小波分析的数学理论

李登峰 著

科学出版社

小波分析的数学理论

李登峰　著

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书首先介绍空间 L^p、Hilbert 空间 L^2、Fourier 变换和广义函数等基本内容，然后着重介绍小波的数学理论. 第 2 章介绍空间 L^2 上的基，包括 Gabor 基、局部正余弦基和小波基；第 3 章建立空间 L^2 中元素成为小波的充要条件；第 4 章和第 5 章讨论构造小波的通用方法——多尺度分析；第 6 章介绍 Daubechies 小波的构造及 Daubechies 小波的性质；第 7 章和第 8 章分别介绍小波框架和 Gabor 框架的基本内容和最新研究结果；最后一章介绍作者与合作者在国际上首次建立的局部域上小波分析和 Gabor 分析的基本理论.

本书可供数学相关专业高年级本科生、研究生、教师以及其他相关专业的科研工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

小波分析的数学理论/李登峰著. —北京: 科学出版社, 2017. 10

ISBN 978-7-03-054883-2

I. ①小… II. ①李… III. ①小波理论 IV. ①O174.22

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 253753 号

责任编辑: 赵彦超 李静科 / 责任校对: 邹慧卿

责任印制: 张 伟 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 10 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16

2017 年 10 月第一次印刷 印张: 17 1/2

字数: 344 000

定价: 108.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前　　言

小波分析的基本理论已相当成熟, 具体可参见本书作者和杨晓慧编著的《小波基本理论和应用实例》. 为了给研究生讲授小波分析的具有一定深度的数学理论, 作者在近十几年中花了大量精力撰写了小波数学理论讲稿, 并对讲稿的取材与处理进行了相当多的尝试. 本书就是在讲稿基础上整理而成的.

小波理论内容十分丰富, 如果要把其大部分内容都包含在一本书中, 那该书的篇幅将变得不可想象. 因此, 作者在内容选择上强调引领作用, 不求面面俱到, 所以有意识地做了一定取舍. 同时, 在使用讲稿过程中, 作者不断对内容进行更新, 尽量加入最新成果, 并进一步阐明有关结论的背景、思想和意义, 甚至给出若干注记, 以便读者能够接触到小波的部分最新进展和前沿问题. 自然, 也包括作者和合作者的部分结果. 另外, 作者在对内容的阐述上, 既透彻讲解重点和难点, 又突出思想性和方向性, 更强调原理和方法.

考虑到读者不同的数学基础, 再加上研究生来自不同院校，并兼顾到不同院校开设的本科生课程有一定差别, 所以作者在第 1 章撰写了 L^p 空间, Hilbert 空间 L^2, Fourier 变换和广义函数等内容作为本书的基础. 这些都是泛函分析中很成熟的内容, 作者在参阅有关著作的基础上, 根据本书的需要对内容进行了一定筛选.

通常所说的小波, 是由一个函数 (母小波, 简称小波) 经过二进制伸缩和整数平移所产生的空间 L^2 或其他空间的一个基底. 所以第 2 章介绍空间 L^2 上的基, 包括 Gabor 基、局部正余弦基和小波基.

在第 2 章给出小波概念的基础上, 第 3 章建立空间 L^2 中元素成为小波的充要条件并应用这些条件给出小波集的特征刻画, 进而提供一些小波集例子.

第 4 章和第 5 章讨论构造小波的通用方法 —— 多尺度分析. 多尺度分析是小波发展史上里程碑式的成果之一, 所以这两章阐明多尺度分析的核心内容, 包括: 多尺度分析概念及基本性质、由多尺度分析构造小波、Mallat 分解算法与重建算法、小波来自多尺度分析的充要条件、构成多尺度分析的尺度函数特征刻画以及低通滤波器应满足的条件.

Daubechies 小波是小波发展史上另一个里程碑式的成果, 也是应用多尺度分析构造小波的最成功例子. 所以第 6 章介绍 Daubechies 小波的构造及 Daubechies 小波的性质, 也包括作者的工作: 一类 Daubechies 型小波的构造.

小波框架是小波理论中的活跃研究方向之一. 因此第 7 章介绍小波框架内容, 包括小波框架各种各样的必要条件和充分条件, 特别呈现了施咸亮教授及其合作者

的工作.

