

TURING 图灵新知

[日]小平邦彦

著

李慧慧

译

Kunihiko Kodaira

几何世界 的邀请

幾何への誘い

小平
邦彦



中国工信出版集团



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

Kunihiko Kodaira



几何世界的邀请

〔日〕小平邦彦
李慧慧 译 著

人民邮电出版社
北京

图书在版编目 (CIP) 数据

几何世界的邀请 / (日) 小平邦彦著 ; 李慧慧译

— 北京 : 人民邮电出版社, 2017. 12

(图灵新知)

ISBN 978-7-115-46908-3

I. ①几… II. ①小… ②李… III. ①几何—普及读物 IV. ①O18-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第231984号

内 容 提 要

平面几何是观察判断与逻辑思考的最佳结合,是初等数学教育中培育创造力的最好教材。本书为日本著名数学家、菲尔兹奖得主小平邦彦先生的几何入门作品,书中以欧几里得几何、希尔伯特几何、复数几何为轴线,由浅入深,层层深入,从作为图形科学的几何、作为数学的几何等不同角度介绍完整的几何世界,是几何入门、训练思维与创造力的佳作。

-
- ◆ 著 [日] 小平邦彦
译 李慧慧
责任编辑 武晓宇
装帧设计 broussaille 私制
责任印制 彭志环
- ◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市丰台区成寿寺路11号
邮编 100164 电子邮件 315@ptpress.com.cn
网址 <http://www.ptpress.com.cn>
北京隆昌伟业印刷有限公司印刷
- ◆ 开本: 880×1230 1/32
印张: 6.625
字数: 121千字 2017年12月第1版
印数: 1-4000册 2017年12月北京第1次印刷
- 著作权合同登记号 图字: 01-2017-4046号
-

定价: 42.00元

读者服务热线: (010)51095186转600 印装质量热线: (010)81055316

反盗版热线: (010)81055315

广告经营许可证: 京东工商广登字20170147号

站在巨人的肩上
Standing on Shoulders of Giants



iTuring.cn

版权声明

KIKA ENO IZANAI

by Kunihiko Kodaira

© 1991, 2000 by Mutsuo Oka

Originally published 2000 by Iwanami Shoten, Publishers,
Tokyo.

This simplified Chinese edition published 2017

by Posts and Telecom Press, Beijing

by arrangement with the proprietor c/o Iwanami Shoten,
Publishers, Tokyo.

本书中文简体字版由日本岩波书店授权人民邮电出版社独家出版。未经出版者书面许可，不得以任何方式复制或抄袭本书内容。版权所有，侵权必究。

发明心理学与平面几何

曾经在某本书上读到过一个故事，大概就是说爱因斯坦在思考问题时不使用语言进行思考。前些天，我突然很想确认这个故事的真实性，所以重新找出那本书来看，发现参考文献引用的是阿达马（Jacques Hadamard）的《数学领域的发明心理学》。于是立刻借了阿达马的这本书回来阅读，发现附录中收录有爱因斯坦写给阿达马的信。信的内容很长，主要内容如下：“我认为语言在思考结构中没有发挥任何作用。在思考中发挥作用的要素，是某种自我生成、结合的形象。这种形象的结合游戏——早于由语言和符号构成的逻辑性结构的结合游戏——是创造性思考的本质特征。”

庞加莱在旅行中正准备登上马车时，刹那间发现了有关富克斯函数的重要内容。他在心理学协会发表演讲时，曾经将这一瞬间的发现解释为“长时间的先行研究在潜意识中发挥作用的表现”。阿达马在《数学领域的发明心理学》中围绕庞加莱的演讲内容，对发明心理学展开研究，最后得出了结论：“潜意识”是影响发现的主要因素。也许“潜意识”听起来多少带有些神秘色彩，不过阿达马认为，我们的人脸识别功能也是“潜意识”的产物。

何谓“潜意识”？根据脑生理学研究表示，人的左脑和右脑具有

不同的功能，左脑是分析性的，而右脑是综合性的（J. C. Eccles, *The Understanding of the Brain*, McGraw-Hill, 1973）。左脑负责语言、逻辑、计算等，右脑负责音乐、模式认知、几何等，而且令人惊讶的是，与自我意识相关的内容由左脑控制，不相关的则由右脑控制。

那么，阿达马所说的“潜意识”属于右脑的功能，现在看来也符合逻辑。而且，阿达马认为人脸识别是“潜意识”的产物，这与模式识别属于右脑的功能基本相符。

当然，我们对上述脑生理学的解释是否正确多少还心存怀疑，不过如果这个解释正确，那么以前我们在初中阶段学过的欧几里得平面几何应该是最适合初等教育的教材。平面几何需要看图形并对其进行验证。看图形属于右脑的功能，验证属于左脑的功能，因此平面几何将左脑和右脑联系起来，起到同时训练左右脑的作用。特别是画辅助线需要观察图形整体后作出综合判断，因此这也是训练右脑的最好方法。正如阿达马所说，如果发现“潜意识”即是右脑的功能，那么平面几何就是帮助培养创造力的最好教材。

