合肥学院模块化教学改革系列教材

经管应用数学
线性代数

Applied Mathematics for
Economics Management
Linear Algebra

江立辉
王　玉　编著
吴文静

中国科学技术大学出版社

合肥学院模块化教学改革系列教材

经管应用数学
线性代数

Applied Mathematics for Economics Management

Linear Algebra

江立辉
王　玉　编著
吴文静

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书是安徽省名师工作室和合肥学院模块化教学改革的研究成果，是合肥学院模块化教学改革系列教材之一.

本书主要内容包括矩阵、向量组、行列式、矩阵对角化、线性规划、单纯形法等，在内容的处理上注重阐明思想、概念和方法，力求做到深入浅出，通俗易懂，利于教学和自学. 每章后附有适当习题，供读者理解、消化课本知识及深入学习之用.

本书可以作为应用型本科院校经管类专业的教材，也可以作为线性代数课程学习的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

经管应用数学：线性代数/江立辉，王玉，吴文静编著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2017.8

ISBN 978-7-312-04217-1

Ⅰ.经…　Ⅱ.① 江…　②王…　③ 吴…　Ⅲ.线性代数—高等学校—教材　Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 100253 号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
http://press.ustc.edu.cn
https://zgkxjsdxcbs.tmall.com
印刷　合肥市宏基印刷有限公司
发行　中国科学技术大学出版社
经销　全国新华书店
开本　787 mm×1092 mm　1/16
印张　11.75
字数　293 千
版次　2017 年 8 月第 1 版
印次　2017 年 8 月第 1 次印刷
定价　28.00 元

合肥学院模块化教学改革系列教材

编　委　会

总　　序

课程是高校应用型人才培养的核心,教材是高校课程教学的主要载体,承载着人才培养的教学内容,而教学内容的选择关乎人才培养的质量.编写优秀的教材是应用型人才培养过程中的重要环节.一直以来,我国普通高校教材所承载的教学内容多以学科知识发展的内在逻辑为标准,与课程相对应的知识在学科范围内不断地生长分化.高校教材的编排是按照学科发展的知识并因循其发展逻辑进行的,再由教师依序系统地教给学生.

若我们转变观念——大学的学习应以学生为中心,那我们势必会关注"学生通过大学阶段的学习能够做什么",我们势必会考虑"哪些能力是学生通过学习应该获得的",而不是"哪些内容是教师要讲授的",高校教材承载的教学内容及其构成形式随即发生了变化,突破学科知识体系定势,对原有知识按照学生的需求和应获得的能力进行重构,才能符合应用型人才培养的目标.合肥学院借鉴了德国经验,实施的一系列教育教学改革,特别是课程改革都是以学生的"学"为中心的,围绕课程改革在教材建设方面也做了一些积极的探索.

合肥学院与德国应用科学大学有30多年的合作历史.1985年,安徽省人民政府和德国下萨克森州政府签署了"按照德国应用科学大学办学模式,共建一所示范性应用型本科院校"的协议,合肥学院(原合肥联合大学)成为德方在中国最早重点援建的两所示范性应用科学大学之一.目前,我校是中德在应用型高等教育领域里合作交流规模最大、合作程度最深的高校.在长期合作的过程中,我校借鉴了德国应用科学大学的经验,将德国经验本土化,为我国的应用型人才培养模式改革做出了积极的贡献.在前期工作的基础上,我校深入研究欧洲,特别是德国在高等教育领域的改革和发展状况,结合博洛尼亚进程中的课程改革理念,根据我国国情和高等教育的实际,开展模块化课程改革.我们通过校企深度合作,通过大量的行业、企业调研,了解社会、行业、企业对人才的需求以及专业对应的岗位群,岗位所需要的知识、能力、素质,在此基础上制订人才培养方案和选择确定教学内容,并及时实行动态调整,吸收最新的行业前沿知识,解决人才培养和社会需求适应度不高的问题.2014年,合肥学院"突破学科定势,打造模块化课程,重构能力导向的应用型人才培养教学体系"获得了国家教学成果一等奖.

