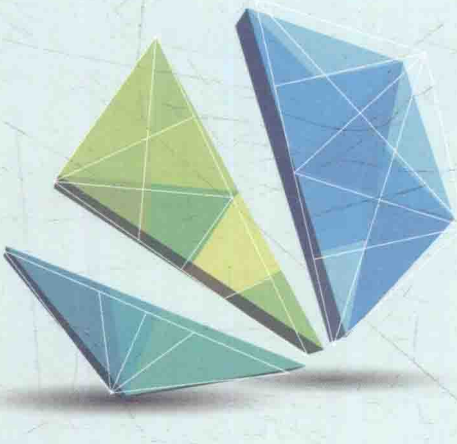
高等院校工商管理类创新课程体系教材

运筹学

Operations Research

宋荣兴　荆湘霞　李扶民　主编



东北财经大学出版社
Dongbei University of Finance & Economics Press

高等院校工商管理类创新课程体系教材

运筹学

Operations Research

宋荣兴　荆湘霞　李扶民　主编

东北财经大学出版社
Dongbei University of Finance & Economics Press
大连

图书在版编目（CIP）数据

运筹学 / 宋荣兴，荆湘霞，李扶民主编．—大连：东北财经大学出版社，2018.3

（高等院校工商管理类创新课程体系教材）

ISBN 978-7-5654-3031-2

Ⅰ．运…　Ⅱ．①宋…②荆…③李…　Ⅲ．运筹学-高等学校-教材　Ⅳ．O22

中国版本图书馆CIP数据核字（2017）第322165号

东北财经大学出版社出版

（大连市黑石礁尖山街217号　邮政编码　116025）

网　　址：http://www.dufep.cn

读者信箱：dufep@dufe.edu.cn

大连雪莲彩印有限公司印刷　　东北财经大学出版社发行

幅面尺寸：185mm×260mm　字数：393千字　印张：17　插页：1

2018年3月第1版　　2018年3月第1次印刷

责任编辑：王　莹　韩敌非　　责任校对：龚　彬

封面设计：张智波　　版式设计：钟福建

定价：40.00元

教学支持　售后服务　联系电话：（0411）84710309

“高等院校工商管理类创新课程体系教材”

前 言

运筹学是20世纪40年代后期发展起来的采用定量化方法研究各种系统的效能优化的一门学科，其目的是为管理决策提供科学依据。运筹学着眼于整个系统，以系统整体最优化为目标来解决系统内各部门之间的利害冲突。它的一般工作步骤是：提出问题；分析问题，建立模型；求解模型；方案检验与实施。鉴于其所蕴含的系统化思想及科学工作方法，运筹学在生产计划、市场销售、财务分析、库存管理等活动中得到广泛应用，也成为经济管理类专业普遍开设的一门专业基础课。

本书是为满足经济管理类专业本科教学需要而编写的，同时也可作为经济管理类硕士研究生、管理人员及相关人员的参考书。本书在编写过程中从以下方面进行了考虑：(1) 注重理论与方法的有机结合。本书较为全面系统地介绍了运筹学学科体系的基本原理和方法，考虑到学生的数学基础不同，本书在说明各类算法的基本思想时，力图通过几何图形和其他直观手段完成，尽量避免较难理解的数学证明。(2) 注重对学生应用能力的培养。本书主要满足经济管理类专业学生的需要，在例题的选取上，尽量选择学生熟悉的经济管理的实际问题，通过实例潜移默化地引导学生去发现问题、分析问题、解决问题。(3) 注重计算机软件的运用。每章都有一节专门介绍WinQSB软件，帮助学生掌握计算机软件，进而提高分析问题和解决问题的能力。此外，本书在编写过程中参阅了大量国内外同类教科书，对本书体系进行优化，在此一并表示感谢。

