

安 颖 著

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

趋势局部均值分解方法及应用

安 颖 著

北京邮电大学出版社
·北京·

内容简介

本书全面系统地说明了基于希尔伯特-黄变换思想的趋势局部均值分解方法及其在激光外差测量系统中的应用。内容包括传统的时频分析方法及其局限性、希尔伯特-黄变换思想及核心内容、趋势局部均值分解方法的提出和算法设计、主趋势函数提取的方法以及趋势局部均值分解方法的典型应用。本书提出了趋向性非平稳信号的趋势函数的概念，并对基于趋势局部均值分解的时频谱进行了定义，内容丰富新颖，充分反映了自适应时频分析方法的新理论、新技术、新方法和新应用。本书可以帮助读者尽快跟踪时频分析领域的最新发展，可供电子、信息处理、物理、计算机、机械工程、测控技术等专业的教师、研究生和科技人员教学、自学或进修之用。

图书在版编目(CIP)数据

趋势局部均值分解方法及应用/安颖著. -- 北京：北京邮电大学出版社，2017.6

ISBN 978-7-5635-5131-6

Ⅰ.①趋…　Ⅱ.①安…　Ⅲ.①数据处理—研究　Ⅳ.①TP274

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 125587 号

书　　名	趋势局部均值分解方法及应用
著　　者	安　颖
责任编辑	张展华
出版发行	北京邮电大学出版社
社　　址	北京市海淀区西土城路 10 号(100876)
电话传真	010-82333010　62282185(发行部)　010-82333009　62283578(传真)
网　　址	www.buptpress3.com
电子信箱	ctrd@buptpress.com
经　　销	各地新华书店
印　　刷	北京九州迅驰传媒文化有限公司
开　　本	787 mm×960 mm　1/16
印　　张	10.5
字　　数	205 千字
版　　次	2017 年 6 月第 1 版　2017 年 6 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-5131-6　　定价：32.00 元

前　言

希尔伯特-黄变换是适合处理非平稳、非线性信号的一种新的信号时频分析方法，与基于傅里叶变换的时频分析方法不同，它无须预先选定基函数，而是将时频分析分成两个过程：经验模式分解和希尔伯特变换。其中，经验模式分解是利用信号的极值点信息，将信号不断筛分成具有单分量信号属性的固有模态函数，然后对每一个函数通过希尔伯特变换确定其瞬时频率，最终建立幅度和能量时频谱，完成信号的时频分析。这一方法的出现，打破了傅里叶变换理论的局限性，成为信号处理领域中的研究热点，在机械故障诊断、地球物理、图像处理等方面取得了成功应用。

希尔伯特-黄变换最突出的是自适应分解的思想，这种分解的理论依据是瞬时频率的相位导数定义以及信号的多分量模型，与傅里叶变换的全局分解不同，它是完全依据信号波动的瞬变特征，将信号的局部振动信息理解为多个模态的叠加，其中每一个振动模态是一个频率有明确物理意义的单分量信号，这个分解是局部的或者说是瞬时的分解。当信号不满足狄利克雷条件，傅里叶变换失去意义时，希尔伯特-黄变换是一个强有力的分析方法。

希尔伯特-黄变换中直接决定信号分析精度的是分解方法，国内外专家学者对分解方法进行了诸多研究和完善，目前，最通用、分解效果最好的两个分解算法是经验模式分解和局部均值分解，而局部均值分解在2005年提出后，由于算法简洁、分解效率高、运算速度快，开始成为新的研究热点。但截至目前，国内还没有介绍局部均值分解算法及其应用的著作问世，本书正是在这样的背景下完成的。

本书主要内容来源于河北省自然科学基金项目“希尔伯特-黄变换在激光外差测量中的应用研究”的成果，在研究期间，作者发表相关论文5篇。同时也参考了国内外相关领域的有关经验模式分解、局部均值分解、时频谱建立方法的最新研究报道。本书从非平稳随机信号入手，构建了非平稳随机信号研究方法的知识框架，然后介绍了希尔伯特-黄变换的核心内容，对其理论进行了详细研究，并借鉴其分解思想首次提出了趋势局部均值分解的概念，设计了趋势局部均值分解的