与小波框架一样活跃的研究内容是 Gabor 框架. Gabor 框架之所以受到人们关注, 主要在于它的广泛应用, 尤其是在数字通信、图像处理等领域中的应用具有广阔前景. 因此第 8 章介绍 Gabor 框架的最基本也是最核心的内容, 包括: Gabor 框架的必要条件、充分条件及 Gabor 框架恒等式、Gabor 框架算子表示、Gabor 框架扩张为 Gabor 紧框架等, 也包括作者的部分工作.

欧氏空间上小波分析和 Gabor 分析的基本理论已相当成熟. 但随着时间的推移, 其他抽象空间上也出现了相对应的理论内容. 例如, 局部紧 Abelian 群上多尺度分析和小波理论、抽象 Hilbert 空间上多尺度分析理论, 等等. 特别地, 在一些抽象空间上得到的小波结果并不是欧氏空间上相应结果的简单推广, 而是有本质差别的. 本书不具体介绍这方面的工作, 仅呈现作者与合作者在国际上首次建立的局部域上小波分析和 Gabor 分析的基本理论. 这就是最后一章的内容.

正如前面所说, 本书内容不求全和多, 所以作者刻意没有撰写双正交小波、小波包、多进制小波、向量小波、高维小波等内容, 更不包括小波逼近阶及光滑性、具有理想性质的小波构造及算法、加细函数存在性及唯一性、框架多尺度分析及扩张原理、函数空间的小波刻画及小波展开、小波的代数性质及几何性质、不规则小波框架及 Gabor 框架、除局部域外其他抽象空间上小波构造及性质等专题内容. 作者认为, 读者在具备实分析、复分析、泛函分析、抽象代数等基本知识的基础上, 只要掌握了本书介绍的小波思想、方法和原理, 就可以独立去获取各自感兴趣的研究方向的内容, 甚至去获取与小波相关的其他分支内容, 并在此基础上开展研究工作. 因此, 对有意在小波领域进行理论研究的读者来说, 本书内容都是基础性的和一般性的.

在讲授本书内容过程中, 作者的多名研究生参加了讨论并指出了不少错误. 特别地, 澳门大学博士研究生李艳婷女士仔细校对了本书内容并提出了许多宝贵建议. 在此, 对他 (她) 们表示衷心感谢!

本书的出版得到国家自然科学基金 (No.61471410) 的资助!

由于作者水平有限, 本书内容难免有疏漏和不妥之处, 作者诚挚欢迎读者批评指正!

李登峰

(dfli2003@aliyun.com)

2017 年 3 月

目　　录

第 1 章　L^p 空间、Fourier 变换和广义函数

假定读者熟悉实变函数和泛函分析的基本内容. 要学习小波的数学理论, 还必须掌握空间 L^p 等一些知识, 而这些知识在大多数泛函分析教材中介绍得很少甚至没有介绍. 本章就介绍这些内容以供读者查阅.

设 $\mathbb{E}$ 是 n 维欧氏空间 $\mathbb{R}^n$ 中的可测集. 空间 $L^p(\mathbb{E})$ 理论是调和分析、小波分析的基础. 它不仅在分析学中占有非常重要的地位, 而且在数学的其他分支中具有极其广泛的应用. 在这一章里, 我们首先介绍 L^p 空间, 然后讨论使用较多的 Hilbert 空间 L^2, 最后给出非常重要的 Fourier 变换和广义函数.

1.1　L^p　空　间

首先给出 $L^p(\mathbb{E})$ 空间的定义.

定义 1.1.1　设 $\mathbb{E} \subset \mathbb{R}^n$ 且可测, $f(x)$ 是 $\mathbb{E}$ 上的可测函数, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. 对 $1 \leqslant p < +\infty$, 令

$$L^p(\mathbb{E}) = \left\{ f(x) \;\middle|\; \int_{\mathbb{E}} |f(x)|^p dx < +\infty \right\},$$

则称 $L^p(\mathbb{E})$ 为 $\mathbb{E}$ 上的 L^p 空间; 对 $p = +\infty$, 令

$$L^\infty(\mathbb{E}) = \{ f(x) \mid 存在\ C > 0\ 使\ |f(x)| \leqslant C,\ \text{a. e. } \mathbb{E} \},$$

则称 $L^\infty(\mathbb{E})$ 为 $\mathbb{E}$ 上的 L^∞ 空间. 满足 $|f(x)| \leqslant C$, a. e. $\mathbb{E}$ 的 $f(x)$ 称为本性有界的, 此时, 记

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{E}} |f(x)| = \inf\{ C \mid |f(x)| \leqslant C,\ \text{a. e. } \mathbb{E} \}.$$

容易看出, 依通常函数的加法和数乘, $L^p(\mathbb{E})$ $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$ 为线性空间. 对 $f(x) \in L^p(\mathbb{E})$, $1 \leqslant p < +\infty$, 令

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{E}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}};$$

对 $f(x) \in L^\infty(\mathbb{E})$, 令

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{E}} |f(x)|,$$

那么 $\|f\|_p$ $(p \geqslant 1)$ 是 $L^p(\mathbb{E})$ 上的范数. 这个结论可利用 Hölder 不等式来证明.

