华东地区大学出版社优秀教材

高等教育经济管理类专业系列教材

SHIYONG WEIJIFEN

实用微积分

詹勇虎 主编

（第2版）

东南大学出版社
SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

高等教育经济管理类专业教材
——荣获华东地区大学出版社优秀教材奖

实 用 微 积 分

（第 2 版）

主　编　詹勇虎
副主编　杨　青
参　编　（按姓氏笔画排序）
王　勇　朱张兴
顾慰华　诸炜鑫

东 南 大 学 出 版 社
·南京·

内 容 提 要

本书内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微分学.

本书根据高级应用型人才的培养目标，以“掌握概念、强化应用、培养技能”为重点，注重培养运用数学知识解决实际问题的能力，注重培养数学建模的能力，充分体现数学的应用性.在内容的选取上，削减了繁杂的计算，淡化了数学理论，重视日常的、经济的应用.在课程体系方面给出几何解释、图形表示等，使抽象的概念、定理和结论尽量直观容易理解，还特别注意讲授解题思路，将数学的思想与经济管理中的实际问题紧密结合起来，从而达到学以致用的教学目的.

本书既可以作为应用型本科及高职高专院校经济管理类专业的教材，亦可作为成人教育、高等教育自学考试及企事业单位培训和学生自学用书.

图书在版编目(CIP)数据

实用微积分/詹勇虎主编. —2版. —南京：东南大学出版社，2017.8

ISBN 978-7-5641-7250-3

Ⅰ. ①实… Ⅱ. ①詹… Ⅲ. ①微积分—高等教育—教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第157517号

东南大学出版社出版发行

(南京四牌楼2号 邮编210096)

出版人：江建中

全国各地新华书店经销 南京京新印刷有限公司印刷

开本：787 mm×1092 mm 1/16 印张：11.25 字数：280千字

2017年8月第2版 2017年8月第11次印刷

ISBN 978-7-5641-7250-3

印数：19501—21500册 定价：29.00元

(凡因印装质量问题，请直接与营销部联系。电话：025—83791830)

再版前言

在高等教育进入大众化的今天，微积分依旧是每个接受高等教育者都应该了解的数学分支，它既为学习其他课程打好应有的基础，同时也致力于提高学生的数学素养，因此微积分也是高等院校课程设置中的一门十分重要的文化基础课和工具课.

本书根据高级应用型人才应具有较强的动手能力及一定的基础理论知识的要求，再版编写过程中，注意做到了以下几点：

(1) 以案例为驱动，引入数学背景知识，展开数学问题的讨论，引领学生了解分析问题解决问题的途径，掌握符合高职高专学生的认知规律.

(2) 定位准确，针对性强. 以高职高专院校的培养目标为依据，以适用、够用、好用为指导思想，在体现数学思想为主的前提下删繁就简，深入浅出，做到既注重微积分的基础性，适当保持其学科的科学性与系统性，同时更突出它的工具性.

(3) 理论联系实际，注意把微积分与解决实际问题结合起来，在教材的各个部分都安排了实际应用的内容，有助于培养学生应用微积分解决实际问题的能力，概念的引入都尽可能从实际背景入手，有助于学生的理解与掌握.

(4) 充分体现趣味性. 在本书的多数章节中，增加了一个数学故事，提高了学生学习数学的兴趣，寓学于乐.

参加本书编写的是多年来从事应用型本科和高职高专高等数学教学的一线的老师. 教材中充分融进了我们自己的教学心得和体验，对教材的每一部分内容我们都结合实际反复推敲，力求使本书能够成为受师生欢迎的一本好的教材.

本书自 2005 年出版以来，多次修订重印，荣获华东地区大学出版社优秀教材奖，得到了兄弟院校同行及广大读者的肯定. 大家在使用过程中提出了许多中肯的建议和宝贵的意见，为此本次再版时我们对教材部分内容进行了修改，对一些观点增加了更有说服力的阐述，更改了部分典型例题，充实了许多供学者练习的习题.

编　者

2017 年 7 月

目　　录

1 函 数

数学史上的一座丰碑

大家可曾知道，在漫长的数学发展史上，具有划时代意义的事件是微积分的创立. 因为微积分的诞生，标志着数学的发展历程，由常量数学（初等数学）进入了变量数学（高等数学）的发展阶段，人类社会进化到了由个体作坊的手工生产步入社会化的机器大生产的现代文明阶段. 可以说，没有微积分的数学成果，就不会有现代文明社会，因为现代科学技术及其物质文明的创造，都要在微积分的数学基础上才能发展起来.