算法，对后续的时频谱进行了定义。这种分解方法兼顾了信号变化的全局性和局部性，使信号的分解更具目的性，大大减小了信号分解的随机性，提高了分解效率和精度。在此基础上，将趋势局部均值分解应用于光外差测量系统中，通过对实时信号进行处理，验证了新方法的有效性和准确性。

本书研究了趋势局部均值分解方法，阐述了分解原理、方法及其应用。全书分为七章。

第一章非平稳随机信号，包含非平稳随机信号的定义、统计描述，以及与平稳随机信号的区别，建立时变自相关函数和时变功率谱的概念；

第二章时频分析基础，包括信号的时间、尺度、频率的基本概念，信号变换的完备性和正交性，瞬时频率的概念和确定方法，单分量信号的定义等等；

第三章时频分析方法，包含短时傅里叶变换、Gabor 变换、Wigner 分布、Cohen 类时频分布和小波变换；

第四章希尔伯特–黄变换，介绍经验模式分解方法、集合经验模式分解方法，固有模态函数的确定方法；

第五章趋势局部均值分解方法，定义趋向性信号的各种趋向函数，提出趋向局部均值分解算法，确定算法流程，完善希尔伯特–黄变换的时频谱，对相位时频谱进行定义和验证；

第六章基于趋势局部均值分解的 DFB 半导体激光器瞬时线宽的测量；

第七章基于趋势局部均值分解的 DFB 半导体激光器的调谐瞬时特性研究。

本书内容丰富，涵盖了现代信号处理中时频分析方法的主要知识体系，为了突出实用性和简洁性，对经典时频分析方法的繁复的数学推导进行了简化，通过建立趋势局部均值分解方法及其应用，对希尔伯特–黄变换进行了有力的补充，很有意义。在本书写作的过程中，作者所在的华北理工大学信息工程学院的领导和同事们给予了作者无私的支持，在此表示由衷的感谢！由于作者水平有限，时频分析方法内容又极其丰富，对新的方法理论上的支撑又需要再深入研究，所以一定存在不少疏漏、错误及不妥之处，恳切盼望读者予以批评指正。

安　颖

2017 年 3 月

目　　录

第一章 非平稳随机信号

随机信号可以分成平稳随机信号和非平稳随机信号。一个平稳随机信号过程的数据特征是数据围绕均值波动，偏离均值之后，有复归均值的调整；同时，方差有限且不随时间改变，其自相关函数随时间衰减。也就是说，平稳随机信号的一阶距和二阶距特性具有移动不变性。

而非平稳随机信号，是指信号的统计规律随着时间发生变化，其均值函数，方差函数不再是常数，自协方差函数也不仅仅是时间间隔的函数[1]。

严格地说，许多实际信号都是属于非平稳随机信号。工程中获得的动态信号，它们的平稳性是相对的、局部的，而非平稳性是绝对的、广泛的。非平稳随机信号用概率与数字特征来描述，工程上多用相关函数与时变功率谱来描述，近年来还发展了用时变参数信号模拟描述的方法和时频分析方法。

本章介绍非平稳信号的统计特征，说明时变相关函数与时变功率谱的概念及其相互关系，介绍时变参数模型谱估计方法及非平稳随机的信号时频分析概念。

1.1 非平稳随机信号的统计描述方法

1.1.1 概率与概率密度函数

借助平稳随机信号的统计特征描述，非平稳随机变量的统计特性也可以用随机变量的数字特征来描述，比如均值、方差、协方差、相关系数等[2]。与平稳随机

信号不同,非平稳随机信号的概率和概率密度函数及统计特征是时间的函数[3]。

在某一时刻 $t=t_i$,对非平稳随机信号 $x(t_i)$ 进行观察,T 为观察时间,T_x 为 T 时间内 $x(t_i)$ 落在 $(x,x+\Delta x)$ 区间内的总时间,其幅值落在 $(x,x+\Delta x)$ 区间内的概率可以用 T_x/T 反映,当 $T\to\infty$ 时,非平稳随机信号 $x(t_i)$ 瞬时值落在 x 值附近 Δx 范围内的概率为:

$$P[x<x(t_i)\leqslant x+\Delta x]=\lim_{T\to\infty}\frac{T_x}{T} \tag{1.1.1}$$

因此,该时刻非平稳随机信号 $x(t_i)$ 的概率密度函数的表达式为:

$$p(x,t_i)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{P[x<x(t_i)\leqslant x+\Delta x]}{\Delta x} \tag{1.1.2}$$