定理 1.1.1 (Hölder 不等式)　给定 p,q, $1 \leqslant p,q \leqslant +\infty$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (约定 $p=1$ 时, $q=+\infty$). 如果 $f \in L^p(\mathbb{E}), g \in L^q(\mathbb{E})$, 则 $fg \in L(\mathbb{E})$ 且

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q. \tag{1.1}$$

证明　若 $p=1$, 则 $q=+\infty$, 此时不等式 (1.1) 为

$$\int_{\mathbb{E}} |f(x)g(x)|dx \leqslant \|g\|_\infty \int_{\mathbb{E}} |f(x)|dx.$$

它显然成立. 下面设 $1<p<+\infty$. 当 $\|f\|_p=0$ 或 $\|g\|_q=0$ 时, 显然有 $f(x)g(x)=0$, a. e. $x \in \mathbb{E}$, 从而式 (1.1) 成立. 因此仅需考虑 $\|f\|_p>0, \|g\|_q>0$ 的情形. 注意到对 $a \geqslant 0, b \geqslant 0$ 有不等式

$$\frac{1}{p}a+\frac{1}{q}b \geqslant a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}},$$

所以令 $a=\dfrac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}, b=\dfrac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}$, 则

$$\frac{|f(x)||g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}+\frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}.$$

上式两边在 $\mathbb{E}$ 上积分便得 $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p\|f\|_q$. 证毕.

注　后面章节大量使用离散形式的 Hölder 不等式:

$$\forall \{a_k\}_{k\in J} \in l^p(J), \quad \{b_k\}_{k\in J} \in l^q(J), \quad \left|\sum_{k\in J} a_k b_k\right| \leqslant \left(\sum_{k\in J}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k\in J}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

其中 J 为可数指标集, $1 \leqslant p,q \leqslant +\infty$ 且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ (约定 $p=1$ 时, $q=+\infty$). 这里 $l^p(J)$ 的定义为

$$1 \leqslant p<+\infty, \quad l^p(J)=\left\{\{a_k\}_{k\in J} \;\middle|\; a_k \in \mathbb{C}, \sum_{k\in J}|a_k|^p<+\infty\right\},$$

$$p=+\infty, \quad l^\infty(J)=\left\{\{a_k\}_{k\in J} \;\middle|\; a_k \in \mathbb{C}, \sup_{k\in J}|a_k|<+\infty\right\}.$$

自然, $l^p(J)$ 中元素 $\{a_k\}_{k\in J}$ 的范数为

$$\left\|\{a_k\}_{k\in J}\right\|_p=\left(\sum_{k\in J}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p<+\infty,$$

$$\left\|\{a_k\}_{k\in J}\right\|_p=\sup_{k\in J}|a_k|, \quad p=+\infty.$$

现在来证 $\|f\|_p$ $(p \geqslant 1)$ 是 $L^p(\mathbb{E})$ 上的范数.

定理 1.1.2 前面定义的 $\|f\|_p$ $(p \geqslant 1)$ 满足范数公理:

(1) $\|f\|_p \geqslant 0$ 且 $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$, a. e. $\mathbb{E}$;

(2) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ 或 $\mathbb{C}$, $\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$;

(3) $\forall f, g \in L^p(\mathbb{E})$, $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.

证明 首先看 $p = 1$ 的情形. 此时 (2) 和 (3) 显然. $\|f\|_1 \geqslant 0$ 也显然. 而

$$\|f\|_1 = 0 \Leftrightarrow \int_{\mathbb{E}} |f(x)| dx = 0 \Leftrightarrow |f(x)| = 0, \quad \text{a. e. } \mathbb{E}.$$

因此 $p = 1$ 时结论成立.

