世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

线性代数

学习辅导与习题解答

（理工类·第五版）

⊙ 吴赣昌　主编

中国人民大学出版社

21世纪数学教育信息化精品教材

大学数学立体化教材

线性代数

学习辅导与习题解答

（理工类·第五版）

⊙ 吴赣昌　主编

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

线性代数学习辅导与习题解答：理工类：第五版/吴赣昌主编. —北京：中国人民大学出版社，2018.4
21世纪数学教育信息化精品教材. 大学数学立体化教材
ISBN 978-7-300-25642-9

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①吴… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2018）第051882号

21世纪数学教育信息化精品教材
大学数学立体化教材
线性代数学习辅导与习题解答
（理工类·第五版）
吴赣昌 主编
Xianxing Daishu Xuexi Fudao yu Xiti Jieda

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街31号	邮政编码	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京七色印务有限公司		
规　　格	148 mm×210 mm　32开本	版　　次	2018年4月第1版
印　　张	15.375	印　　次	2018年4月第1次印刷
字　　数	579 000	定　　价	32.80元

前　言

人大版“21世纪数学教育信息化精品教材”（吴赣昌主编）是融纸质教材、教学软件与网络服务于一体的创新型“立体化教材”。教材自出版以来，历经多次升级改版，已形成了独特的立体化与信息化的建设体系，更加适应我国大众化教育在新时代的教育改革要求，受到全国广大师生的好评，迄今已被全国600余所高等院校广泛采用。

作者本次启动的“大学数学立体化教材”（第五版）的改版工作，旨在充分利用移动互联网、移动终端设备与相关信息技术软件，为教材用户提供更优质的学习内容、实验案例与交互环境。

作者本次关于“大学数学立体化教材”（第五版）的改版具体包括：面向普通本科院校的“理工类·第五版”、“经管类·第五版”与“纯文科类·第四版”；面向普通本科少学时或三本院校的“理工类·简明版·第五版”与“经管类·简明版·第五版”；面向专升本或高职本科的“综合类·应用型本科版”；面向高职高专院校的“理工类·高职高专版·第四版”、“经管类·高职高专版·第四版”与“综合类·高职高专版·第三版”。

本次改版的指导思想：为帮助教材用户更好地理解教材中重要的概念、定理、方法及其应用，设计了大量相应的数学实验，包括数值计算实验、函数计算实验、符号计算实验、2D函数图形实验、3D函数图形实验、矩阵运算实验、随机数生成实验、统计分布实验、线性回归实验、数学建模实验等。与教材正文所举示例相比，这些实验设计的复杂程度更高、数据规模更大、实用意义也更大。本系列教材于2017年改版修订的各个版本均包含了针对相应课程内容的数学实验。其中，大部分实验都在教材内容页面上提供了对应的二维码，用户通过微信扫码功能扫描指定的二维码即可进行相应的数学实验，而完整的数学实验内容则呈现在教材配套的网络学习空间中。

为方便同学们使用最新版“大学数学立体化教材”，学好大学数学，作者团队建设了与该系列教材同步配套的“学习辅导与习题解答”。该系列教辅书均根据教材章节顺序建设了相应的学习辅导内容，其中每一节的设计中包括了该节的主要知识归纳、典型例题分析与习题解答等内容，而每一章的设计中包括了

该章的教学基本要求、知识点网络图、题型分析与总习题解答。上述设计有助于学生在课后自主研读这些教辅书时，更好更快地掌握所学知识，从而在较短时间内取得好成绩。

在大学数学的学习过程中，要主动把握好从“学数学”到“做数学”的转变，不要以为你在课堂教学过程中听懂了就等于学到了。事实上，你需要在课后花更多时间主动去做相关训练，才能真正掌握所学知识。而在课后的自学与练习过程中，首先要认真、反复地阅读教材，真正掌握大学数学的基本概念；在做习题时，你应先尝试独立完成习题，尽量不看答案，做完习题后，再参考本书进行分析和比较，这样便于发现哪些知识自己还没有真正理解。