可是，大家不禁要问，微积分的开拓者或者创始人是谁呢？要回答这个问题，就得翻开历史了. 打开历史卷宗，我们就会知道，当人类进入 17 世纪的时候，才产生了微积分. 因为历史告诉我们，17 世纪最伟大的数学成果，是解析几何和微积分的产生. 这两项数学成就，在人类的历史上产生了划时代的意义. 可是，你知道为其立下丰功伟绩的数学家是谁吗？是赫赫有名的法国数学家费尔马和笛卡儿以及英国的大数学家及物理学家牛顿和德国的大数学家及自然科学家莱布尼茨.

费尔马和笛卡儿在 17 世纪上半叶潜心研究并且创立了解析几何学. 其中我们经常使用的笛卡儿坐标法，就是这一时期的重要成果. 由于笛卡儿建立了坐标系，引进了变量和函数的概念，从而把几何学和代数学密切联系起来了. 这是数学发展的一个转折点，也是变量数学发展的一个重要里程碑，人称变量数学发展的“第一个决定性步骤”.

之后，牛顿和莱布尼茨在 17 世纪后半叶，几乎是同时，但却是各自独立地完成了微积分的创建工作，人称变量数学发展的“第二个决定性步骤”. 因为事实是这样，当时的牛顿从物理学的观点上研究了数学，所以 1687 年在他出版的《自然哲学的数学原理》一书中，首先把微积分的基本原理应用到天体力学的研究中，获得成功. 而莱布尼茨则从几何学的角度论述了微积分，所以他从 1684 年起就陆续发表了一系列微积分著作，力图采用普遍方法来解决数学分析中的一些问题. 例如 1686 年他发表的第一篇积分学论文，就可以求出原函数，以后他和牛顿又都各自独立地创立了微积分基本定理，即牛顿-莱布尼茨公式. 从而在微分学和积分学之间架起了一座桥梁，沟通了两者之间的联系，这在当时是变量数学的重大发现和卓越成果. 此外莱布尼茨还创造了许多非常优良的数学符号，例如微分记号 $\mathrm{d}x$，积分记号 $\int y\mathrm{d}x$，导数记号 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 等等，对微积分的发展影响极大，直到现在还在使用.

那么，为什么微积分会在 17 世纪产生，而不在别的什么时期呢？这得让我们联系到 17 世纪的欧洲了. 当时欧洲正处在自由资本主义发展的初期，由于生产力的大解放，带来学术思想的空前活跃，光是涉足“微积分”这块神秘领域的学者就不下百人，包括十几位鼎鼎有名的大数学家和几十位小数学家. 而牛顿和莱布尼茨则是这支队伍中的佼佼者，他们集同行之大成，都各自独立地作出了自己开创性的历史贡献. 所以数学史上均公认牛顿和莱布尼茨是

微积分的创始人. 以后三百多年的实践证明:现代科学技术和现代物质文明,很少有几处可以离开微积分或以微积分为基础的数学分科. 所以微积分的创立,是数学史上的一座丰碑,也是人类获得的宝贵财富.

可是不幸的是,牛顿和莱布尼茨的开创性成果,却引来了历史上所谓"优先权"的争论,从而使数学界分裂成两派. 欧洲大陆的数学家,尤其是瑞士数学家雅科布·贝努利(1654—1705)和约翰·贝努利(1667—1748)兄弟支持莱布尼茨,而英国数学家则捍卫牛顿. 两派发生激烈争论,甚至敌对和嘲笑. 直到牛顿和莱布尼茨逝世后,经过调查才得以证实:他们确实是各自独立地创立了微积分,只不过牛顿先于莱布尼茨制定了微积分体系,而莱布尼茨则早于牛顿公开发表了微积分的相关内容.

这一事件的直接后果是:英国和欧洲大陆的数学家停止了思想交换,使英国人在以后的数学上落后于欧洲大陆大约一百年.

1.1 引　言

1.1.1 学一点数学

经济管理专业的学生也要学点数学,这就要求我们要弄清什么是数学. 什么是数学呢? 数学是研究数与形的科学. 或者,一般地,数学是研究数量关系、空间形式和思维方法的科学.

