



JINBANG BOOKS SINCE 1997  
**金榜图书**  
 北京时代巨流文化有限公司

全国各大考研辅导机构通用教材

**2019** 李永乐·王式安  
 考研数学系列

# 考研数学

# 复习全书

数学三

主编◎李永乐 王式安 武忠祥 季文铎

编委◎王式安 刘喜波 李永乐 季文铎 武忠祥 胡金德 蔡燧林

核心搭配：《复习全书》+《660题》+《历年真题》

哪里不会 重难点视频讲解 下载V研客APP  
 扫哪里 APP扫书中二维码 获取方式详见封二使用说明

超值赠送

《分阶习题同步训练》便携本

- 基础单项训练
- 基础综合训练
- 思维拓展训练

三维一体化  
 巩固、练习、提高

超值  
 加赠

金榜图书  
 考研数学体验课  
**线性代数**  
 听课码:YKUZXHS3QS

双色印刷

高品质  
 阅读体验

国家行政学院出版社



金榜图书

JINBANG BOOKS SINCE 1987

全国各大考研辅导机构通用教材

**2019** 李永乐·王式安  
考研数学系列

# 考研数学 复习全书

数学三

主编◎李永乐 王式安 武忠祥 季文铎

编委◎王式安 刘喜波 李永乐 季文铎 武忠祥 胡金德 蔡燧林

国家行政学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

考研数学复习全书·数学三/李永乐等主编. —北京:国家行政学院出版社, 2017. 11

ISBN 978-7-5150-2046-4

I. ①考… II. ①李… III. ①高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 276184 号

书 名 考研数学复习全书·数学三  
作 者 李永乐 王式安 武忠祥 季文铎  
责任编辑 李雪菲  
出版发行 国家行政学院出版社  
(北京市海淀区长春桥路 6 号 100089)  
(010)68922366 68929037  
<http://cbs.nsa.gov.cn>  
编 辑 部 (010)68928866  
经 销 新华书店  
印 刷 三河市鑫鑫科达彩色印刷包装有限公司  
版 次 2017 年 12 月北京第 1 版  
印 次 2017 年 12 月北京第 1 次印刷  
开 本 787 毫米×1092 毫米 16 开  
印 张 40  
字 数 716 千字  
书 号 ISBN 978-7-5150-2046-4  
定 价 89.80 元

本书如有印装质量问题,可随时调换,联系电话:(010)51906740

## 金榜考研数学系列及使用说明

考研数学满分 150 分,数学在考研科目中的比重明显,同时又因数学学科本身的特点,考生的数学成绩历年来总是差别很大,因此有得数学者得考研之说。既然数学对考研成绩的意义如此重要,就有必要探讨一下影响数学成绩的主要因素。

本书编写老师们根据多年的命题经验和阅卷经验总结,发现考研数学命题的灵活性非常大,反映在命题中,不仅仅表现在一个知识点与多个知识点的考查难度不同,更多的是表现在考查多个知识点的综合上,这些题目在表达上多一个字或多一句话,难度都会千差万别。正是这些综合型题目拉开了考试成绩的距离,而构成这些难点的主要因素,实际上是最基础的基本概念、定理和公式的综合。同时,从阅卷反映的问题来看,考生答错题目的主要原因也是对基本概念、定理和公式记忆和掌握得不够熟练所致。总结为一句话,那就是:要想数学拿高分,就必须熟练掌握、灵活运用基本概念、定理和公式。

基于此,李永乐、王式安考研数学辅导团队结合多年来的考研辅导和研究,精心编写了本系列图书,目的就在于帮助考生有计划有步骤地完成数学复习,从基本概念、定理和公式的记忆,到对其的熟练运用,循序渐进。

### 一、本系列重点图书和复习建议

每年硕士研究生入学数学考试的时间一般都安排在上午,考生们可将数学的复习时间安排在每天上午。基础、强化阶段,每天至少应安排 2 小时来复习数学,对于数学基础较差的同学建议提早复习基础知识,每天再多花点时间来做做习题。