与传统的教材与教辅建设缺乏教学互动不同的是，我们有一支实力雄厚、专业专职的作者团队，通过数苑网（www.sciyard.com）为本系列教材的用户提供在线学习服务。另外，用户还可扫描下方二维码并关注“数苑”公众号，通过在线学习栏目获得相关在线服务。

吴赣昌

2018 年 2 月 26 日

目　　录

第 1 章　行 列 式

行列式实质上是由一些数值排列成的数表按一定的法则计算得到的一个数. 历史上，行列式的概念是在研究线性方程组的解的过程中产生的. 如今，它在数学的许多分支中都有非常广泛的应用，是一种常用的计算工具. 特别是在本门课程中，它是研究后面线性方程组、矩阵及向量组的线性相关性的一种重要工具.

本章教学基本要求：

1. 会求 n 元排列的逆序数.

2. 深入领会 n 阶行列式的定义.

3. 熟练掌握行列式的性质，并且会正确使用行列式的有关性质化简行列式，利用“三角化”计算行列式.

4. 理解行列式元素的子式、余子式和代数余子式的概念，灵活掌握行列式按行（列）展开法则（降阶法）.

5. 理解克莱姆法则，并会用克莱姆法则判定线性方程组解的存在性、唯一性及求出方程组的解.

§1.1　二阶与三阶行列式

一、主要知识归纳

主要知识归纳见表 1-1-1 和表 1-1-2.

表 1-1-1　　　二阶行列式

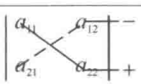
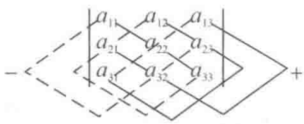
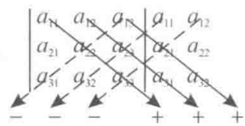
定义	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
规律	对角线法则：
应用	二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$ 记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$，则 $x_1 = \frac{D_1}{D}$，$x_2 = \frac{D_2}{D}$.

表 1-1-2　　三阶行列式

定义	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$.
规律	1. 对角线法则  2. 沙路法则 
应用	三元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$ 记 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$， $D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$， 则 $x_1 = \frac{D_1}{D}$，$x_2 = \frac{D_2}{D}$，$x_3 = \frac{D_3}{D}$.

二、典型例题分析

例 1　设 $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$，求 x 的值.

解　由

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = x^3 + 1 + 1 - x - x - x = x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) = 0.$$

解得 $x=1$ 或 $x=-2$.

小结：本题的关键是计算等式左边的三阶行列式，三阶行列式一般用对角线法则和沙路法则来计算，但对角线法则只适用于二阶和三阶行列式的计算.

例 2　解方程组

$$\begin{cases} bx + ay + 2ab = 0 \\ 2cy + 3bz - bc = 0 \\ cx + az = 0 \end{cases}.$$

解　因为

$$D=\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ 0 & 2c & 3b \\ c & 0 & a \end{vmatrix}$$
$$=b\times 2c\times a+a\times 3b\times c+0-0-0-0=5abc,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} -2ab & a & 0 \\ bc & 2c & 3b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$
$$=-2ab\times 2c\times a+0+0-0-a\times bc\times a-0=-5a^2bc,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} b & -2ab & 0 \\ 0 & bc & 3b \\ c & 0 & a \end{vmatrix}$$
$$=b\times bc\times a+(-2ab)\times 3b\times c+0-0-0-0=-5ab^2c,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} b & a & -2ab \\ 0 & 2c & bc \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$=0+a\times bc\times c+0-(-2ab)\times 2c\times c-0-0=5abc^2,$$

所以

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{-5a^2bc}{5abc}=-a,\ y=\frac{D_2}{D}=\frac{-5ab^2c}{5abc}=-b,\ z=\frac{D_3}{D}=\frac{5abc^2}{5abc}=c.$$

小结：本题求解三元线性方程组，但其关键在于计算相关的三阶行列式.

例 3　设 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & x+1 & 3x-2 \\ 1 & x+2 & 5x-4 \\ 1 & x+3 & 7x-6 \end{vmatrix}$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=0$.