近年来，日本的初等数学教育删除了欧几里得平面几何知识，看来因此而失去的东西远远超出了我们的认知。

小平邦彦

（摘自《惰者集：数感与数学》，小平邦彦 著）

前言

本书是我对岩波市民讲座上的平面几何讲义修订增补而成。全书由四部分构成。

序章通过引用挂谷宗一老师的教科书和秋山武太郎老师的参考书《理解几何学》的开篇内容，初步讲解了平面几何是一门研究可见图形现象（使用尺子和圆规在纸上画图形）的自然科学，即为图形科学。

第一章为本书的主要部分，围绕作为图形科学的平面几何的严密体系展开。章节末尾处的费尔巴哈定理是在创作本书时添加的内容，之前的讲义中没有此部分。

第二章引用希尔伯特的《几何学基础》的开篇内容，从现代数学的角度来思考严密的平面几何究竟是什么，并探讨作为数学的平面几何与作为图形科学的平面几何有何不同，以及考察了平面几何作为图形科学的严密性如何表现。如果用作数学初等教育（高中毕业之前的教育）的教材，作为图形科学的平面几何其严密性就足够了，超过学生学习程度的严密平面几何，反而会让学难以理解透彻。因此，我认为作为图形科学的严密平面几何是数学初等教育最合适的教材。在这一章中，有一部分内容可能难以理解，如果觉得

困难，可以跳过去继续往下读。

第三章是复数在平面几何中的应用。根据复数极其初步的应用，证明了平面几何中的一些定理。章节末尾处费尔巴哈定理的证明是原本讲义中没有的内容。

1991年7月

小平邦彦

目录

序 章	001
第一章 作为图形科学的平面几何	019
第二章 数学中的平面几何	125
第三章 复数和平面几何	177

序 章

当我读初中的时候，日本旧制中学一年级学习的数学是算术，从二年级到四年级学习的是代数和平面几何，五年级学习的是立体几何。从年龄上对应，旧制中学五年级相当于现在的高中二年级。那时和现在不一样，没有微分、积分，也没有概率、统计。那时的代数会讲解二次方程的解法、开平方法、对数计算、因数分解等内容，既不无聊也不有趣。但是，平面几何却非常有意思，给我留下了很深的印象。我听说，就连很多文科生也认为代数无聊，平面几何有意思。

我把当时的一本平面几何教科书和一本参考书带到这里来了。教科书是挂谷宗一^①老师撰写的标准教科书^②，参考书是秋山武太郎^③老师的《理解几何学》^④。《理解几何学》自1920年出版上市以来，多次再版重印，是一本印刷达到100多版的名著，曾经一度绝版，幸运的是，此书在1959年修订再版，直到现在还在出版。通过这本教科书和参考书，我们也能窥得平面几何这门有趣的学问拥有何种“性格”。

① 挂谷宗一，1886—1947，日本著名数学家，“挂谷问题”的提出者。挂谷问题的内容为：“一位武士，在上厕所时遭到敌人袭击，矢石如雨，而他只有一根短棒，为了挡住敌人的射击，需要将短棒旋转一周（ 360° ）。但厕所很小，因此转动短棒时，应当使短棒扫过的面积尽可能小，则这个面积最小是多少？”——编者注