重点图书	复习建议
《考研数学复习全书》	<p>重视基础积累,纵向学习,夯实知识点</p> <p>由于全书的编写起点是学完大学数学课程,所以建议基础薄弱的同学,先花点时间整体的看看书中的理论知识,然后再看例题。以章或节为单位,学习新内容前要复习前面的内容,按照规律来复习,经过必要的重复会起到事半功倍的效果。系统复习,打好基础,特别是对大纲中要求的基本概念、理论、方法要系统理解和掌握。完成基础准备。另外按章节顺序完成相应的配套练习题,通过练习检验你是否真正地掌握了。</p>
《数学基础过关 660 题》	<p>在完成基础知识的学习后,有针对性的做一些练习。熟练掌握定理公式和解题技巧,加强知识点的前后联系,体系化,系统化,分清重难点,让复习周期尽量缩短。</p> <p>虽说书中都是选择题和填空题,同学们不要轻视,也不要一开始就盲目做题。看到一道题,要能分辨出是哪个知识点,考什么,然后做题过程中看看自己是否掌握了,应用的定理、公式的条件是否熟悉。这样才是真正做一道题。</p>
《数学历年真题权威解析》	<p>通过真题,进一步提高解题能力和技巧,达到实际考试的要求</p> <p>第一阶段,看看各年真题,熟悉题型和常考点。</p> <p>第二阶段,进行专项复习。</p> <p>书中将真题按考点进行分类。对重点题型和自己薄弱的内容进行突破,达到全面掌握,不留考点空白。</p> <p>第三阶段,按年份,逐年练习。</p>

重点图书	复习建议
《数学历年真题权威解析·试卷版》	<p style="text-align: center;">考前真题真练,提高应考技巧</p> <p>仿照真实试卷,独立试卷,答题卡,答题纸。模拟考场真实环境。按照考试的要求在规定时间内去做一套真题,调动所有知识储备,调整心态,快速进入考试状态。做过的真题,自己要整理,总结的自己的薄弱环节,针对性复习,加深记忆。</p>
《高等数学辅导讲义》	<p style="text-align: center;">单科强化</p> <p>武忠祥老师的高数教学讲稿改编而成,系统阐述了高等数学的基础知识。例题都是经过严格筛选、归纳。多年经验总结,对同学们的重点、难点的把握更准确、更有针对性。认真研读,做到举一反三。</p>
《线性代数辅导讲义》	<p style="text-align: center;">单科强化</p> <p>李永乐老师的代数教学讲稿改编而成,系统阐述了线性代数的基础知识。例题都是经过严格筛选、归纳。多年经验总结,对同学们的重点、难点的把握更准确、更有针对性。认真研读,做到举一反三。</p>
《概率论与数理统计辅导讲义》	<p style="text-align: center;">单科强化</p> <p>王式安老师的概率教学讲稿改编而成,系统阐述了概率论与数理统计的基础知识。例题都是经过严格筛选、归纳。多年经验总结,对同学们的重点、难点的把握更准确、更有针对性。认真研读,做到举一反三。</p>
《李永乐数学决胜冲刺6+2》	<p style="text-align: center;">冲刺模拟题</p> <p>通过整套题的训练,进行总结和梳理。不同于重点题型的练习,需要全面的知识,要综合应用。必要时复习一下基本概念、公式、定理,准确记忆。</p>

备注:以上内容仅供参考。各位同学可以根据自身的能力和學習习惯进行调整。

## 二、本书使用说明

本书是考研数学内容的全面阐述,可以应用于考研复习的各个阶段。全书在重视基本概念、理论的同时,着重数学思想、方法的理解和应用。编者团队还精心编写了相当数量的例题,对解题思路、方法做了归纳总结。相信通过这本书的学习,同学们能完全掌握考研数学的内容和方法。

同时本书的重难点,经典题型还配有视频讲解,扫描二维码就可观看。可帮助同学们更好地理解概念,掌握做题技巧。详细操作步骤可见封二“本书二维码扫码使用说明”。

随书赠送的《分阶习题同步训练》,习题编写还是加了些难度和综合性的,目的并不是为了难为学生,主要是为了让大能够发现学习中的薄弱环节。

使用本书的同时,也可以配合使用本书作者编写的《基础过关660题》、《数学历年真题权威解析》等,提高复习效率。

# 前言

为了帮助广大考生能够在较短的时间内,准确理解和熟练掌握考试大纲知识点的内容,全面提高解题能力和应试水平,本书编写团队依据 15 年的命题与阅卷经验,并结合 10 多年的考研辅导和研究精华,精心编写了本书,真正起到帮助同学们提高综合分析和综合解题的能力。