为了配合模块化课程改革,合肥学院积极组织模块化系列教材的编写工作.以实施模块化教学改革的专业为单位,教材在内容设计上突出应用型人才能力

的培养.即将出版的这套丛书此前作为讲义，已在我校试用多年，并经过多次修改.教材明确定位于应用型人才的培养目标，其内容体现了模块化课程改革的成果，具有以下主要特点：

(1) 适合应用型人才培养.改"知识输入导向"为"知识输出导向"，改"哪些内容是教师要讲授的"为"哪些能力是学生通过学习应该获得的"，根据应用型人才的培养目标，突破学科知识体系定势，对原有知识、能力、要素进行重构，以期符合应用型人才培养目标.

(2) 强化学生能力培养.模块化系列教材坚持以能力为导向，改"知识逻辑体系"为"技术逻辑体系"，优化和整合课程内容，降低教学内容的重复性；专业课注重理论联系实际，重视实践教学和学生能力培养.

(3) 有利于学生个性化学习.模块化系列教材所属的模块具有灵活性和可拆分性的特点，学生可以根据自己的兴趣、爱好以及需要，选择不同模块进行学习.

(4) 有利于资源共享.在模块化教学体系中，要建立"模块池"，模块池是所有模块的集合地，可以供应用型本科高校选修学习，模块化教材很好地反映了这一点.模块化系列教材是我校模块化课程改革思想的体现，出版的目的之一是与同行共同探索应用型本科高校课程、教材的改革，努力实现资源共享.

(5) 突出学生的"学".模块化系列教材既有课程体系改革，也有教学方法、考试方法改革，还有学分计算方法改革.其中，学分计算方法采用欧洲的"workload"(即"学习负荷"，学生必须投入28小时学习，并通过考核才可获得1学分)，这既包括对教师授课量的考核，又包括对学生自主学习量的考核，在关注教师"教"的同时，更加关注学生的"学"，促进了"教"和"学"的统一.

围绕着模块化教学改革进行的教材建设，是我校十几年来教育教学改革大胆实践的成果，广大教师为此付出了很多的心血.在模块化系列教材付梓之时，我要感谢参与编写教材以及参与改革的全体老师，感谢他们在教材编写和学校教学改革中的付出与贡献！同时感谢中国科学技术大学出版社为系列教材的出版提供了服务和平台！希望更多的老师能参与到教材编写中，更好地展现我校的教学改革成果.

应用型人才培养的课程改革任重而道远，模块化系列教材的出版，是我们深化课程改革迈出的又一步.由于编者水平有限，书中还存在不足，希望专家、学者和同行们多提意见，提高教材的质量，以飨莘莘学子！

是为序.

合肥学院党委书记　蔡敬民

2016年7月28日于合肥学院

前　言

应用型本科教育的目标是培养具有较强社会适应能力和竞争能力的高素质应用型人才,要求专业必须紧密结合地方特色,注重学生的实践能力培养.模块化教学改革是以专业能力培养为目标,注重教学内容的实践性和应用性,要求改变传统的以知识输入为导向的课程体系为以知识输出为导向(从能力分解出发)的模块体系.线性代数作为经济管理(经管)类专业的基础课程,在培养学生逻辑思维能力和应用能力方面起着举足轻重的作用.而现有的线性代数教材强调线性代数的理论严谨性,忽视线性代数作为数学工具的应用性,没有和经管类后续专业课程的需要相结合,并且缺失“线性规划”这部分内容.因此,编写出符合应用型人才培养的模块化教材显得十分必要.

我们在多年的模块化教学改革实践中,努力做到理论联系实际、教学服务专业、融入建模思想、注重能力培养.在“以实际应用为目的,以专业需求为导向,以案例教学为主线,以数学软件为工具,以自主学习为特色”的思想指导下,编写了这本适用于经管类应用型人才培养需要的模块化教材.本教材具有以下鲜明特色:

(1) 符合应用型人才办学定位.本教材介绍了经管类专业中常用的投入产出数学模型和线性规划模型,以案例为主线,将数学与经管类专业相结合,体现了数学在其他专业中的应用.在每章最后还设计了“实践・创新”和“自主・探究”两个模块,以满足学生自主学习能力的培养.在巩固练习部分,我们将内容按照难易度分为A、B两个部分,以满足学生的不同需求.

(2) 满足模块化教学改革的需求.根据经管类专业特点,结合后续专业课程所需知识,确定了以矩阵为基础、线性方程为主线、融入线性规划内容,遵循“少而精”的原则整合教学体系.将传统的内容进行调整,强调矩阵初等变换的重要性和实用性,弱化行列式的理论应用,将其缩减为一节内容作为预备知识调整到“矩阵对角化及应用”之前,从而使得学生学习起来前后衔接更加通畅.