经济工作者,离不开对经济关系进行计量,也就是要以经济理论为基础,以数学方法和计算技术为工具,去研究宏观和微观经济问题的数量关系. 这时数学显得更为重要. 正如马克思说过的那样:"分析经济形式既不能用显微镜,也不能用化学试剂,二者必须用抽象力来代替."马克思认为:"一种科学只有在成功地运用数学时,才算达到了真正完善的地步."

当然,数学又包含了许多分科. 例如,在经济数学中就包括了初等数学和许多高等数学的内容.

那么,什么是初等数学和高等数学呢? 初等数学(包括算术、代数、几何、三角等)研究的是常量和相对静止状态. 高等数学,例如其中的主要部分微积分,研究的是变量和运动.

但是,什么是常量和变量呢? 所谓常量,就是不变的量,即在研究的过程中不起变化,保持一定数值的量. 在研究的过程中变化着的量,也就是取不同数值的量叫变量.

整个数学,包括初等数学和高等数学以及各种专门数学,都是以形和数作为研究对象的.

同时数学还是一种思维方法,一种推理方法,可以用它来解决科学研究、企业管理乃至行政管理中提出的各种问题. 例如,用数学方法可以去判断一个想法是否正确,或者是否大概正确. 例如,爱因斯坦早在 1905 年就能写出公式,预报从原子弹爆炸中获得的能量;天文学中可以用数学公式来预报日食;航天事业可以用数学公式来预报人造地球卫星的飞行轨道;经济学中可以运用经济数学来研究边际问题、弹性问题、最优系列问题、人口问题等等. 例如 1957 年,马寅初教授就曾用数学方法计算出我国 20 年后的人口总数,提出控制人口,节制生育,提高中华民族人口素质的科学论证. 在市场经济中,可以用数学来计算由于物价上涨对该商品购买力的影响. 在微观经济管理中,可以用经济数学来计算该产品的最大利润

和最大经济效益.所以人们说,数学具有预报事件的能力.

同时,数学也是一种语言,一种用各种符号表达的语言,这种语言能为世界上所有文明人种所理解.有人甚至认为,数学也将是其他星球上的居民(如果有的话)也能理解的语言.因为它是一种像音乐那样具有对称性、规律性、模型化和令人喜悦的有节奏的乐章.

当然,随着电子计算机的广泛应用以及国内外市场竞争的日益激烈,一个经理或厂长如果不会用定量化的方法管理企业,提供管理信息方面的准确数字,作出正确的判断和决策,这个经理或厂长也是当不好的.成千上万个企业如果都是这样,那么中华民族的伟大复兴就会成为泡影.正因为这样,所以我们还应该学一点数学,特别是经济应用方面的高等数学.

对经济管理专业的学生来说,以经济管理为目标,学习高等数学中的哪些内容呢?广学博采行不行?当然不行,因为我们要学习的内容简直太多了.我们常用"知识爆炸"来形容我们当今的时代.这就是说,现在全世界的知识总量正在急剧增长.据统计,最近10年全世界的新发明、新创造,比过去2 000年的总和还要多,科学知识增长率达到1 205%,科学杂志每5年增加1倍,平均每1分钟出版1种书.数学是总的科学体系中的一大门类,其发展之迅速,内容之丰富,也早已为世人所知.所以我们学习数学,不可能什么都学,也就是说,在有限的时间内要抓住重点,学一点微积分,主要学习一元函数的微分和积分.学好这部分内容,就能为学习高等数学的其他方面以及专业课程,打下一定的基础.本着这个目的,我们特为你编写了这本《实用微积分》教材,希望为你的学习提供方便.学好这本书,大约需要60学时左右.

1.1.2 经济关系的数学表示——经济数学模型

经济数学模型就是经济对象的数学模型.人所熟知的物理学中的许多基本公式,如电学中的欧姆定律 $V = IR$,力学中的牛顿第二定律 $F = ma$ 等等,都是数学模型的例子.模型是实物、过程、现象以及某一对象的行为方式的表示形式.数学模型是将某一现象的特征或者本质给以数学表述的数学关系式.它是一个或一组数学公式,这些数学公式从数量方面揭示了研究对象的固有特征和运动规律.但是客观世界如此纷繁复杂,能用数学公式表示的事物毕竟有限,所以在许多情况下,与现象完全吻合的数学模型实属难得.一方面模型既要反映实际,另一方面又不能与实际完全一样.因此评价一个模型的质量及其功能,是以它与实际情况的近似程度为依据的.首先模型要尽量接近真实,其次模型又要越简单越好,使其便于操作、分析和迅速取得结果.所以真实和简单是衡量一个模型好坏的两大标志.一个好的数学模型不仅客观地反映了实际,而且它还是简单明了的,便于运用和处理.由于这些特点,使数学模型在科学技术的各个领域得到了广泛的应用,成为人们研究客观世界的有力工具之一.