## 一、本书的编排结构

全书分三篇,分别是微积分、线性代数、概率论与数理统计,各篇按大纲设置章节,每章的编排如下:

1. **考点与要求** 设置本部分的目的是使考生明白考试内容和考试要求,从而在复习时有明确的目标和重点。

2. **内容精讲** 本部分对考试大纲所要求的知识点进行全面阐述,并对考试重点、难点以及常考知识点进行深度剖析。

3. **例题分析** 本部分对历年考题所涉及的题型进行归纳分类,总结各种题型的解题方法,注重对所学知识的应用,以便能够开阔考生的解题思路,使所学知识融会贯通,并能灵活地解决问题。针对以往考生在解题过程中普遍存在的问题及常犯的错误,给出相应的注意事项,对有难度的例题给出解题思路的分析,以便加强考生对基本概念、公式和定理等内容的理解和正确运用。

4. **习题分阶** 只有适量的练习才能巩固所学的知识,数学复习离不开做题。为了使考生更好地巩固所学知识,提高实际解题能力,本书作者精心优化设计了一定数量的练习题,供考生练习,以便使考生在熟练掌握基本知识的基础上,达到轻松解答真题的水平。同时,本书对精选的练习题,进行了难度分阶,从基本概念,到综合应用,层层递进,实现练习、巩固、提高三维一体。

## 二、本书的主要特色

1. **权威打造** 命题专家和阅卷专家联袂打造,站在命题专家的角度命题,站在阅卷专家的角度解题,为考生提供最权威的复习指导。

2. **综合提升** 与其他同类图书相比,本书加强了考查知识点交叉出题的综合性,真正起

到帮助考生提高综合分析和综合解题的能力。

3. **分析透彻** 本书既从宏观上把握考研对知识的要求,又从微观层面对重要知识点进行深入细致的剖析,让考生思路清晰、顺畅。

4. **一题多解** 对于常考热点题型,均给出巧妙、新颖、简便的几种解法,拓展考生思维,锻炼考生知识应用的灵活性。这些解法均来自各位专家多年教学实践总结和长期命题阅卷经验。

5. **贴心服务** 本书赠送《分阶习题同步训练》,以便于考生迅速检验学习效果,巩固所学内容。

建议考生在使用本书时不要就题论题,而是要多动脑,通过对题目的练习、比较、思考,总结并发现题目设置和解答的规律性,真正掌握应试解题的金钥匙,从而迅速提高知识水平和应试能力,取得理想分数。

另外,为了更好地帮助同学们进行复习,“李永乐考研数学辅导团队”特在新浪微博上开设答疑专区,同学们在考研数学复习中,如若遇到任何问题,即可在线留言,团队老师将尽心为你解答。请访问 [weibo.com/@清华李永乐考研数学辅导团队](http://weibo.com/@清华李永乐考研数学辅导团队)。



清华李永乐  
考研数学辅导团队



微信公众号

最后,本书的成稿还要感谢考研数学原命题组组长单立波老师在编校过程中所付出的努力。

希望本书能对同学们的复习备考带来更大的帮助。对书中的不足和疏漏之处,恳请读者批评指正。

祝同学们复习顺利,心想事成,考研成功!

编者

2017年12月

# 目录

## 第一篇 微积分

### 第一章 函数 极限 连续 ..... (3)

**考点与要求** ..... (3)

#### ▶▶1 函 数 ..... (3)

**内容精讲** ..... (3)

一、函数的概念及表示方法 ..... (3)

二、函数的性态 ..... (3)

三、几个与函数相关的概念 ..... (4)

四、重要公式与结论 ..... (5)

**例题分析** ..... (6)

一、求函数的定义域及表达式 ..... (6)

二、函数的特性 ..... (8)

#### ▶▶2 极 限 ..... (10)

**内容精讲** ..... (10)

一、极限的定义 ..... (10)

二、数列极限的基本性质 ..... (11)

三、函数极限的基本性质 ..... (11)

四、无穷小量与无穷大量 ..... (11)

五、极限的四则运算法则 ..... (12)

六、两个重要极限 ..... (13)

七、极限存在的两个准则 ..... (13)

八、洛必达(L'Hospital)法则 ..... (13)