同时,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,t_i)\mathrm{d}x=1 \tag{1.1.3}$$

非平稳随机信号的概率密度函数描述了信号在幅值域中的特征,提供了非平稳信号沿幅值域分布的信息。

1.1.2 非平稳随机信号的统计特征

1. 均值

非平稳随机信号 $x(t)$ 的均值,定义为:

$$m_x(t)=E[x(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x,t)\mathrm{d}x \tag{1.1.4}$$

它是时间 t 的确定函数,是集总意义的统计平均,一般来说,不等于时间上的均值。

设 $x_i(t)(i=1,2,\cdots,N)$ 是 $x(t)$ 的 N 个样本,则均值估计为:

$$\hat{m}_x(t)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i(t) \tag{1.1.5}$$

当样本相互独立时,是一致无偏估计。

2. 均方值

非平稳随机信号 $x(t)$ 的均方值,记为 $D_x(t)$,即:

$$D_x(t)=E[x^2(t)]=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2p(x,t)\mathrm{d}x \tag{1.1.6}$$

一般情况下，它也是时间 t 的函数，也是集总意义上的。

均方值估计为：

$$\hat{D}_x(t)=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}x_i^2(t) \tag{1.1.7}$$

3. 方差

非平稳随机信号 $x(t)$ 的方差也是时间的函数，定义为：

$$\sigma_x^2(t)=D_x(t)-m_x^2(t) \tag{1.1.8}$$

非平稳信号的均值、方差和均方值描述了信号强度方面的特征。

4. 自相关函数

非平稳随机信号 $x(t)$ 在任意两个时刻 t_1,t_2 的取值 x_1 和 x_2 构成二维随机变量，联合概率密度为 $p(x_1,x_2;t_1,t_2)$，则 $x(t)$ 的自相关函数定义为：

$$\begin{aligned}R_{xx}(t_1,t_2)&=E[x(t_1)x(t_2)]\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x_1x_2p(x_1,x_2;t_1,t_2)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\end{aligned} \tag{1.1.9}$$

5. 互相关函数

非平稳随机信号 $x(t)$ 在时刻 t_1 的取值为 $x(t_1)$，$y(t)$ 在时刻 t_2 的取值为 $y(t_2)$，联合概率密度为 $p(x,y;t_1,t_2)$，则互相关函数为：

$$\begin{aligned}R_{xy}(t_1,t_2)&=E[x(t_1)y(t_2)]\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyp(x,y;t_1,t_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{1.1.10}$$

6. 自协方差函数

非平稳随机信号 $x(t)$ 在任意两个时刻 t_1,t_2 的取值为 x_1 和 x_2，自协方差函数为：

$$C_{xx}(t_1,t_2)=E\{[x(t_1)-m_x(t_1)][x(t_2)-m_x(t_2)]\} \tag{1.1.11}$$

自协方差函数与自相关函数的关系为：

$$C_{xx}(t_1,t_2)=R_{xx}(t_1,t_2)-m_x(t_1)m_x(t_2) \tag{1.1.12}$$

7. 互协方差函数

非平稳随机信号 $x(t)$ 在时刻 t_1 的取值为 $x(t_1)$，$y(t)$ 在时刻 t_2 的取值为 $y(t_2)$，互协方差函数为：

$$C_{xy}(t_1,t_2)=E\{[x(t_1)-m_x(t_1)][y(t_2)-m_y(t_2)]\} \tag{1.1.13}$$

互协方差函数与互相关函数的关系为：

$$C_{xy}(t_1,t_2)=R_{xy}(t_1,t_2)-m_x(t_1)m_y(t_2) \tag{1.1.14}$$

1.2 非平稳随机信号的时变功率谱

1.2.1 时变自相关函数

设 $x(t)$ 为非平稳随机信号，由原始定义式(1.1.9)，固定 t_1，令 $t_2=t_1+\tau$，此时自相关函数为：

$$R_{xx}(t_1,\tau)=E[x(t_1)x(t_1+\tau)] \tag{1.2.1}$$

但是，对于非平稳信号来说：

$$R_{xx}(t_1,\tau)=E[x(t_1)x(t_1+\tau)]\neq E[x(t_1)x(t_1-\tau)] \tag{1.2.2}$$

也即，非平稳信号的自相关函数不是偶函数，其傅里叶变换也不再是实函数，因此，给出非平稳信号的另一种偶对称的自相关函数：

$$R_{xx}(t,\tau)=E\left[x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)x\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right] \tag{1.2.3}$$