经济学和其他自然科学一样,如果把某一个经济问题列入研究对象,也可以建立一个经济问题的数学模型.经济数学模型是经济模型的一种.例如在微观经济中,某一产品的成本模型,就是一种经济数学模型.通过成本模型可以预测和控制某一产品的成本.我们知道,对经济现象不仅要进行定性研究,而且要进行定量分析.因此,在应用数学方法研究经济现象的过程中产生的经济数学模型,最终将是一组(或一个)数学公式.就是说,在建模过程中,要按照经济理论,分析所研究的经济现象,找出经济变量之间可能存在的依存关系,把问题作为因变量,把影响问题的主要因素作为自变量,非主要因素可以纳入随机项,然后作出某种

假设和抽象，按照某种结构关系，用一组数学上彼此独立，互不矛盾，完整有解的联立方程式(或单一方程)表示. 例如，上面所说的成本模型就是一种微观的经济函数模型. 以后我们将会知道，在成本模型中，某一产品的成本，可以由成本函数确定，也就是当投入要素价格 $\omega_i(i=1, 2, 3, \cdots, n)$ 给定后，则成本就是产出量 Y 的函数：

$$C(Y)=C(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots, \omega_n; Y)$$

这样有了成本函数，就可以确定或预报某一产品的成本了.

又如在市场经济中，研究消费者对某种商品的需求行为时，可以把商品需求量和商品价格等这样一些经济量作为主要的研究对象，并称它们为经济变量. 研究经济数学模型，就是研究经济变量之间的数量关系，这种数量关系可以用数学语言表述为因变量和自变量之间的函数关系，列出函数或方程的具体形式. 由于商品的需求量首先受到商品价格的影响，因此需求量可以看作因变量，价格可以看作自变量. 这样对该种商品就可以建立一个需求函数的数学模型了. 按照这个模型，可以解释商品价格对商品销售量的影响程度和波动情况.

可见经济数学模型是解决经济问题的基本方法之一. 经济学和数学的结合，为经济管理工作开辟了广阔途径. 正因为这样，所以经济工作者才热衷于研究它，为提高经济效益和管理水平服务.

经济数学模型有各种类型，例如有预报与决策模型、控制与优化模型、规划与管理模型等. 以预报模型为例，就有生产过程中产品质量指标的预报模型，以及气象预报、人口预报、经济增长预报模型等. "凡事预则立"，通过预报模型，人们可以预先获得相关信息和警示，避免重大事故发生. 所以，一个好的经济数学模型的建立，是经济数学模型研究中的关键所在.

1.1.3 相关关系和函数关系

在经济数学模型的建模过程中，根据不同的建模目的和实际要求，可以选择适当的数学方法来获得你所满意的模型. 对于大量社会经济问题，人们习惯采用数理统计方法，即采用相关分析和回归分析的方法，来得到现实世界中，某一特定(经济)对象数量规律的数学公式、图形或算法. 这就是这一特定(经济)对象，为了一个特定目的，反映其特有内在规律的(经济)数学模型.

众所周知，相关分析的研究对象是相关关系. 在相关分析的基础上，还要进一步进行回归分析，才能得到反映某一社会经济问题的数学模型，并用于预测分析. 而在回归分析中，还应用到函数关系，所以说函数关系是相关分析并进而进行回归分析的必要工具.

进一步研究表明，在自然现象和社会现象中，的确大量存在以上两种数量关系，即相关关系和函数关系. 也可以说，相关关系和函数关系这两种数量关系可以涵盖自然现象和社会现象的所有领域. 所以我们有必要对这两种数量关系作进一步的认识.