其次看 $1 < p < +\infty$ 的情形. (1) 和 (2) 显然. 只需证 (3). $\forall f, g \in L^p(\mathbb{E})$, 由 Hölder 不等式知

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{E}} |f(x)+g(x)|^p dx &= \int_{\mathbb{E}} |f(x)+g(x)|^{p-1} |f(x)+g(x)| dx \\
&\leqslant \int_{\mathbb{E}} |f(x)+g(x)|^{p-1} |f(x)| dx + \int_{\mathbb{E}} |f(x)+g(x)|^{p-1} |g(x)| dx \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{E}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{E}} |f(x)+g(x)|^{(p-1)\cdot \frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\quad + \left(\int_{\mathbb{E}} |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{E}} |f(x)+g(x)|^{(p-1)\cdot \frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{E}} |f(x)+g(x)|^p dx \right)^{\frac{p-1}{p}} (\|f\|_p + \|g\|_p).
\end{aligned}$$

如果 $\int_{\mathbb{E}} |f(x)+g(x)|^p dx \neq 0$, 则上式变为 $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$. 当 $\int_{\mathbb{E}} |f(x)+g(x)|^p dx = 0$ 时, $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$ 显然成立.

当 $p = +\infty$ 时, (1), (2) 和 (3) 显然. 证毕.

注 三角不等式 $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$ 称为 Minkowski 不等式. Minkowski 不等式可以推广到积分形式, 即有如下的广义 Minkowski 不等式.

定理 1.1.3 设 $f(x,y)$ 是 $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ 上的可测函数. 如果对 a. e. $y \in \mathbb{R}^n$, $f(x,y) \in L^p(\mathbb{R}^n)(1 \leqslant p < +\infty)$ 且有

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x,y)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} dy = M < \infty,$$

则

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y) dy \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x,y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dy.$$

注 由广义 Minkowski 不等式可导出 Minkowski 不等式:

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

我们以 $\mathbb{R}$ 上 Minkowski 不等式为例说明如下: 在 $\mathbb{R}\times[0,2]$ 上定义二元函数

$$f(x,y) = \begin{cases} f(x), & 0 \leqslant y < 1, \\ g(x), & 1 \leqslant y \leqslant 2, \end{cases}$$

其中 $f, g \in L^p(\mathbb{R})$, 则

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy\right|^p = \left|\int_0^1 f(x)dy + \int_1^2 g(x)dy\right|^p = |f(x)+g(x)|^p,$$

从而

$$\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dy\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)+g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \|f+g\|_p.$$

而

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dy &= \int_0^1\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dy + \int_1^2\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dy \\ &= \int_0^1\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dy + \int_1^2\left(\int_{\mathbb{R}}|g(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dy \\ &= \|f\|_p + \|g\|_p.\end{aligned}$$

因此 $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.

为证定理 1.1.3, 我们给出 Hölder 不等式的逆命题.

定理 1.1.4 设 $g(x)$ 是可测集 $\mathbb{E}$ 上的实可测函数. 若存在 $M>0$ 使得对所有在 $\mathbb{E}$ 上可积的简单函数 $\varphi(x)$ 有

$$\left|\int_{\mathbb{E}} g(x)\varphi(x)dx\right| \leqslant M\|\varphi\|_q,$$

则 $g\in L^p(\mathbb{E})$ 且 $\|g\|_p \leqslant M$, 其中 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

证明 $q>1$ 的情形. 对于 $|g(x)|^p$, 做具有紧支集的非负可测简单函数渐升列 $\{\varphi_k(x)\}_k$ 使

$$\lim_{k\to+\infty} \varphi_k(x) = |g(x)|^p, \quad x \in \mathbb{E}.$$

令 $\psi_k(x) = [\varphi_k(x)]^{\frac{1}{q}} \operatorname{sign} g(x)$, 这里符号函数 $\operatorname{sign} g(x)$ 的定义如下: 当 $g(x)>0$ 时, $\operatorname{sign} g(x)=1$; 当 $g(x)=0$ 时, $\operatorname{sign} g(x)=0$; 当 $g(x)<0$ 时, $\operatorname{sign} g(x)=-1$. 则

$\|\psi_k\|_q = \left(\int_{\mathbb{E}} \varphi_k(x)dx\right)^{\frac{1}{q}}$. 注意到

$$0 \leqslant \varphi_k(x) = [\varphi_k(x)]^{\frac{1}{p}}[\varphi_k(x)]^{\frac{1}{q}} \leqslant [\varphi_k(x)]^{\frac{1}{q}}|g(x)| = \psi_k(x)g(x),$$

所以由假设知

$$\int_{\mathbb{E}} \varphi_k(x)dx \leqslant \int_{\mathbb{E}} \psi_k(x)g(x)dx \leqslant M\|\psi_k\|_q = M\left(\int_{\mathbb{E}} \varphi_k(x)dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

从而得

$$\int_{\mathbb{E}} \varphi_k(x)dx \leqslant M^p.$$

令 $k \to +\infty$ 得, $\int_{\mathbb{E}} |g(x)|^p dx \leqslant M^p$.