证　由三阶行列式的定义知，$f(x)$ 是 x 的二次多项式，因而 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，又

$$f(0)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & -6 \end{vmatrix}=0,\ f(1)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

故由罗尔定理知，存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=0$.

小结：本题的证明利用了高等数学微分学中的罗尔中值定理，只不过这里的函数是用三阶行列式的形式来表示的一个多项式.

三、习题 1-1 解答

1. 计算下列二阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^2 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} \dfrac{1-t^2}{1+t^2} & \dfrac{2t}{1+t^2} \\ \dfrac{-2t}{1+t^2} & \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \end{vmatrix}$； (6) $\begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}$.

解 (1) 原式$=1\times4-3\times1=1$.

(2) 原式$=2\times2-1\times(-1)=5$.

(3) 原式$=a\cdot b^2-b\cdot a^2=ab(b-a)$.

(4) 原式$=(x-1)(x^2+x+1)-1\cdot x^2=x^3-x^2-1$.

(5) 原式$=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}-\dfrac{-2t}{1+t^2}\cdot\dfrac{2t}{1+t^2}=\dfrac{(1-t^2)^2+4t^2}{(1+t^2)^2}=\dfrac{1+2t^2+t^4}{(1+t^2)^2}=1$.

(6) 原式$=1\cdot1-\log_a b\cdot\log_b a=0$.

2. 计算下列三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$； (4) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$； (6) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$；

(7) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$； (8) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$.

解 (1) 原式$=1\times1\times1+3\times3\times3+2\times2\times2-2\times1\times3-3\times2\times1-1\times3\times2$
$=18$.

(2) 原式$=1\times1\times5+3\times9\times1+1\times4\times8-1\times1\times8-3\times1\times5-1\times9\times4$
$=5$.

(3) 原式$=1\times5\times1+0\times0\times0+(-1)\times3\times4-(-1)\times5\times0-3\times0\times1$
$-1\times4\times0=-7.$

(4) 原式$=2\times(-4)\times3+0\times(-1)\times(-1)+1\times1\times8$
$-0\times1\times3-2\times(-1)\times8-1\times(-4)\times(-1)$
$=-24+8+16-4=-4.$

(5) 原式$=0\times0\times0+0\times b\times d+0\times a\times c-0\times0\times0-b\times a\times0-0\times d\times c=0.$

(6) 原式$=acb+bac+cba-bbb-aaa-ccc$
$=3abc-a^3-b^3-c^3.$

(7) 原式$=bc^2+ca^2+ab^2-ac^2-ba^2-cb^2$
$=(a-b)(b-c)(c-a).$

(8) 原式$=x(x+y)y+yx(x+y)+(x+y)yx-y^3-(x+y)^3-x^3$
$=3xy(x+y)-y^3-3x^2y-3y^2x-x^3-y^3-x^3$
$=-2(x^3+y^3).$

3. 证明下列等式:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

证 $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1b_2c_3+c_1a_2b_3+b_1c_2a_3-c_1b_2a_3-a_1c_2b_3-b_1a_2c_3$$

$$=a_1(b_2c_3-c_2b_3)-b_1(a_2c_3-c_2a_3)+c_1(a_2b_3-b_2a_3)$$

$$=a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

4. 当 x 取何值时,$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}\neq0.$

解 $$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}=3\times x\times x+4\times x\times0+1\times0\times1-x\times x\times1-3\times0\times0-1\times4\times x$$

$$=3x^2-x^2-4x=2x^2-4x$$
$$=2x(x-2),$$

所以当 $x\neq0$ 且 $x\neq2$ 时,$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix}\neq0.$

§1.2　n阶行列式

一、主要知识归纳

主要知识归纳见表1-2-1和表1-2-2.

表1-2-1　　排列与逆序

定义	在一个n级排列$(i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n)$中，若数$i_t>i_s$，则称数$i_t$与$i_s$构成一个逆序. 一个$n$级排列中逆序数的总数称为该排列的逆序数，记为$N(i_1i_2\cdots i_n)$. 逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列.
计算方法	先计算出排列中每个元素逆序的个数，即计算出排列中每个元素前面比它大的数的个数之和，该排列中所有元素的逆序数之总和即为所求排列的逆序数.