本教材各章编写分工：各章软件应用由宋荣兴编写，第1、3章由孙海涛编写，第2章由李培培编写，第4、9章由李扶民编写，第5、6章由荆湘霞编写，第7、10章由宋荣兴、吕秀艳编写，第8章由吕秀艳编写。本书编写完成后，由李永江主审，李永江对本书提出了许多中肯的意见和建议，在此表示衷心的感谢。

虽经努力，但因作者水平所限，书中疏漏及错误在所难免，恳请各位专家及读者批评指正。

编者

2018年1月

目　录

第1章/ 线性规划

线性规划（Linear Programming）是运筹学中研究较早且比较成熟的一个重要分支，它主要研究在线性等式（或不等式）的限制下，使得某一线性目标函数取得最大值（或最小值）的问题。早在1939年，苏联数学家康托洛维奇（Л.В.Канторович）就提出了生产组织和管理中的线性规划模型。1947年美国学者丹捷格（G.B.Dantzig）提出了求解一般线性规划的单纯形方法。单纯形法的出现使得线性规划在理论上趋于成熟，应用日益广泛和深入，特别是能用于处理成千上万个约束条件和变量的计算机软件的出现，使得线性规划在工业、农业、商业、交通运输、军事、经济计划与管理、决策等领域中都得到了重要的应用。

1.1 线性规划问题及其数学模型

1.1.1 线性规划问题的提出

人类进行生产经营活动中，经常会碰到这样的问题，即在资源（如资金、原材料、设备、人工等）有限的条件下，如何统筹安排、合理规划，以最少的资源完成确定的任务或目标。这样的问题属于资源的最优利用问题，也是线性规划所要研究的问题。

【例1-1】利民公司计划用三种资源生产甲、乙两种产品，已知生产单位产品的资源消耗、单位产品的利润等数据见表1-1。

表1-1 利民公司产品生产消耗资源及利润

资源 \ 消耗 \ 产品	甲	乙	现有资源
材料A（千克）	5	2	56
材料B（千克）	1	4	45
设备（台时）	1	1	16
利润（元/件）	90	70	

假定市场需求无限制，公司决策者应如何安排生产计划，使公司利润最大？

解：这是一个线性规划问题，该问题可用一定的数学语言来描述，即可以用一定的数学模型表示。设x_1、x_2分别表示甲、乙两种产品的生产数量（件），称为决策变量，且

x_1、$x_2 \geq 0$；z表示公司的总利润。由题意，问题可以转换为求变量x_1、x_2的值，使得总利润最大，即

$$\max z = 90x_1 + 70x_2$$

此时称$z = 90x_1 + 70x_2$为目标函数。

由目标函数可知，两种产品生产的数量越多，公司获得的利润就越多，但公司两种产品的生产量要受到现有材料和设备的限制，这就是两种产品生产量的资源约束，称为约束条件。

就材料A而言，生产两种产品实际消耗的总量，不能超过现有资源量，这种关系可以用数学语言表述为：$5x_1 + 2x_2 \leq 56$。

对材料B来讲，生产两种产品实际消耗的总量，也不能超过现有资源量，即：$x_1 + 4x_2 \leq 45$。

对设备来讲，生产两种产品实际消耗的设备总台时，不能超过现有的设备总台时，即：$x_1 + x_2 \leq 16$。

综合考虑公司的目标函数及资源约束，该问题的数学模型可归纳为：

$$\max z = 90x_1 + 70x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leq 56 \\ x_1 + 4x_2 \leq 45 \\ x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

【例1-2】设某种动物每天需要摄入的蛋白质、矿物质、维生素的最低量及A、B、C、D、E五种饲料每千克营养成分的含量及单位价格见表1-2。

表1-2　**五种饲料营养成分含量及单位价格**

类别	A	B	C	D	E	每天最低摄入量（克）
蛋白质（克）	3	2	1	6	18	700
矿物质（克）	1	0.5	0.2	2	0.5	30
维生素（克）	0.5	1	0.2	2	0.8	100
价格（元/千克）	2	7	4	3	8	