九、重要公式与结论 ..... (14)

**例题分析** ..... (15)

一、极限的概念与性质 ..... (15)

二、求函数的极限 ..... (16)

三、求数列的极限 ..... (23)

四、求含参变量的极限 ..... (24)

五、无穷小量阶的比较 ..... (25)

六、函数极限的反问题 ..... (26)

#### ▶▶3 函数的连续与间断 ..... (28)

**内容精讲** ..... (28)

一、连续的定义 ..... (28)

二、函数的间断点及其分类 ..... (28)

三、连续函数性质 ..... (28)

四、重要定理与结论 ..... (29)

**例题分析** ..... (29)

一、函数的连续性及其间断点的分类 ..... (29)

二、连续函数性质的应用 ..... (31)

### 第二章 一元函数微分学 ..... (32)

**考点与要求** ..... (32)

#### ▶▶1 导数与微分 ..... (32)

**内容精讲** ..... (32)

一、导数的概念 ..... (32)

二、导数的计算 ..... (33)

三、微分 ..... (35)

四、重要公式与结论 ..... (35)

**例题分析** ..... (36)

一、有关导数的定义及性质 ..... (36)

二、含有绝对值函数的导数 ..... (40)

三、导数的几何意义 ..... (40)

四、变限积分的导数 ..... (42)

五、利用导数公式及法则求导 ..... (43)

六、可导条件下求待定的参数 ..... (45)

七、求函数的高阶导数 ..... (46)

#### ▶▶2 导数的应用 ..... (47)

**内容精讲** ..... (47)

一、函数的单调性与极值 ..... (47)

二、曲线的凹凸性与拐点 ..... (48)

三、曲线的渐近线 ..... (48)



四、函数图形的描绘	(49)
五、重要公式与结论	(49)
<b>例题分析</b>	(49)
一、求函数的单调区间与极值	(49)
二、判断曲线的凹凸性与拐点	(51)
三、求曲线的渐近线	(52)
四、导数的经济应用	(54)
▶▶3 中值定理及不等式的证明	(55)
<b>内容精讲</b>	(55)
一、微分中值定理	(55)
二、补充公式与结论	(57)
三、与本章例题有关的其它内容	(57)
<b>例题分析</b>	(57)
一、证明存在 $\xi$ 使 $f(\xi) = 0$	(57)
二、讨论方程根的个数及范围	(58)
三、证明存在 $\xi$ , 使 $f^{(n)}(\xi) = 0 (n = 1, 2, \dots)$	(60)
四、证明存在 $\xi$ , 使 $G(\xi, f(\xi), f'(\xi)) = 0$	(61)
五、含有 $f''(\xi)$ (或更高阶导数) 的介值问题	(63)
六、双介值问题 $F(\xi, \eta, \dots) = 0$	(64)
七、不等式的证明	(65)
<b>第三章 一元函数积分学</b>	(71)
<b>考点与要求</b>	(71)
▶▶1 不定积分	(71)
<b>内容精讲</b>	(71)
一、不定积分的概念与性质	(71)
二、基本积分公式	(72)
三、三个积分方法	(72)
四、重要公式与结论	(73)
<b>例题分析</b>	(75)
一、不定积分的概念和性质	(75)
二、不定积分的计算	(76)
▶▶2 定积分	(85)
<b>内容精讲</b>	(85)

一、定积分的概念与性质	(85)
二、定积分的几个定理	(86)
三、定积分的计算方法	(87)
四、重要公式与结论	(87)
<b>例题分析</b>	(88)
一、定积分的概念及性质	(88)
二、定积分的计算	(91)
三、有关变限积分的问题	(96)
四、定积分的证明题	(97)
▶▶3 反常积分	(99)
<b>内容精讲</b>	(99)
一、无穷区间的反常积分	(99)
二、无界函数的反常积分	(100)
三、几个重要的反常积分	(101)
<b>例题分析</b>	(101)
▶▶4 定积分的应用	(104)
<b>内容精讲</b>	(104)
一、定积分应用的基本原理——微元法(元素法)	(104)
二、定积分的几何应用	(104)
三、定积分的经济应用	(105)
<b>例题分析</b>	(105)
一、定积分的几何应用	(105)
二、定积分的经济应用	(107)
<b>第四章 多元函数微积分学</b>	(108)
<b>考点与要求</b>	(108)
▶▶1 多元函数微分学	(108)
<b>内容精讲</b>	(108)
一、多元函数的极限与连续	(108)
二、偏导数与全微分	(109)
三、复合函数求导法则	(110)
四、隐函数的求导公式	(111)
五、多元函数的极值	(111)
六、重要公式与结论	(112)
<b>例题分析</b>	(113)
一、二元函数的极限与连续	(113)