表1-2-2　　n阶行列式

n阶行列式	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum(-1)^N a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，$= \sum(-1)^N a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$ $= \sum(-1)^N a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 它表示所有取自不同行不同列的n个元素乘积的代数和，其中N为行标组成的排列与列标组成的排列的逆序数之和.

二、典型例题分析

例1　设排列$x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$的逆序数是k，则排列$x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$的逆序数是多少?

解　因为任取一对数在$x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$和$x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$中必定会形成一个逆序和一个顺序，所以两个排列的逆序之和等于从n个数中取2个的排列数C_n^2，即

$$N(x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n)+N(x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1)=C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}.$$

则

$$N(x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1)=\frac{n(n-1)}{2}-N(x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n)=\frac{n(n-1)}{2}-k.$$

小结：本题的关键是利用了$x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$中的逆序和$x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$中的顺

序之间类似互补的性质，即任取一对数在 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 和 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 中必定会形成一个逆序和一个顺序.

例 2　设

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}b^{-1} & \cdots & a_{1n}b^{1-n} \\ a_{21}b & a_{22} & \cdots & a_{2n}b^{2-n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}b^{n-1} & a_{n2}b^{n-2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

证明：$D_1=D_2$.

证　由行列式的定义有

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum(-1)^N a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \\ D_2 &= \sum(-1)^N(a_{1j_1}b^{1-j_1})(a_{2j_2}b^{2-j_2})\cdots(a_{nj_n}b^{n-j_n}) \\ &= \sum(-1)^N a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}b^{(1+2+\cdots+n)-(j_1+j_2+\cdots+j_n)} \end{aligned}$$

其中，$N=N(j_1j_2\cdots j_n)$，又 $j_1+j_2+\cdots+j_n=1+2+\cdots+n$，则

$$D_2=\sum(-1)^N a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

故 $D_1=D_2$.

小结：本题证明的关键在于用定义计算出两个 n 阶行列式的值.

例 3　已知

$$f(x)=\begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & 0 \\ x & 3 & 2x & 11 & 4 \\ -1 & x & 0 & 4 & 3x \\ 2 & 21 & 4 & x & 5 \\ 1 & -7x & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix},$$

试求 $f(x)$ 中 x^4 的系数.

解　$f(x)$ 中含因子 x 的元素有

$$a_{11}=-x,\ a_{21}=x,\ a_{23}=2x,\ a_{32}=x,\ a_{35}=3x,\ a_{44}=x,\ a_{52}=-7x,$$

即含因子 x 的元素 a_{ij_i} 的列下标只能取

$$j_1=1;\ j_2=1,\ 3;\ j_3=2,\ 5;\ j_4=4;\ j_5=2,$$

则含 x^4 的项中元素 a_{ij_i} 的列下标只能取

$$j_1=1; j_2=3; j_3=2; j_4=4 \quad 和 \quad j_2=1; j_3=5; j_4=4; j_5=2,$$

对应的项为 $a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55}$ 和 $a_{13}a_{21}a_{35}a_{44}a_{52}$，则含 x^4 的项为

$$(-1)^{N(13245)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55}=4x^4,$$

和

$$(-1)^{N(31542)}a_{13}a_{21}a_{35}a_{44}a_{52}=21x^4,$$

即 $f(x)$ 中 x^4 的系数为 $21+4=25$.

小结：本题求一个用行列式形式表示的五次多项式中 x^4 的系数，本题的关键是利用行列式的定义根据列下标来讨论出现 x^4 的项.

对于此类求 x^n 的系数的题，只需考虑行列式按定义展开的不同行不同列乘积中出现 x^n 的项，然后将它们的系数相加即可.

三、习题 1-2 解答

1. 求下列排列的逆序数：

(1) 4132；　(2) 2413；

(3) 36715284；　(4) 3712456；

(5) $1\ 3 \cdots (2n-1)\ 2\ 4 \cdots (2n)$；　(6) $1\ 3 \cdots (2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 2$.