试建立该问题的数学模型，要求既满足该种动物每天营养成分的需要量，又使总的费用最省。

解：该问题可看作一个五种饲料的混合搭配问题，并且要求总的费用最省。设x_j为第j种饲料的每天使用量，根据题意得该问题的线性规划模型为：

$$\min z = 2x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 8x_5$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 + 18x_5 \geq 700 \\ x_1 + 0.5x_2 + 0.2x_3 + 2x_4 + 0.5x_5 \geq 30 \\ 0.5x_1 + x_2 + 0.2x_3 + 2x_4 + 0.8x_5 \geq 100 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

1.1.2　线性规划问题数学模型的一般形式

由上述两个例子可以看出，线性规划问题的数学模型由三个要素组成：

（1）变量，或称决策变量，是问题中所要解决的未知量，表明规划中用数量表示的方

案、措施，可由决策者决定和控制。

(2) 目标函数，是决策变量的函数。按问题的目标不同分别在这个函数前加上 max 或 min。

(3) 约束条件，由一组含决策变量的等式或不等式组成，表明决策变量取值时所受到的各种资源条件的限制。

假定线性规划问题中含有 n 个决策变量 $x_j(j=1,\cdots,n)$，在目标函数中 x_j 的系数为 c_j（c_j 通常称为价值系数）；有 m 种资源的限制，每种资源数量用 $b_i(i=1,\ldots,m)$ 表示；用 a_{ij} 表示变量 x_j 取值为1个单位时所消耗或含有的第 i 种资源的数量，通常称 a_{ij} 为技术系数或消耗系数。则该线性规划问题的数学模型可表示为：

目标函数　　$\max(\text{或}\min)\ z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$

$$\text{约束条件}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\leqslant(\text{或}\ =,\geqslant)\ b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\leqslant(\text{或}\ =,\geqslant)\ b_2\\\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\leqslant(\text{或}\ =,\geqslant)\ b_m\\x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant0\end{cases}$$

简写为：

$$\max(\text{或}\min)\ z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\leqslant(\text{或}\ =,\geqslant)\ b_i & (i=1,\cdots,m)\\x_j\geqslant0 & (j=1,\cdots,n)\end{cases}$$

用向量形式进行表达时，模型可写为：

$$\max(\text{或}\min)\ z=CX$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}P_jx_j\leqslant(\text{或}\ =,\geqslant)\ b\\x_j\geqslant0\end{cases}$$

其中：$C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$；$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$；$P_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{bmatrix}$；　$b=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}$

用矩阵形式来表示可写为：

$$\max(\text{或}\min)\ z=CX$$

$$\begin{cases}AX\leqslant(\text{或}\ =,\geqslant)\ b\\X\geqslant0\end{cases}$$

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}$$

其中 A 称为约束方程组（约束条件）的系数矩阵。

变量 x_j 的取值一般为非负，即 $x_j\geqslant0$；从数学意义上可以有 $x_j\leqslant0$。如果变量 x_j 表示第 j 种产品本期内产量相对于前期产量的增加值，则 x_j 的取值范围为（$-\infty$，$+\infty$），称 x_j 取值不受约束，或 x_j 无约束。

1.1.3 线性规划问题的标准型

由于目标函数和约束条件内容和形式上的差别，线性规划问题可以有多种表达式。为了便于讨论和制定统一的算法，规定线性规划问题的标准型如下：

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i & (i = 1, \cdots, m) \\ x_j \geqslant 0 & (j = 1, \cdots n) \end{cases}$$

标准型的线性规划模型中，本教材规定：目标函数为求最大值，约束条件全为等式，约束条件右端常数项 b_i 全为非负值，变量 x_j 的取值全为非负值。对不符合标准型（或称非标准型）的线性规划问题，可分别通过下列方法化为标准型。