(3) 突出了学生应用数学能力的培养.本教材在线性规划部分提供了大量的实际案例,着力培养学生应用数学知识分析经济管理中的问题,给出合理表述及解决方案的能力.

本书共分4章.吴文静编写第1.1~1.3节、第1.5节和第3.2~3.5节;王玉编写第1.4节、第2.1~2.4节、第3.1节和第3.6节;江立辉编写第2.5节、第4章.全书由江立辉负责统稿和定稿工作.打“*”号章节为选学内容,供学有余力的同学课后阅读.

本书在编写过程中参考了大量的相关书籍和资料,选用了其中的有关内容,在此特向相关作者表示深深的谢意!

本书作为安徽省质量工程项目(2015jyxm321,2015mooc077)和合肥学院模块化教材立

项项目的研究成果,在编辑出版过程中得到了合肥学院教务处、合肥学院数理系、中国科学技术大学出版社的大力支持和帮助,陈秀、牛欣、张霞等老师为本书的编写提供了宝贵的意见,谭玲燕老师对习题答案进行了仔细地核对,我们在此一并表示衷心的感谢.

由于编者水平有限,书中难免有不妥或错误之处,敬请广大师生和读者批评指正.

编　者

2017 年 3 月于合肥

目　　录

第 1 章 矩阵

矩阵的研究历史悠久，早在中国古代数学专著《九章算术》中就出现了矩阵的思想.作为数学中的正式研究对象，矩阵出现于 19 世纪.1858 年，英国数学家阿瑟·凯利系统地讨论了矩阵的运算律、逆、转置以及特征多项式方程.1879 年，德国数学家费罗贝尼乌斯引入矩阵秩的概念.至此，矩阵体系基本形成.

矩阵作为线性代数的主要研究对象，在数学的其他分支以及在经济管理等方面有着十分广泛的应用.它是研究线性变换、向量的线性相关性及线性方程组求解等问题的有力工具.

本章主要介绍矩阵的概念、几种常见的矩阵运算、可逆矩阵、矩阵的初等变换、线性方程组的解和分块矩阵等.这些内容是学习后面知识的重要基础.

1.1 矩阵及其运算

1.1.1 矩阵的概念

在实际的经济活动和生活中，经常用数表的方式来处理相关数据.

某企业生产 3 种产品，各种产品前 3 个月的产值(单位:万件)如表 1.1.1 所示.

表 1.1.1 数据表

产品 \ 月份	1	2	3
1	10	12	9
2	13	18	15
3	14	21	11

为了研究方便，常常将上述表格按原有顺序排列成 3 行 3 列的矩形数表，记为

$$\begin{pmatrix} 10 & 12 & 9 \\ 13 & 18 & 15 \\ 14 & 21 & 11 \end{pmatrix}$$

又如，线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

的系数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,常数项 $b_j(j=1,2,\cdots,m)$按原位置也能构成如下矩形数表:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

这个数表在后续求解线性方程组的过程中将起到重要作用.

由上面两个例子可以看出,矩形数表可以简洁地反映实际问题的有用信息,与所研究的问题密切相关,这样的数表称为矩阵.下面给出矩阵的数学定义.

定义 1.1.1 由 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$排成的一个 m 行 n 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵,简称 **$m\times n$ 矩阵**.其中数 a_{ij} 称为矩阵的第 i 行第 j 列元素.矩阵常用大写字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 等表示.有时为了指明矩阵的行数和列数,$m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也可记作 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 或 $(a_{ij})_{m\times n}$.

当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数 m 与列数 n 相等时,称 $\boldsymbol{A}$ 为 **n 阶矩阵**或 **n 阶方阵**,记作 $\boldsymbol{A}_n$ 或 $(a_{ij})_n$.

显然,一阶矩阵就是一个数.

当两个矩阵的行数相等、列数也相等时,称它们是**同型矩阵**.

如果两个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 是同型矩阵,并且它们的对应元素相等,即

$$a_{ij}=b_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

则称**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等**,记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

元素都是零的矩阵称为**零矩阵**,记作 $\boldsymbol{O}$.注意不同型的零矩阵是不同的.

只有一行的矩阵

$$\boldsymbol{A}=(a_1\quad a_2\quad\cdots\quad a_n)$$

称为**行矩阵**.