$q = 1$ 的情形. 不妨设 $g(x) \geqslant 0$. 用反证法. 如果 $g(x) \notin L^\infty(\mathbb{E})$, 则存在 $\mathbb{E}$ 上的可测集列 $\{\Lambda_k\}_k$, $0 < |\Lambda_k| < +\infty$ $(k = 1, 2, \cdots)$ 使

$$g(x) \geqslant k, \quad x \in \Lambda_k, \quad k = 1, 2, \cdots.$$

令 $\varphi_k(x) = \chi_{\Lambda_k}(x)$, 则

$$\frac{\int_{\mathbb{E}} \varphi_k(x)g(x)dx}{\|\varphi_k\|_1} = \frac{\int_{\Lambda_k} g(x)dx}{|\Lambda_k|} \geqslant \frac{k|\Lambda_k|}{|\Lambda_k|} = k.$$

这与假设 $\int_{\mathbb{E}} \varphi_k(x)g(x)dx \leqslant M\|\varphi_k\|_1$ 矛盾. 证毕.

定理 1.1.3 的证明 $p = 1$ 时, 显然成立. 因此设 $p > 1$. 令

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x, y)|dy,$$

那么对任意可积简单函数 $\varphi(x)$ 有

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^n} F(x)\varphi(x)dx\right| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |F(x)\varphi(x)|dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x, y)|dy|\varphi(x)|dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x, y)||\varphi(x)|dx\right)dy \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x, y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} dy \\
&= M\|\varphi\|_q,
\end{aligned}$$

其中 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 因此由定理 1.1.4 知, $\|F\|_p \leqslant M$, 即

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)dy\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x,y)|dy\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x,y)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} dy.$$

证毕.

再回到 Hölder 不等式:

$$\left|\int_{\mathbb{E}} f(x)g(x)dx\right| \leqslant \|f\|_p\|g\|_q,$$

其中 $f\in L^p(\mathbb{E})$, $g\in L^q(\mathbb{E})$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 它的重要特例之一就是 Schwarz 不等式, 即 $p=q=2$ 时的情形:

$$\left|\int_{\mathbb{E}} f(x)g(x)dx\right| \leqslant \left(\int_{\mathbb{E}}|f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{E}}|g(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

另外, 在 Hölder 不等式中, 如果取 $\|g\|_q=1$, 则

$$\|f\|_p \geqslant \left|\int_{\mathbb{E}} f(x)g(x)dx\right|. \tag{1.2}$$

那么是否存在 $g\in L^q(\mathbb{E})$ 且 $\|g\|_q=1$ 使式 (1.2) 中等号成立? 答案是肯定的, 即有如下定理.

定理 1.1.5　设实函数 $f\in L^p(\mathbb{E})$, $1\leqslant p<+\infty$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, 那么存在函数 $g\in L^q(\mathbb{E})$ 满足 $\|g\|_q=1$ 且

$$\|f\|_p=\int_{\mathbb{E}} f(x)g(x)dx. \tag{1.3}$$

证明　当 $p=1$ 时, 取 $g(x)=\operatorname{sign} f(x)$, 则显然 $\|g\|_\infty=1$ 且

$$\int_{\mathbb{E}} f(x)g(x)dx=\int_{\mathbb{E}}|f(x)|dx=\|f\|_1.$$

当 $1<p<+\infty$ 时, 不妨设 $\|f\|_p\neq 0$, 此时取 $g(x)=\left(\dfrac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^{p-1}\operatorname{sign} f(x)$, 则

$$\int_{\mathbb{E}}|g(x)|^q dx=\int_{\mathbb{E}}\left|\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}\right)^{p-1}\operatorname{sign} f(x)\right|^{\frac{p}{p-1}}dx$$
$$=\int_{\mathbb{E}}|f(x)|^p dx\cdot\frac{1}{\|f\|_p^p}=1,$$

即 $\|g\|_q = 1$. 而

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{E}} f(x)g(x)dx &= \int_{\mathbb{E}} \frac{|f(x)|^{p-1}}{\|f\|_p^{p-1}} \cdot f(x)\ \mathrm{sign} f(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{E}} |f(x)|^{p-1}|f(x)|dx\|f\|_p^{1-p} \\ &= \|f\|_p.\end{aligned}$$

证毕.