（1）目标函数为求最小值，即：

$$\min z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

因为求 $\min z$ 等价于求 $\max(-z)$。令 $z' = -z$，即：

$$\max z' = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

（2）约束条件的右端项 $b_i < 0$ 时，只需将等式或不等式两端同乘"−1"，则等式右端项必然大于0。

（3）约束条件为不等式，这里有两种情况：

①约束条件为"≤"不等式，则在不等式的左端加入一个非负的松弛变量。

如 $5x_1 + 2x_2 \leqslant 56$，在不等式的左端加入一个非负的松弛变量 x_3 后，不等式化为等式，即 $5x_1 + 2x_2 + x_3 = 56$，显然 $x_3 \geqslant 0$。

②约束条件为"≥"不等式，则在不等式的左端减去一个非负的剩余变量。

如 $x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 2$，在不等式的左端减去一个非负的剩余变量 x_6 后，不等式化为等式，即 $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2$，$x_4 \geqslant 0$。

松弛变量和剩余变量在实际问题中分别表示未被充分利用和超出的资源量，二者均未转化为价值和利润，所以引进模型后它们在目标函数中的系数均为0。

（4）取值无约束的变量。如果变量 x 代表某产品当年销售收入与销售成本之差，显然 x 的取值可能为正也可能为负，这时可令 $x = x' - x''$，其中 $x' \geqslant 0$，$x'' \geqslant 0$，将其代入线性规划模型即可。

（5）对 $x \leqslant 0$ 的情况，令 $x' = -x$，显然 $x' \geqslant 0$。

综上所述，线性规划问题的标准型具有如下特点：

（1）目标函数求最大值；

（2）所有的决策变量均要求非负；

（3）所有的约束条件均是等式；

（4）常数项为非负。

【例1-3】将下述线性规划化为标准型。

$$\min z = -x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 \geqslant 2 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = -5 \\ x_1, x_2 \geqslant 0, x_3\text{取值无约束} \end{cases}$$

解：（1）本例中目标函数为求最小值，需化为求最大值，令 $z' = -z$，得到 $\max z' = -z$；

（2）因为 x_3 取值无约束，即该决策变量无符号限制，按标准型的要求，令 $x_3 = x_3' - x_3''$，$x_3' \geqslant 0$，$x_3'' \geqslant 0$；

（3）第一个约束条件是“≤”，在该不等式的左端加入一个松弛变量 x_4（$x_4 \geqslant 0$），该变量在目标函数中的系数为“0”；

（4）第二个约束条件是“≥”，在该不等式的左端减去一个剩余变量 x_5（$x_5 \geqslant 0$），该变量在目标函数中的系数为“0”；

（5）第三个约束条件右端项是负数，将该等式两端同乘“-1”。

根据标准型的转换规则，综合考虑上述五项，得到该问题的标准型为：

$$\max z' = x_1 - 2x_2 + 3x_3' - 3x_3'' + 0x_4 + 0x_5$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3' - x_3'' + x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_3' - x_3'' - x_5 = 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3' - 2x_3'' = 5 \\ x_1, x_2, x_3', x_3'', x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

1.2　线性规划图解法

线性规划问题常用的求解方法有两种，即图解法和单纯形法，本节只介绍图解法。图解法是通过在平面直角坐标系中做图来求解线性规划问题的一种方法。这种方法简单直观，适合于求解只有两个决策变量的线性规划问题。