为避免元素间的混淆,行矩阵也记作

$$\boldsymbol{A}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

只有一列的矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

称为**列矩阵**.

1.1.2 几种特殊矩阵

1. 对角矩阵

如果在 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_n$ 中元素满足条件 $a_{ij}=0(i\neq j)$,即 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线(即从左上角到右下角)以外的元素全为零,则称 $\boldsymbol{A}$ 为 **n 阶对角矩阵**. 即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

常记作 $\operatorname{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$,一般用字母"$\boldsymbol{\Lambda}$"表示.

2. 数量矩阵

如果在 n 阶对角矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_n$ 中元素满足条件 $a_{ii}=a(i=1,2,\cdots,n)$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为**数量矩阵**. 即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

3. 单位矩阵

如果在 n 阶对角矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_n$ 中元素满足条件 $a_{ii}=1(i=1,2,\cdots,n)$,则称 $\boldsymbol{A}$ 为 **n 阶单位矩阵**,记为 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{E}$. 即

$$\boldsymbol{E}_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

4. 三角矩阵

如果在 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_n$ 中元素满足条件 $a_{ij}=0(i>j;i,j=1,2,\cdots,n)$,即 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线以下的元素全为零,则称 $\boldsymbol{A}$ 为 **n 阶上三角矩阵**. 即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

如果在 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_n$ 中元素满足条件 $a_{ij}=0(i<j;i,j=1,2,\cdots,n)$,即 $\boldsymbol{A}$ 的主对角以上的元素全为零,则称 $\boldsymbol{A}$ 为 **n 阶下三角矩阵**. 即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

上三角矩阵与下三角矩阵统称为**三角矩阵**.

1.1.3 矩阵的运算

下面介绍矩阵的加法、数乘、乘法和转置等基本运算,正是这些运算使矩阵成为解决实际问题的有力工具.

1. 矩阵的加法

定义 1.1.2 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$,令 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$,称 $\boldsymbol{C}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的**和**,记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,即

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

记 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n}$,称 $-\boldsymbol{A}$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**. 则有

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$$

注 只有当两个矩阵同型时,才能进行加法运算.

由于矩阵的加法归结为它们的元素的加法,所以,不难验证加法满足以下运算规律:

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;(交换律)

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$;(结合律)

(3) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$;

(4) $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

例 1.1.1 设 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}+\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{X}$.

解 由题意知,$\boldsymbol{X}$ 是 2×2 矩阵,可令

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

2. 矩阵的数乘

定义 1.1.3 数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的乘积称为**矩阵的数乘**,记作 $\lambda\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}\lambda$. 规定 $\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\lambda=(\lambda a_{ij})_{m\times n}$. 即

$$\lambda\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\lambda=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

数乘运算满足下列运算规律(其中 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 为同型矩阵,λ 和 μ 为任意常数):

(1) $(\lambda\mu)\boldsymbol{A}=\lambda(\mu\boldsymbol{A})$;

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{A}+\mu\boldsymbol{A}$;

(3) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$.

3. 矩阵的乘积

定义 1.1.4 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$,$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$,规定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积是

$$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$$

其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$$

并把此乘积记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.记号 $\boldsymbol{AB}$ 常读作 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$ 或 $\boldsymbol{B}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$.

特别地,当行矩阵 $(a_{i1}\quad a_{i2}\quad\cdots\quad a_{is})$ 与列矩阵 $\begin{pmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{sj}\end{pmatrix}$ 相乘时

$$(a_{i1}\quad a_{i2}\quad\cdots\quad a_{is})\begin{pmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{sj}\end{pmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$$

就是一个数 c_{ij},这表明 c_{ij} 就是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元素乘积之和.

注 只有当第一个矩阵(左矩阵)的列数与第二个矩阵(右矩阵)的行数相等时,两个矩阵才能相乘.

例 1.1.2 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&4&0\\1&-1&3&4\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&3&-1\\0&-1&2\\1&-3&1\\4&0&-2\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{AB}$.