该定理表明, 当 $1 \leqslant p < +\infty$ 时,

$$\|f\|_p = \sup_{\|g\|_q=1} \left\{ \int_{\mathbb{E}} f(x)g(x)dx \right\}, \tag{1.4}$$

其中 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ 且式 (1.4) 右端的上确界可达到.

对于 $p = \infty$ 有如下定理.

定理 1.1.6 设实函数 $f \in L^\infty(\mathbb{E})$, 那么

$$\|f\|_\infty = \sup_{\|g\|_1=1} \left\{ \int_{\mathbb{E}} f(x)g(x)dx \right\}, \tag{1.5}$$

其中上确界不一定达到.

证明 显然, 对于 $\|g\|_1 = 1$ 有

$$\int_{\mathbb{E}} f(x)g(x)dx \leqslant \|f\|_\infty \int_{\mathbb{E}} |g(x)|dx = \|f\|_\infty.$$

因此

$$\|f\|_\infty \geqslant \sup_{\|g\|_1=1} \left\{ \int_{\mathbb{E}} f(x)g(x)dx \right\}. \tag{1.6}$$

记 $M = \|f\|_\infty > 0$. $\forall \varepsilon > 0$, 存在正可测集 $\mathbb{A} \subset \mathbb{E}$ 使 $\forall x \in \mathbb{A}$,

$$|f(x)| > M - \varepsilon.$$

否则 $\forall$ a. e. $x \in \mathbb{E}$ 有 $|f(x)| \leqslant M - \varepsilon$, 这与 M 为 $\|f\|_\infty$ 矛盾. 令 $\alpha = |\mathbb{A}|$ 且

$$g(x) = \frac{1}{\alpha}\chi_{\mathbb{A}}(x)\mathrm{sign}\ f(x),$$

则

$$\|g\|_1 = \int_{\mathbb{E}} |g(x)|dx = \frac{1}{\alpha}\int_{\mathbb{A}} \chi_{\mathbb{A}}(x)dx = 1$$

且

$$\int_{\mathbb{E}} f(x)g(x)dx = \frac{1}{\alpha}\int_{\mathbb{E}} \chi_{\mathbb{A}}(x)|f(x)|dx = \frac{1}{\alpha}\int_{\mathbb{A}} |f(x)|dx > M - \varepsilon.$$

由 ε 的任意性得

$$\|f\|_\infty = M \leqslant \int_{\mathbb{E}} f(x)g(x)dx \leqslant \sup_{\|g\|_q=1}\left\{\int_{\mathbb{E}} f(x)g(x)dx\right\}. \tag{1.7}$$

式 (1.6) 和式 (1.7) 表明, 式 (1.5) 成立.

令 $\mathbb{E}=[0,1], f(x)=x\ (x\in\mathbb{E})$, 则 $\|f\|_\infty = 1$. 此时 $\forall g\in L^1([0,1])$ 且 $\|g\|_1=1$, 有

$$\left|\int_0^1 f(x)g(x)dx\right| \leqslant \int_0^1 x|g(x)|dx < \int_0^1 |g(x)|dx = 1 = \|f\|_\infty.$$

这说明式 (1.5) 中的上确界未必一定达到. 证毕.

前面表明, $L^p(\mathbb{E})$ 是线性赋范空间, 当然为度量空间, 它的度量为

$$d(f,g) = \|f-g\|_p,\quad 1\leqslant p\leqslant +\infty.$$

f 与 g 之间的距离 $\|f-g\|$ 刻画了 f 与 g 之间的接近程度. 如同 $\mathbb{R}^n$ 中用距离定义极限一样, 在函数空间 $L^p(\mathbb{E})$ 中也可用上述引入的距离来定义极限.