图解法求解的目的，一是直观地判断线性规划问题解的可能结果，二是在存在最优解的前提下，利用图示求出问题的最优解。

1.2.1　图解法的步骤

对于线性规划问题，图解法的求解步骤可概括为：

（1）建立平面直角坐标系；

（2）利用约束条件，确定线性规划问题解的可行域；

（3）绘制目标函数的等值线和法线；

（4）将目标函数的等值线移动至可行域的边缘，寻求问题最优解。若该问题存在最优解，则在可行域的边缘得到问题的最优解。

就一般情况而言，将目标函数等值线置于可行域中，求最大值时目标函数等值线沿法线方向移动，求最小值时目标函数等值线沿法线的反方向移动。

1.2.2　图解法举例

【例1-4】用图解法求解下列线性规划问题：

$$\max z = 90x_1 + 70x_2$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \leqslant 56 & \text{(a)} \\ x_1 + 4x_2 \leqslant 45 & \text{(b)} \\ x_1 + x_2 \leqslant 16 & \text{(c)} \\ x_1, x_2 \geqslant 0 & \text{(d)} \end{cases}$$

（1）建立平面直角坐标系。以 x_1 作横轴，以 x_2 作纵轴，如图 1-1 所示。

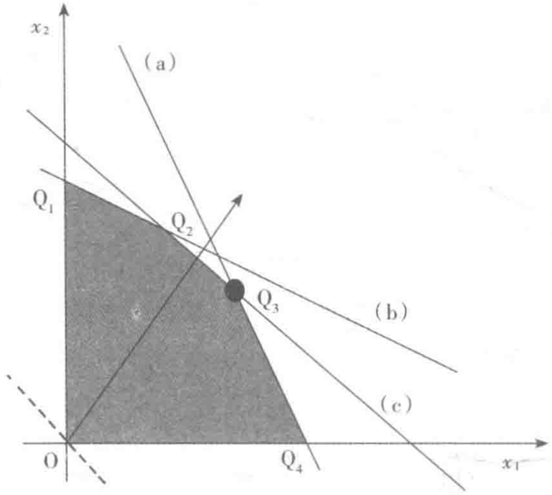


图 1-1　例 1-4 图解

（2）利用约束条件，确定线性规划问题解的可行域。在图 1-1 上，分别根据（a）、（b）、（c）三个约束条件作三条直线，再考虑约束条件（d）在第一象限，共同确定问题解的可行域为 $OQ_1Q_2Q_3Q_4$。

（3）绘制目标函数的等值线和法线。由于该问题是一个求最大值的线性规划问题，目标函数为 $z = 90x_1 + 70x_2$，其斜率为 $-9/7$，过原点作一条斜率为 $-9/7$ 的直线，即为目标函数的等值线；再由原点作一条垂直于目标函数等值线的矢量线，即法线。

（4）移动目标函数等值线至可行域的边缘，以寻求问题最优解。因问题为求目标函数最大值，需沿法线方向移动目标函数等值线，当目标函数等值线移动至 Q_3 点时，问题得到最优解。则该问题的最优解为 $(x_1^*, x_2^*) = (8, 8)$，将其代入目标函数，得目标函数的最优值为 $z^*=1\,280$。即该公司每天生产甲产品 8 件，生产乙产品 8 件，利润达到最大。

1.2.3　线性规划问题解的可能结果

（1）唯一最优解。由图 1-1 可以看出，该问题的最优解是唯一的，最优解在 Q_3 点上。

（2）无穷多最优解。如果利民公司生产单位甲产品的利润不是 90 元，而是 70 元，则例 1-4 中的目标函数改变为 $\max z = 70x_1 + 70x_2$，此时目标函数的等值线恰好与约束条件（c）平行。当目标函数等值线沿法线方向移动到可行域边缘时，与可行域相交不是在一个点上，而是与 Q_2Q_3 线段相重叠，如图 1-2 所示。这时点 Q_2、Q_3 及 Q_2Q_3 之间的所有点都能使目标函数 z 达到最大值，即有无穷多最优解，或多重最优解。