现在讨论什么是相关关系？所谓相关关系，是指某一现象的各因素之间由于受随机因素的影响，在数量上存在着非确定性的相互依存关系. 例如在一定限度内，施肥量和粮食产量之间、劳动生产率和利润之间、银行利率与存款额之间、出口额与国内生产总值(GDP)之间等等都存在着这类关系. 比如说，施肥量增加，粮食产量一般会增多，但是对于同样多的施肥量用于不同地块时，又可能会出现不同的单位面积产量，这是为什么呢？原因很简单，这是因为决定粮食产量的因素是多方面的，它不仅与施肥量有关，而且同时还与种子的质量、

土壤性质、田间管理、气象条件等随机因素有关. 所以粮食产量虽然与施肥量有关，但是在数量上不是唯一确定的.

函数关系是另一类数量关系，它是某一现象的各因素之间，存在着的唯一确定的数量关系. 在这种关系中，当某一因素(原因因素——自变量)确定后，与之相关的另一因素(结果因素——因变量)就会唯一确定. 例如圆的面积和半径之间，当半径确定之后，圆的面积就会唯一确定；商品销售额和销售量之间，在价格不变的条件下，销售收入可由销售量唯一确定，等等. 这种数量上的函数关系，在自然与社会现象中，几乎到处都是.

前已述及，相关关系是相关分析的研究对象. 而函数关系则是另一种方法的研究对象，它是数学领域中微积分的研究对象. 但是相关关系和函数关系这两类不同的数量关系也不是截然分开的，它们之间有着密切的联系. 例如，由于测量误差等原因，函数关系往往需要通过相关关系才能表现出来. 相反，在回归分析中，又往往要将原本属于相关分析的相关关系，借助函数关系的表达式来加以描述. 以后我们将会知道，在统计分析中，用来表明二因素线性相关程度的指标——相关系数，当它的绝对值等于 1 时，相关关系就会转化成函数关系. 所以函数关系至关重要，深入研究函数关系应该是必然之选.

1.2 函数

1.2.1 函数的定义

定义 1.1 设 X 和 Y 是两个实数集，如果按照某一确定的对应规则 f，对每一个 $x\in X$，都有唯一确定的 $y\in Y$ 与之对应，则称 f 是由 X 到 Y 的一个函数关系，并称 x 为自变量，y 为因变量，或 y 是 x 的一个(单值)函数，记作

$$y=f(x) \qquad (x\in X)$$

其中 f 称为函数符号，用以表示由 x 到 y 的对应规则，即用来表示根据自变量的取值去确定因变量取值的规则.

下面，我们举两个建立函数关系的例子.

例 1.2.1 设本金为 P，年利率为 i，每年结算一次，则存期为 t 年的本利和按复利计算为

$$S=P(1+i)^t \qquad (t\geqslant 0) \tag{1.1}$$

其中 P 和 i 是常数，S 和 t 是相互关联的两个变量，并且 t 是自变量，S 是因变量. 根据函数定义，本利和 S 是存期 t 的函数，即

$$S=f(t)=P(1+i)^t \qquad (t\geqslant 0)$$

这里，根据自变量 t 的取值去确定因变量 S 的取值规则 f，是以 $(1+i)$ 为底的指数函数形式.

注意到资金的时间价值概念(即当一定量的货币转化成资本使用时，由于时间的推移而产生的增值现象)，在财务管理中，称式(1.1)中的本金 P 为复利现值，并称 S 为 P 的复利终值. 即现在价值为 P 的金额，按复利方式计算的在 t 年末时刻的金额.

例 1.2.2 在物流业的线路规划设计中，往往出现物流中转站的选址问题. 例如有一条南北贯通的铁路线经过 A、B 两地，两地相距 150 km，又工厂 C 位于 B 地的正西方向 20 km

处. 现拟在 A、B 两地的铁路线上选一个中转站 D，并在 C、D 间修筑公路，希望将货物由 A 地经 D 转运到目的地 C. 假设铁路运费为 5 元/(t·km)，公路运费为 8 元/(t·km). 试求每吨货物总运费的函数关系式.

解 显然总运费取决于中转站 D 点的选择. 设 A、D 间的距离为 x km. 依题意，有

$$CD=\sqrt{20^2+(150-x)^2}\,(\text{km}) \qquad (x\in[0,\ 150])$$

所以，每吨货物的总运费为

$$y=5x+8\sqrt{20^2+(150-x)^2}\,(\text{元}) \qquad (x\in[0,\ 150]) \tag{1.2}$$

定义 1.2 对于函数 $y=f(x)$，称自变量 x 的取值范围 X 为函数的定义域，记作 $D(f)$，即 $D(f)=X$，称因变量 y 相应的取值范围

$$\{y|\ y=f(x),\ x\in X\}\subset Y$$

为函数的值域，记作 $Z(f)$.