② 《平面几何学》（平面幾何学），大日本图书，1926年。

③ 秋山武太郎，1884—1949，日本数学家、教师，著有日本几何名作《理解几何学》。——编者注

④ 《理解几何学》（わかる幾何学），高冈书店，1920年。修订版，日新出版，1959年。

首先，我们引用掛谷老师的教科书中开篇数页的内容要点。^①

1. **几何学** 几何学是一门论述图形性质的学问。

2. **图形** 图形的基本内容有四个方面。

(1) **体** 所有的物体都占据空间的一部分。现在我们抛开物体在物理上的性质，当我们只考虑物体占据空间一部分的形状、大小以及位置时，我们称之为体。

(2) **面** 体的边界叫作面。面有长宽，没有厚度。

(3) **线** 面的边界叫作线。线有长度，没有宽度。

(4) **点** 线的边界叫作点。点有位置，没有大小。

体、面、线、点或四者的集合叫作图形。

明确词语意思的陈述(命题)叫作定义。上述带有下划线的陈述分别是体、面、线、点以及图形的定义。

我们把无需讲述理由且被认为是“真”的陈述称为公理。这是推理的基础性东西。

[公理] 图形可以在不改变其形状和大小的情况下改变其位置。

我们把这叫作**移动**^②图形。

当两个图形通过移动完全重合之时，我们称这两个图形全等。

① 以下阴影部分均引自掛谷宗一所著的《平面几何学》，文中的图片的编号为原书中的编号。部分平面几何概念本书作者会在第一章中重新定义。——编者注

② 此处的含义包括平移、旋转。——编者注

3. 直线 直线是线中最简单的图形。

[定义] 直线即为笔直的线。

它像绷紧的线，我们大概可以想象到直线的形状吧。

只说直线的话，它的两端可以无限延长。如果两端为有限的话，我们称之为线段。

[公理] 经过两点有且只有一条直线。

我们用米(m)、厘米(cm)、尺、寸等单位来测量线段的长度，我们已经学习过用数值来表示长度。

我们把连接两点线段的长度称作两点的距离。

4. 平面 平面是面中最简单的图形。

[定义] 平面即为平坦的面。

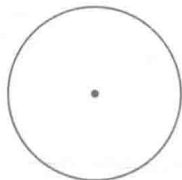
它像静止的水面，我们大概可以想象到平面的形状吧。

[公理] 如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上的所有点都在这个平面内。

5. 圆

[定义] 圆即一个定点到某个边界上任何一点的距离都相等的平面部分。定点称为圆心，边界线称为圆周。

我们把圆周简称为圆。



6. 平面图形 存在于平面上的图形叫作平面图形。

平面几何学是探讨平面图形性质的一门学问。也就是说，接下来我们讨论的图形都是在同一个平面上的图形。

阅读引述内容，我们可以立刻注意到，掛谷老师著作中图形的定义是基于物体的物理性质讨论的。“抛开物体在物理上的性质，当我们只考虑物体占据空间一部分的形状、大小以及位置时，我们称之为体。体的边界叫作面。面的边界叫作线。线的边界叫作点。立体、面、线、点或四者的集合，我们称之为图形。”通过这些内容，我们能了解到，当时日本中学的几何还没有完全从自然科学中独立出来。有趣的是圆周的定义。在现代数学中，圆周的定义为从平面上的一点到一定距离的点的整体集合。以前却是把一个定点到某个边界上任何一点的距离都相等的平面部分称为圆，而这个边界叫作圆周。在这种定义中，完全没有出现“集合”这个词。

接下来，我们直接引用《理解几何学》的1~5页和12~13页的内容。^①

在通常意义上，几何(Geometry)是指平面几何学，是解释以下内容的一门学科，例如将6个正三角形拼合成1个正六边形；如何作出正五边形；计算三角形的面积时要用三角形的底乘以高除以2，等等。

那么，本书中(或者不依照本书)学习几何的必要工具，只要有纸和铅笔便可，但如果要认真学习的话，还是希望大家准

^① 以下阴影部分均引自秋山武太郎所著的《理解几何学》，文中的图片的编号为原书中的编号。部分平面几何概念本书作者会在第一章中重新定义。——编者注

备一把用于画直线的尺子和一个用于画圆的圆规。



图 1.1

用尺子画出的线是笔直的线，我们称之为直线。如果不使用尺子而直接用手画的话，无论如何努力画出的都是曲线（弯曲的线）。另外，用圆规画出的曲线，如果是一部分的话，我们称之为圆弧或者只称作弧；如果画一圈的话，我们称之为圆周或者简称为圆。此外，几何学中还有椭圆、抛物线、螺旋线等各种各样的线，但是，初级几何学只考虑直线和圆（或者弧）。因此使用的工具只有尺子和圆规，不需要使用椭圆圆规或者曲线板（一种弯曲复杂形状的尺子）。另外，有一点容易被忘记，那就是如果单说线的话，是包含直线和曲线两种情况的。

从这里开始，我们要经常使用定义这个词。定义即为解释词语意思的描述。例如，给直线下个定义的话，可以定义为“直接为非弯曲、笔直的线”，另外，给鸟随便下个定义的话，可以是“鸟为叽叽喳喳叫的漆黑的鸟”。接下来，我们列举几个词语的定义，现在不明白这些定义也没关系，或者，索性无视这些定义也没事儿。

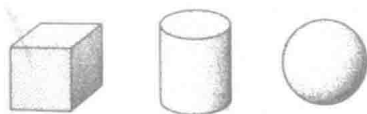
定义（线）线有位置和长度，没有宽度（线没有宽度，但

在纸上画时会有微小的宽度)。

定义(点) 点有位置, 没有大小(点比针尖、霉菌更小, 小到没有大小。但在纸上画时, 则会用即便是近视眼也可以看到的黑点来表示)。

定义(面) 面或者表面有位置和长宽, 没有厚度(使肥皂泡或者胶皮气球鼓起时, 可以形成一层非常薄的膜, 当膜更加变薄, 薄到完全没有厚度时称之为面。平坦的面称为平面, 弯曲的面称为曲面, 这一点之后再解释)。

定义(体) 体或者立体有位置和容积(铅笔、小刀、橡皮擦都是立体。图 1.2 为立方体、圆柱体和球体, 它们都是简单的立体)。



(a) 立方体 (b) 圆柱体 (c) 球体

图 1.2

立方体的形状为长度、宽度、高度都相等的箱子。圆柱体的形状为茶叶桶或者罐头容器。球体的形状为皮球。

这 3 个立方体外侧的面的数量, 其面连接处的线的数量, 以及线相交处的点的数量如下:

1. 立方体有 6 个面(6 个面都是正方形, 其中 3 个面没有在图中显示出来), 有 12 条线(每条线的长度都相等, 其中有 3 条线无法看到), 有 8 个点(其中 1 个点无法看见)。