定义 1.1.2　设 $f_m\in L^p(\mathbb{E}), m\in\mathbb{N}$, 其中 $\mathbb{N}=\{1,2,\cdots\}$. 如果存在 $f\in L^p(\mathbb{E})$ 使得

$$\lim_{m\to+\infty} d(f_m,f) = \lim_{m\to+\infty}\|f_m-f\|_p = 0, \tag{1.8}$$

则称函数列 $\{f_m\}_{m=1}^{+\infty}$ 依 L^p 范数收敛于 f, 记作

$$f_m \xrightarrow{L^p} f \quad 或 \quad \lim_{m\to+\infty} f_m = f \quad (L^p).$$

在上下文清楚时, 写为 $f_m\to f$ 或 $\lim\limits_{m\to+\infty} f_m = f$. 通常情况下, 当 $1\leqslant p<+\infty$ 时, L^p 收敛称为 “p 次平均收敛”. 特别地, $p=1,\ 2$ 时分别称为“平均收敛”和“均方收敛”.

以上定义的形式完全与 $\mathbb{R}^n$ 中定义相同. 因此 $\mathbb{R}^n$ 中极限运算的一些性质在 L^p 中完全具有. 例如极限唯一、收敛点列有界、极限保持线性等, 读者可自行给出这些性质. 但下列两个定理是空间 L^p 中比较重要的性质.

定理 1.1.7　设 $1\leqslant p<+\infty$. 如果 $f_m \xrightarrow{L^p} f$, 则 $\{f_m\}_{m=1}^{+\infty}$ 依测度收敛到 f.

证明 $\forall\varepsilon>0$, 令 $\mathbb{E}_m(\varepsilon)=\{x\in\mathbb{E}\mid|f_m(x)-f(x)|>\varepsilon\}$, 则

$$\begin{aligned}\varepsilon|\mathbb{E}_m(\varepsilon)|^{\frac{1}{p}}&=\varepsilon\left(\int_{\mathbb{E}_m(\varepsilon)}dx\right)^{\frac{1}{p}}=\left(\int_{\mathbb{E}_m(\varepsilon)}\varepsilon^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\left(\int_{\mathbb{E}_m(\varepsilon)}|f_m(x)-f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\left(\int_{\mathbb{E}}|f_m(x)-f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\&=\|f_m-f\|_p\to 0\quad(m\to+\infty).\end{aligned}$$

故 $\lim\limits_{m\to+\infty}|\mathbb{E}_m(\varepsilon)|=0$. 证毕.

定理 1.1.8 (L^p 控制收敛定理) 设 f,f_m 为可测集 $\mathbb{E}$ 上可测函数 $(m=1,2,\cdots)$ 且

$$\lim_{m\to+\infty}f_m(x)=f(x),\quad \text{a. e. } x\in\mathbb{E}.$$

如果存在 $g\in L^p(\mathbb{E})$ $(1\leqslant p<+\infty)$ 使得 $|f_m(x)|\leqslant|g(x)|$, a. e. $x\in\mathbb{E}$, 则 $f_m\xrightarrow{L^p}f$.

证明 令 $h_m(x)=|f_m(x)-f(x)|^p$ $(m=1,2,\cdots)$, 则 $\{h_m(x)\}_m$ 是 $\mathbb{E}$ 上可测函数列且 $\lim\limits_{m\to+\infty}h_m(x)=0$, a. e. $x\in\mathbb{E}$. 显然

$$|h_m(x)|\leqslant(|f_m(x)|+|f(x)|)^p\leqslant 2^p|g(x)|^p,\quad \text{a. e. } x\in\mathbb{E}.$$

注意到 $2^pg^p\in L^1(\mathbb{E})$, 所以由 Lebesgue 控制收敛定理得

$$\begin{aligned}\lim_{m\to+\infty}\|f_m-f\|_p^p&=\lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{E}}|f_m(x)-f(x)|^p dx\\&=\lim_{m\to+\infty}\int_{\mathbb{E}}|h_m(x)|dx=0,\end{aligned}$$

即 $f_m\xrightarrow{L^p}f$ $(m\to+\infty)$. 证毕.

我们知道, 在 $\mathbb{R}^n$ 中, Cauchy 收敛定理起着重要作用. 在 $L^p(\mathbb{E})$ 中可建立类似结论.

定义 1.1.3 设 $\{f_m\}_{m=1}^{+\infty}\subset L^p(\mathbb{E}),1\leqslant p\leqslant+\infty$. 如果

$$\lim_{k,m\to+\infty}\|f_k-f_m\|_p=0,$$

则称 $\{f_m\}_{m=1}^{+\infty}$ 为 $L^p(\mathbb{E})$ 中的 Cauchy 列.