由式(1.2.3)可知，非平稳随机信号的自相关函数即是时间的函数，又是时延的函数。这种形式的自相关函数可以使傅里叶变换保持实偶特性。

1.2.2 时变功率谱密度函数

非平稳随机信号 $x(t)$ 的自相关函数 $R_{xx}(t,\tau)$ 的傅里叶变换为：

$$S_{xx}(t,\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}R_{xx}(t,\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau \tag{1.2.4}$$

其反变换为：

$$R_{xx}(t,\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S_{xx}(t,\omega)e^{j\omega\tau}d\omega \tag{1.2.5}$$

$S_{xx}(t,\omega)$ 为时变功率谱密度函数，是频率的函数，也是时间的函数。

式(1.2.4)和式(1.2.5)是依据维纳-辛钦定理而存在的一对傅里叶变换对。

由于 $R_{xx}(t,\tau)$ 是实偶函数，则存在：

$$S_{xx}(t,-\omega)=S_{xx}(t,\omega) \tag{1.2.6}$$

时变功率谱密度函数实际上描述了功率在时间上和频率上的分布情况。

1.3　非平稳随机信号的时频分析方法

信号的描述方法有时间域、频率域和时频分布。

用信号的幅值随时间变化的函数表达式或波形来描述信号的方法称为时域描述。时域描述是信号最直接的描述方法，从时域波形中的快慢和波动情况看，它反映了信号的幅值随时间变化的过程。因此，时域描述比较直观、形象，便于观察和记录。

把时域信号通过数学处理和变换变成以频率 f 或角频率 ω 为独立变量，以相应的幅值或相位为因变量的函数表达式或图形，称为频域分析。频域分析可以揭示信号的频率结构，即组成信号的各频率分量的幅值、相位与频率的对应关系。

信号的时频表示即是用时间和频率的联合函数来表示信号，而以时间和频率的联合函数来同时描述信号在不同时间和频率的能量、功率或强度，称为信号的时频分析[3]。信号的时频分析则是非平稳随机信号分析的有效工具，可以同时反映时间和频率信息，揭示非平稳随机信号所代表的被测物理量的本质；可以知道信号的时间特征参数，如周期、峰值、均值、方差、均方值等；还可以反映信号变化的局部特性。典型的时频表示有短时傅里叶变换、小波变化和 Gabor 变换等，常用于图像处理、语音处理、医学、故障诊断等信号分析中。

第二章 时频分析基础

对于非平稳随机信号来说，除了利用统计量来描述，如时变功率谱、时变参数模型之外，时频分析方法也是经常被采用的方法。时频分析方法也是建立时变功率谱和时变参数模型的最为有效的方法之一。

本章主要介绍时频分析中涉及的瞬时频率、时宽、带宽、群延迟等基本概念，说明测不准原理，对单分量信号和多分量信号进行比较和分析，并对信号的分解、重构、正交变换、标架、基函数进行定义，为后续时频分析方法奠定基础。

2.1 时频分析的必要性

1822 年，法国数学家傅里叶在热传导解析理论的研究中，提出并证明了将周期函数展开为正弦级数的原理，奠定了傅里叶分析的理论基础。

傅里叶分析通常指傅里叶级数展开和傅里叶变换。傅里叶分析的充分条件是信号满足狄利克雷条件[3]，即在一个定义区间上：

(1)信号 $x(t)$在一个周期内只有有限个第一类间断点，即当 t 从左或右趋向于这个间断点时，函数有左极限值和右极限值；

(2)信号 $x(t)$在一周期内只有有限个极大值或极小值；

(3)信号在一个周期内是绝对可积分的，即 $\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t)\,\mathrm{d}t$ 应为有限值。