解题思路　利用逆序数的定义，即

$$N(i_1 i_2 \cdots i_n) = t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \sum_{k=1}^{n} t_k.$$

解　(1) 写出排列中各元素的逆序：

$$\begin{array}{lcccc} 排列 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 逆序 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

故题设排列的逆序数为

$$N=0+1+1+2=4.$$

(2) 写出排列中各元素的逆序：

$$\begin{array}{lcccc} 排列 & 2 & 4 & 1 & 3 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 逆序 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}$$

故题设排列的逆序数为

$$N=0+0+2+1=3.$$

(3) 写出排列中各元素的逆序：

$$\begin{array}{lcccccccc} \text{排列} & 3 & 6 & 7 & 1 & 5 & 2 & 8 & 4 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{逆序} & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 & 4 & 0 & 4 \end{array}$$

故题设排列的逆序数为

$$N=0+0+0+3+2+4+0+4=13.$$

(4) 写出排列中各元素的逆序：

$$\begin{array}{lccccccc} \text{排列} & 3 & 7 & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{逆序} & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

故题设排列的逆序数为

$$N=0+0+2+2+1+1+1=7.$$

(5) 写出排列中各元素的逆序：

$$\begin{array}{lccccccccc} \text{排列} & 1 & 3 & \cdots & (2n-1) & 2 & 4 & \cdots & (2n-2) & (2n) \\ & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow \\ \text{逆序} & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1 & n-2 & \cdots & 1 & 0 \end{array}$$

故题设排列的逆序数为

$$N=(n-1)+(n-2)+(n-3)+\cdots+2+1+0=\frac{n(n-1)}{2}.$$

(6) 写出排列中各元素的逆序：

$$\begin{array}{lccccccccc} \text{排列} & 1 & 3 & \cdots & (2n-1) & (2n) & (2n-2) & \cdots & 4 & 2 \\ & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow \\ \text{逆序} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2 & \cdots & 2n-4 & 2n-2 \end{array}$$

故题设排列的逆序数为

$$\begin{aligned} N &=2+4+\cdots+2n-4+2n-2 \\ &=2[1+2+\cdots+(n-2)+(n-1)]=n(n-1). \end{aligned}$$

2. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项.

解题思路 利用 n 阶行列式的一般项的定义.

解 由定义知，四阶行列式的一般项为

$$(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4},$$

其中，t 为 $p_1p_2p_3p_4$ 的逆序数.

由于 $p_1=1$，$p_2=3$ 已固定，$p_1p_2p_3p_4$ 只能形如

13□□,

即 1324 或 1342，其对应的 t 分别为

$$0+0+1+0=1 \text{ 或 } 0+0+0+2=2,$$

所以 $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 和 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$ 为所求.

3. 在六阶行列式 $|a_{ij}|$ 中，下列各元素乘积应取什么符号?

(1) $a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$；　(2) $a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$；　(3) $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$.

解　(1) 因为 $N(123456)+N(532416)=0+8=8$，所以 $a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$ 的符号为正.

(2) 因为 $N(123456)+N(162435)=0+5=5$，所以 $a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$ 的符号为负.

(3) 因为 $N(251463)+N(136254)=6+5=11$，所以 $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$ 的符号为负.

4. 选择 k，l，使 $a_{13}a_{2k}a_{34}a_{42}a_{5l}$ 成为五阶行列式 $|a_{ij}|$ 中带有负号的项.

解　因为 $N(12345)+N(3k42l)=N(3k42l)$，根据行列式的定义，$k$，$l$ 只能取 1 或 5.

若 $k=5$，$l=1$，则 $N(35421)=8$；若 $k=1$，$l=5$，则 $N(31425)=3$. 所以，$k=1$，$l=5$.

5. 设 n 阶行列式中有 n^2-n 个以上的元素为零，证明该行列式为零.

证　如果 n 阶行列式中有 n^2-n 个以上的元素为零，则至多有 $n-1$ 个不为零的元素.

由于 n 阶行列式的每一项为 n 个不同的元素的乘积，从而每一项均为零，故该行列式为零.

6. 用行列式的定义计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$；　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2\,n-1} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$；