注 使用定理 1.1.7 的证明方法可得, $L^p(\mathbb{E})$ 中的 Cauchy 列 $\{f_m\}_{m=1}^{+\infty}$ 也是依测度的 Cauchy 列, 即

$$\forall\varepsilon>0,\quad \lim_{k,m\to+\infty}|\{x\in\mathbb{E}\mid|f_k(x)-f_m(x)|>\varepsilon\}|=0.$$

容易验证, $L^p(\mathbb{E})$ 中收敛点列一定是 Cauchy 列. 反过来呢? 这就是 $L^p(\mathbb{E})$ 的完备性.

定理 1.1.9 $L^p(\mathbb{E})$ 中的 Cauchy 列一定是收敛点列, 即 $L^p(\mathbb{E})$ 是 Banach 空间.

证明 首先证明 $1 \leqslant p < +\infty$ 的情况. 设 $\{f_m\}_{m=1}^{+\infty}$ 是 $L^p(\mathbb{E})$ 中的 Cauchy 列, 那么由上面的注知, $\{f_m\}_{m=1}^{+\infty}$ 是依测度的 Cauchy 列, 从而 $\{f_m\}_{m=1}^{+\infty}$ 必有几乎处处收敛子列 ([1] 和 [2]). 设这个几乎处处收敛子列为 $\{f_{m_k}\}_{k=1}^{+\infty}$, 其极限为 f, 则对任何自然数 m,

$$\lim_{k\to\infty} |f_{m_k}(x) - f_m(x)| = |f(x) - f_m(x)|, \quad \text{a. e. } x \in \mathbb{E}.$$

注意到 $\{f_m\}_{m=1}^{+\infty}$ 是 $L^p(\mathbb{E})$ 中的 Cauchy 列, 所以对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $j, m \geqslant N$ 时, $\|f_j - f_m\|_p < \varepsilon$. 这样, 取 $j = m_k$, 那么由 Fatou 引理知

$$\int_{\mathbb{E}} |f_m(x) - f(x)|^p dx \leqslant \varliminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{E}} |f_m(x) - f_{m_k}(x)|^p dx \leqslant \varepsilon^p.$$

这表明 $f_m - f \in L^p(\mathbb{E})$. 但 $L^p(\mathbb{E})$ 是线性空间, 所以 $f = (f - f_m) + f_m \in L^p(\mathbb{E})$ 且当 $m \geqslant N$ 时, $\|f - f_m\|_p \leqslant \varepsilon$. 因此 $\{f_m\}_{m=1}^{+\infty}$ 以 $L^p(\mathbb{E})$ 范数收敛到 f.

其次证明 $p = +\infty$ 的情况. 设 $\{f_m\}_{m=1}^{+\infty}$ 是 $L^\infty(\mathbb{E})$ 中的 Cauchy 列, 那么对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $N \in \mathbb{N}$, 当 $j, m \geqslant N$ 时, $\|f_j - f_m\|_\infty < \varepsilon$. 注意到 $\forall f \in L^\infty(\mathbb{E})$, 存在 $\mathbb{E}_0 \subset \mathbb{E}$, $|\mathbb{E}_0| = 0$ 使得 $\|f\|_\infty = \sup\limits_{\mathbb{E}\setminus\mathbb{E}_0} |f(x)|$ ([24]), 所以对 $j, m \in \mathbb{N}$, 存在零测度集 $\mathbb{E}_j, \mathbb{E}_{j,m}$ 使得

$$\|f_j\|_\infty = \sup_{\mathbb{E}\setminus\mathbb{E}_j} |f_j(x)|, \quad \|f_j - f_m\|_\infty = \sup_{\mathbb{E}\setminus\mathbb{E}_{j,m}} |f_j(x) - f_m(x)|.$$

令

$$\mathbb{E}_0 = \left(\bigcup_{j,m=1}^{\infty} \mathbb{E}_{j,m}\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}_j\right),$$

则 $|\mathbb{E}_0| = 0$ 且

$$\|f_j - f_m\|_\infty = \sup_{\mathbb{E}\setminus\mathbb{E}_{j,m}} |f_j(x) - f_m(x)| \geqslant \sup_{\mathbb{E}\setminus\mathbb{E}_0} |f_j(x) - f_m(x)| \geqslant \|f_j - f_m\|_\infty,$$

从而当 $j, m \geqslant N$ 时,

$$\|f_j - f_m\|_\infty = \sup_{\mathbb{E}\setminus\mathbb{E}_0} |f_j(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$