在函数的定义中，有对应规则 f，定义域 $D(f)=X$ 和值域 $Z(f)$. 当定义域 X 和对应规则 f 给定后，值域 $Z(f)=\{y|\ y=f(x),x\in X\}$，就被 X 和 f 唯一确定. 因此，定义域 X 和对应规则 f 是函数定义中的两个要素. 即函数是由定义域和对应法则所确定的，所以研究函数必须注意它的定义域.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义来确定的. 如例 1.2.1 中，函数的定义域是 $t\geqslant 0$，如果写成区间形式则是 $[0,\ +\infty)$，$t\geqslant 0$ 和 $[0,\ +\infty)$ 是等价的. 在例1.2.2 中，函数的定义域是 $[0,\ 150]$ 的区间形式.

以后，函数的定义域都常用区间的形式表示，当然也可以写成不等式，甚至还可用集合的形式. 究竟用哪种方法才好，这要看用谁更简洁明了为准.

在数学中，有时给出的函数并没有指出它的实际意义，所以在这种情况下，就无法根据问题的实际意义来考察它的定义域了. 怎么办？我们约定：使算式有意义的一切实数值的集合，就构成函数的定义域. 例如，$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的定义域是 $x\neq 0$，即 $D(f)=(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$，$\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是 $(-1,\ 1)$. 这两个函数的值域依次为 $(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)$ 和 $[1,\ +\infty)$.

对于分段函数(分段给出表示式的函数)，它的定义域被分成若干部分，各部分都分别用不同的表达式来表示函数关系. 例如，考虑一个总成本函数 $C=C(x)$，当产品的产量不大时，总成本 C 与产量 x 呈线性关系. 比如，当 $0\leqslant x<4\,000$ 件时，设总成本 $C=10\,000+8x$ (元)，其中 10 000(元)是固定成本总额，$8x$(元)是变动成本总额，产量 x(件)的系数 8(元/件)是单位变动成本. 可是当产量再增加时，由于当初的固定成本总额、单位变动成本都要相继发生变化，所以上述总成本与产量的线性关系就不再适用了. 于是就要重新找出新的函数关系，假设为当 $4\,000\leqslant x\leqslant 6\,000$(件)时，有 $C=15x-0.001\,125x^2$. 因此，在区间 $[0,\ 6\,000]$ 中，总成本函数可记为

$$C=C(x)=\begin{cases}10\,000+8x & (0\leqslant x<4\,000)\\ 15x-0.001\,125x^2 & (4\,000\leqslant x\leqslant 6\,000)\end{cases} \tag{1.3}$$

此函数的图像见图 1.1,其中 AB 部分为直线,BDE 部分为抛物线.它的定义域是[0, 6 000],当产量在这一区间中变化时,虽然总成本被分段表示,但仍表示一个函数关系,因为对于这一区间内的每一个 x 值,总有一个总成本 C 与之对应,只不过在计算 C 时,要按照 x 所在的区域去选用相应的 $C(x)$ 的表示式罢了.

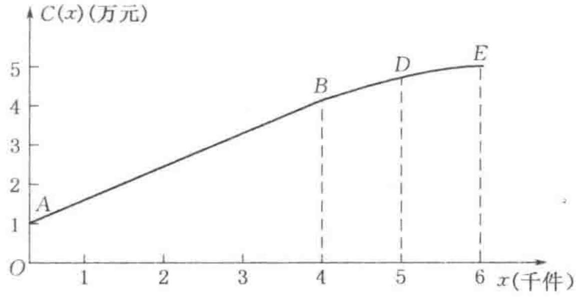

图 1.1

分段函数在经济数学中被广泛采用.下面再举几个求函数定义域的例子.

例 1.2.3 求函数 $y=\sqrt{(x-a)(b-x)}$ 的定义域.(假设 $0<a<b$)

解 这是一个无理函数.要使表达式有意义,必须而且只需根式下的 $(x-a)(b-x)$ 不能为负,这是因为在微积分中考虑的都是实数,而负数不能开平方.所以 x 应适合的不等式为

$$(x-a)(b-x) \geqslant 0$$

解此不等式得到

$$\begin{cases} x-a \geqslant 0 \\ b-x \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \quad a \leqslant x \leqslant b$$

或者

$$\begin{cases} x-a \leqslant 0 \\ b-x \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} x \leqslant a \\ x \geqslant b \end{cases}$$

即 $x \leqslant a$ 且 $x \geqslant b$.