产生无穷多最优解的原因是在所建立的数学模型中，目标函数与一个或多个约束条件平行，即它们的斜率相等。

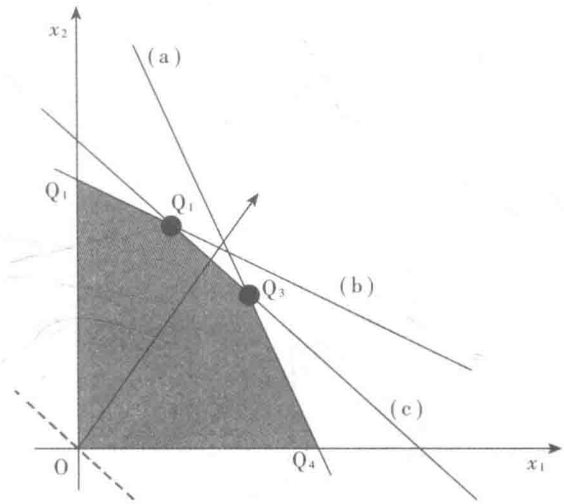


图1-2　无穷多最优解例图

（3）无界解。无界解指线性规划问题的可行域无界，即随着变量取值的增大（或减少），目标函数值也相应地增大（或减少），且趋于无穷，如图1-3所示。例如下述线性规划问题：

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geqslant 6 \\ x_1 + x_2 \geqslant 5 \\ x_1 + 3x_2 \geqslant 6 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

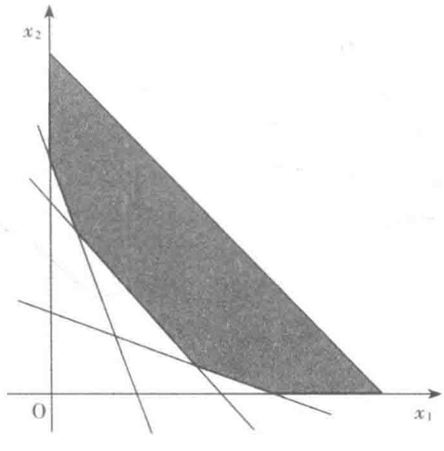


图1-3　无界解例图

图1-3中，可行域在第一象限内伸展到无穷，即变量x_1、x_2的取值可以无限增大，不受限制，由此目标函数值也可增大至无穷，则该问题的最优解无界。

无界解的产生是因为在建立线性规划问题的数学模型时遗漏了某些必要的约束条件。

（4）无解，或无可行解。用图解法求解时找不到满足所有约束的可行域，说明该问题

无解，如图1-4所示。例如下述线性规划模型：

$$\max z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 2 \\ x_1 + 2x_2 \geqslant 6 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

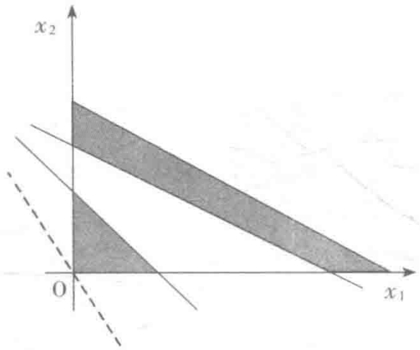


图1-4　无解例图

由图1-4可以看出，该问题的约束条件没有形成可行域，该问题无解。无解的原因是线性规划问题模型的约束条件之间存在矛盾，建模存在错误。

1.3　线性规划问题解的性质

1.3.1　线性规划问题解的概念

设线性规划问题的数学模型为：

$$\max z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\begin{cases} AX = b & (1.1) \\ X \geqslant 0 & (1.2) \end{cases}$$

式中A为$m \times n$阶矩阵，$m \leqslant n$并且矩阵A的秩$r(A) = m$。

则对于线性规划问题的标准型，有以下解的概念：

基：若B是矩阵A的$m \times m$阶非奇异子矩阵（$|B| \neq 0$），则称B是线性规划问题的一个基。即矩阵B是由m个线性无关的列向量组成，假设B可以表述为：

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{bmatrix} = (P_1, P_2, \cdots, P_m)$$