解 因为 $\boldsymbol{A}$ 是 2×4 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 4×3 矩阵,即 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于 $\boldsymbol{B}$ 的行数,故 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可相乘,其乘积 $\boldsymbol{AB}$ 是一个 2×3 矩阵.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}&=\begin{pmatrix}2&1&4&0\\1&-1&3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&1\\0&-1&2\\1&-3&1\\4&0&-2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2\times1+1\times0+4\times1+0\times4&2\times3+1\times(-1)+4\times(-3)+0\times0&2\times1+1\times2+4\times1+0\times(-2)\\1\times1+(-1)\times0+3\times1+4\times4&1\times3+(-1)\times(-1)+3\times(-3)+4\times0&1\times1+(-1)\times2+3\times1+4\times(-2)\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}6&-7&8\\20&-5&-6\end{pmatrix}\end{aligned}$$

例 1.1.3 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\1&-1\end{pmatrix}$$

例 1.1.4　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$,求 $\boldsymbol{AC}$ 和 $\boldsymbol{BC}$.

解

$$\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{BC}=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$$

由例 1.1.3 和例 1.1.4 可得如下结论:

(1) 一般情况下,矩阵的乘法不满足交换律,即 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$,则称 $\boldsymbol{A}$ **与** $\boldsymbol{B}$ **可交换**.

(2) 当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 时,不能推出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$,说明两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵.

(3) 矩阵的乘法不满足消去律,即当 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{BC}$,且 $\boldsymbol{C}\neq\boldsymbol{O}$ 时,不一定有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

但矩阵的乘法仍满足下列运算律(假设运算可行):

(1) $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$.(结合律)

(2) $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$;(左分配律)

　$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$.(右分配律)

(3) $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}$ (λ 为常数).

例 1.1.5　用矩阵的运算形式表示线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\\qquad\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}\tag{1.1.1}$$

解　令

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

则有

$$\boldsymbol{Ax}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}=\boldsymbol{b}$$

成立.即方程组(1.1.1)可表示为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$. 称 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 是方程组(1.1.1)的矩阵表达形式,称 $\boldsymbol{A}$ 是方程组(1.1.1)的**系数矩阵**,称

$$(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{cccc:c}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}&b_m\end{array}\right)$$

是方程组(1.1.1)的**增广矩阵**,也可以记作$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})$.

例如，方程组$\begin{cases}2x+y=8\\ x-y=2\end{cases}$的系数矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$，增广矩阵$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b})=\begin{pmatrix}2 & 1 & 8\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$，方程组的矩阵方程为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$. 其中 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$.

对于单位矩阵 $\boldsymbol{E}$，容易验证

$$\boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n},\quad \boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{E}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n}$$

根据矩阵的乘法，可以定义 n 阶方阵的幂的运算.

定义 1.1.5 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，定义 $\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{A}^1=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{AA}$，$\cdots$，$\boldsymbol{A}^{k+1}=\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^1$（$k$ 为正整数）. 即 $\boldsymbol{A}^k=\overbrace{\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}}^{k个}$，称为 $\boldsymbol{A}$ **的 k 次幂**.

不难看出 $\boldsymbol{A}$ 的 k 次幂具有如下特点：

(1) 方阵才有幂；

(2) $\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{A}^l=\boldsymbol{A}^{k+l}$，$(\boldsymbol{A}^k)^l=\boldsymbol{A}^{kl}$.

思考 一般情况下，$(\boldsymbol{AB})^k\neq\boldsymbol{A}^k\boldsymbol{B}^k$，为什么？请举例.

与数 x 的多项式 $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ 表示一样，由方阵幂的定义，可以类似地推出方阵的多项式.

对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，称 $f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+a_2\boldsymbol{A}^2+\cdots+a_n\boldsymbol{A}^n$ 为**方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 次多项式**.

注 常数项 a_0 应改写为 $a_0\boldsymbol{E}$.

例 1.1.6 设 $f(x)=x^2-2x-3$，$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 4 & 3\end{pmatrix}$，求 $f(\boldsymbol{A})$.

解 由于

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 8 & 9\end{pmatrix}$$

且 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}$，故

$$f(\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 8 & 9\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 4 & 3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

4. 矩阵的转置

定义 1.1.6 将矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 的行换成同序数的列，得到新的 $n\times m$ 矩阵，称为 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，例如矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 5 & 3 & 6\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -3 & 3\\ 4 & 6\end{pmatrix}$$

由矩阵的定义，易得如下运算律：

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

(3) $(\lambda\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=\lambda\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$（$\lambda$ 为常数）；

(4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

证 性质(1)，(2)，(3)容易证明，读者可自行证明，这里只证明性质(4).

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，显然$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$ 与 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 同型. 而$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行第 j 列元素等于 $\boldsymbol{AB}$ 的第 j 行第 i 列元素，如下所示：