由题知 $a<b$,故 $x \leqslant a$ 且 $x \geqslant b$ 这组解不成立.因此函数 $y=\sqrt{(x-a)(b-x)}$ 的定义域是 $a \leqslant x \leqslant b$,即闭区间 $[a, b]$.

例 1.2.4 求函数 $y=\dfrac{1}{\sin(\pi x)}$ 的定义域.

解 求函数 $y=\dfrac{1}{\sin(\pi x)}$ 的定义域,就是求分母不为零的那些点所在的区间,即

$$\sin(\pi x) \neq 0$$

亦即

$$\pi x \neq n\pi$$

所以函数的定义域是

$$x \neq n \qquad (n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

即除去所有整数的其他一切实数是函数的定义域.

例 1.2.5 求函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}+\ln(2x+4)$.

解 要使函数有意义,必须

$$\begin{cases}3-x>0\\2x+4>0\end{cases} \quad \text{即} \begin{cases}x<3\\x>-2\end{cases}$$

所以函数的定义域为$(-2, 3)$.

1.2.2 函数的表示法

(1) 分析法

分析法也叫公式法,是用公式或分析表达式直接给出自变量和因变量之间函数关系的一种方法. 在经济学和其他自然科学中经常采用这种方法,前面见到的几个例子,都是用分析法表示的函数关系.

在微积分中,有许多实际问题,往往要我们自己去建立函数关系,然后才能进行分析和计算. 下面我们再举一个建立函数分析表达式的例子.

例 1.2.6 设某厂生产某产品全年需外购件 a 件,分若干批采购,每批采购费 b 元,设部件采购后均匀发放,余下库存,平均库存量为批量之半,并设每件年库存费(即保管费)为 C 元. 显然,每次采购的批量大则库存费高,而批量小,批次又会增多,使采购费用增加. 若全年用在外购件上的采购费与库存费用之和为 P,其大小决定于每次采购的批量. 试求 P 与批量的函数关系.

解 设批量为 x,则年采购次数为$\dfrac{a}{x}$(可圆成整数),故年采购费用为 $b\cdot\dfrac{a}{x}$;又因库存量为$\dfrac{x}{2}$,故全年的总库存费用为 $C\cdot\dfrac{x}{2}$. 于是可得全年用在外购件上的采购费与库存费之和为

$$P(x)=\frac{ab}{x}+\frac{C}{2}\cdot x$$

根据问题的实际意义,定义域应为$[1, a]$中的整数.

分析法的优点是简明准确,便于理论研究,但分析法表示的函数不够直观,有时在实际问题中遇到的函数关系,很难甚至不能用分析方法表示.

(2) 图示法

对于函数 $y=f(x)$,设 x 在实数集 X 中取值,即 X 是 $f(x)$的定义域,当 x 取 X 中的某一值 $a\in X$ 时,y 取唯一确定的值 $f(a)$与之对应. 在平面直角坐标系中,可以用点$(a, f(a))$表示这一对对应值. 当 x 的取值历遍 X 时,点集

$$\{(x, y) \mid x\in X, y=f(x)\} \tag{1.4}$$

在直角坐标系中就构成一条曲线,它刻画了由取定的 x 值确定 y 值的对应规则. 我们将式(1.4)在平面直角坐标系中的表示(图 1.2)称为函数 $f(x)$的图像或 $y=f(x)$的图形. 例如图 1.1 所表示的就是式(1.3)的图形.

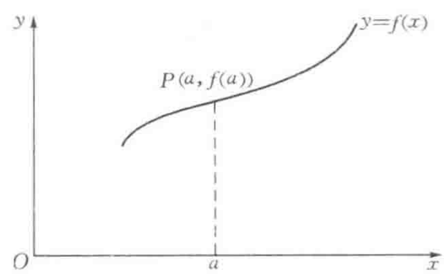

图 1.2

函数的图示法具有直观性、明显性,便于研究函数的几何性质. 缺点是精确度往往受到限制. 在数学和经济学中,常常需要把一些函数用它们的图形表示出来.

(3) 表格法

在实际应用中,常将某种关系的一系列自变量值与对应的函数值列成表,叫做函数的表