其中，傅里叶级数是双无限序列到周期函数的一种变换，要求信号在一个周

期内绝对可积；而傅里叶变换不要求信号的周期性，但信号在$(-\infty,+\infty)$应为能量有限信号。当信号$x(t)$满足$\int_{-\infty}^{+\infty}x^2(t)\mathrm{d}t<+\infty$，则认为信号的能量是有限的，称之为能量有限信号，简称能量信号。

若信号$x(t)$在区间$(-\infty,+\infty)$的能量是无限的，即$\int_{-\infty}^{+\infty}x^2(t)\mathrm{d}t\rightarrow+\infty$，但它在有限区间$(t_1,t_2)$的平均功率是有限的，即$\frac{1}{t_2-t_1}\int_{t_1}^{t_2}x^2(t)\mathrm{d}t<+\infty$，这种信号称为功率有限信号，简称功率信号。

傅里叶级数展开是傅里叶变换的一种特殊表达形式，周期信号可以用傅里叶级数展开，或用傅里叶变换；非周期信号只能用傅里叶变换。

傅里叶变换的数学表达式如下：

$$S(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \tag{2.1.1}$$

变换后，时间域描述的信号就被转换到频率域或频率空间，表征了信号的频率特性，这个频率特性不包含时间信息。其逆变换为：

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \tag{2.1.2}$$

傅里叶分析的正变换将信号从时域映射到频域，逆变换则建立了信号从频域到时域的映射，由此，时域和频域构成了观察一个信号的两种方式，使得在时间域内难以观察到的信号的特征，在频率域内能清楚地显示出来，反之亦然。傅里叶分析在平稳信号处理中处于极为重要的地位，一直是首选的信号分析方法。

但是傅里叶分析由于其本身仅在信号满足狄利克雷条件时才有效，因此出现了以下局限性：

(1)信号必须是严格周期或者是平稳的；

(2)信号是在线性空间上定义的，要满足线性条件；

(3)傅里叶频谱分析只反映频率和幅值(能量)关系，无法同时保留时间、频率和幅值(能量)三种信息。

对实际中的待分析信号来说，都表现为有限长、非线性或者非平稳的，这就严重限制了傅里叶频谱分析在实际应用中的普适性。

傅里叶分析是最早研究信号的频率特性，同时也是目前发展最成熟的信号分

析理论。傅里叶谱反映了振幅或能量随频率的分布，它的核心在于将信号表示为具有不同频率的谐波函数的线性叠加，因此要求被处理信号满足线性和平稳性；而且，傅里叶分析中的频率是用整个正弦信号定义的，使用的是一种全局的变换，而获知信号频率随时间的变化规律在分析非线性、非平稳信号时尤为重要，因此，非平稳信号需要对信号采用时频分析的方法。

对信号进行分析时，我们常常希望在缺乏外界描述的情况下，精确地了解信号的频率成分，以及各频率成分的时间分布情况，于是，一种能够同时在时间和频率上表示信号的密度和强度的分析方法被提出，这种分析方法就是时间-频率联合分析（joint time-frequency analysis），简称时频分析。

时频分析将信号映射到二维时间-频率平面上进行分析，以便揭示信号中包含的频率特征及其随时间变化的情况。时频分析通过分析频谱随时间的变化规律，并将其与频谱改变的原因相结合，能很好地分析信号特性，进而对实际工作系统进行识别、检测，指导生产实践。

2.2 瞬时频率

瞬时频率是时频分析中最为基础和重要的概念。当信号是确定性信号时，我们用信号周期的倒数来描述频率，当信号周期长，信号变化慢，频率低；反之，当信号周期较短，意味着信号频率较高。这样的频率概念是我们熟知并使用多年的。但是当信号是非确定性信号时，信号的随机性，使得信号的频率不具有直观性，同时，信号的随机性常常使得信号的频率也处在变化之中，此时，瞬时频率的概念应运而生，并且直到现在，对瞬时频率概念的研究也没有终止，我们仍然需要一个更精准的方法来表述信号变化中的频率。

2.2.1 傅里叶频率

自然界中的信号，一般都是时间 t 的函数，也就是说，信号通常出现在时间域