基向量：矩阵B中的各个向量$P_i(i = 1, 2, \cdots, m)$，称为基向量。

非基向量：矩阵A中其余的向量$P_j(j = m+1, m+2, \cdots, n)$，称为非基向量。

基变量：与基向量P_i对应的决策变量$x_i(x_1, x_2, \cdots, x_m)$，称为基变量。

非基变量：与非基向量P_j对应的决策变量$x_j(x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots, x_n)$，称为非基变量。

可行解：满足约束条件（1.1）式、（1.2）式的解$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$，称为线性规划问题的可行解。全部可行解的集合称为可行域。

最优解：使目标函数达到最大值的可行解称为最优解。

基解：对于某个特定的基B，非基变量均取0时的解，称为基解。

约束条件（1.1）可以改写为：

$$\sum_{i=1}^{m} P_i x_i = b_i - \sum_{j=m+1}^{n} P_j x_j$$

若不考虑线性规划问题的非负约束，令非基变量$x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = x_n = 0$，并用高斯消元法求出的解，即为基解。

基可行解：满足非负条件（1.2）式的基解，称为基可行解。

可行基：与基可行解相对应的基，称为可行基。

以上提到的几种解的概念，它们之间的关系可用图1-5进行表述。

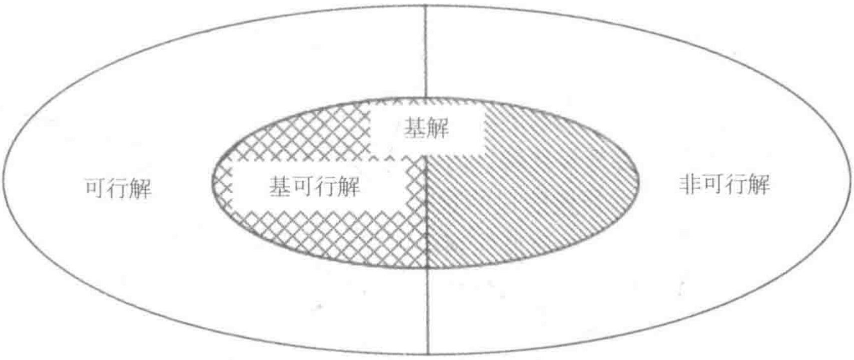


图1-5　解的关系图

1.3.2　线性规划的基本定理

定义1.1　设K是n维欧氏空间的一个点集，若对于K中的任意两点$X_1 \in K$和$X_2 \in K$，均有$X = \alpha X_1 + (1-\alpha) X_2 \in K, (0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$，则称$K$为凸集。

凸集的几何意义：集合K中任意两点连线上的所有点均在K中。从直观上讲，凸集上没有凹入部分，其内部没有空洞。如图1-6中（a）和（b）是凸集，（c）和（d）则不是凸集。

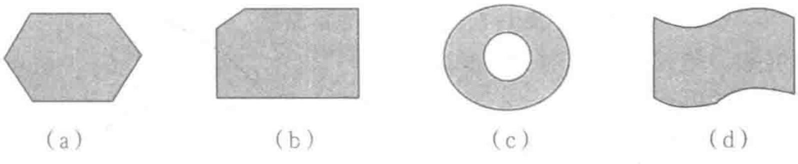


图1-6　凸集与非凸集

定义1.2　设K为凸集，$X \in K$，若X不能用K中任意两点$X_1 \in K$和$X_2 \in K\left(X_1 \neq X_2\right)$的线性组合表示为$X = \alpha X_1 + (1-\alpha) X_2 (0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$，则称$X$为凸集$K$的一个顶点（或称为极点）。

定义说明，凸集中的顶点不是凸集中任意两点所连直线内的点。

定理1.1　若线性规划问题存在可行域，则其可行域$R = \left\{X \mid AX = b, X \geqslant 0\right\}$是凸集。

定理1.2　线性规划问题的基可行解X对应于可行域R的顶点。