二、偏导数与全微分的概念	(114)
三、求复合函数的偏导数与全微分	(117)
四、求隐函数的偏导数与全微分	(122)
五、变量代换下表达式的变形	(125)
六、多元函数微分学的反问题	(127)
七、多元函数的极值与最值	(128)
▶▶2 二重积分	(135)
<b>内容精讲</b>	(135)
一、二重积分的概念与性质	(135)
二、二重积分的计算	(136)
三、重要公式与结论	(136)
<b>例题分析</b>	(137)
一、二重积分的概念及性质	(137)
二、二重积分的基本计算	(138)
三、利用区域的对称性和函数的奇偶性计算积分	(141)
四、分块函数的二重积分	(144)
五、交换积分次序及坐标系	(145)
六、反常二重积分的计算	(148)
七、与二重积分相关的证明	(149)
<b>第五章 无穷级数</b>	(150)
<b>考点与要求</b>	(150)
▶▶1 常数项级数	(150)
<b>内容精讲</b>	(150)
一、基本概念和基本性质	(150)
二、正项(不变号)级数敛散性的判别法	(151)
三、任意项(变号)级数敛散性的判别法	(151)
四、重要公式与结论	(152)
<b>例题分析</b>	(153)
一、正项级数敛散性的判定	(153)
二、交错级数的敛散性的判定	(156)
三、任意项级数敛散性的判定	(158)
四、数项级数敛散性的证明	(161)
五、利用收敛级数求极限	(163)
▶▶2 幂级数	(164)

<b>内容精讲</b>	(164)
<b>例题分析</b>	(166)
一、求幂级数的收敛半径及收敛域	(166)
二、求幂级数的和函数	(169)
三、求数项级数的和	(172)
四、函数展开为幂级数	(174)
五、经济中的应用	(175)

## 第六章 常微分方程与差分方程 (177)

<b>考点与要求</b>	(177)
▶▶1 常微分方程	(177)

<b>内容精讲</b>	(177)
一、几个基本概念	(177)
二、常见的一阶微分方程及其解法	(178)
三、二阶线性微分方程	(178)

<b>例题分析</b>	(180)
一、一阶微分方程的求解	(180)
二、二阶线性微分方程	(183)
三、可化为微分方程求解的问题	(186)
四、微分方程的应用	(189)

▶▶2 差分方程	(191)
----------	-------

<b>内容精讲</b>	(191)
一、差分的概念	(191)
二、一阶常数系数线性差分方程	(191)
<b>例题分析</b>	(191)

## 第二篇 线性代数

### 第一章 行列式 (195)

<b>考点与要求</b>	(195)
<b>内容精讲</b>	(195)
<b>例题分析</b>	(198)
一、数字型行列式的计算	(198)
二、抽象型行列式的计算	(205)
三、行列式 $ A $ 是否为零的判定	(207)
四、关于代数余子式求和	(208)

## 第二章 矩 阵 (210)

考点与要求 (210)

内容精讲 (210)

### ►►1 矩阵的概念及运算 (210)

一、矩阵的概念 (210)

二、矩阵的运算 (211)

三、矩阵的运算规则 (211)

四、特殊矩阵 (212)

### ►►2 可逆矩阵 (213)

一、可逆矩阵的概念 (213)

二、 $n$ 阶矩阵  $A$  可逆的充分必要条件 (213)

三、逆矩阵的运算性质 (213)

四、求逆矩阵的方法 (213)

### ►►3 初等变换、初等矩阵 (214)

一、定义 (214)

二、初等矩阵与初等变换的性质 (214)

### ►►4 矩阵的秩 (215)

一、矩阵秩的概念 (215)

二、矩阵秩的公式 (215)

### ►►5 分块矩阵 (215)

一、分块矩阵的概念 (215)

二、分块矩阵的运算 (216)

例题分析 (217)

一、矩阵的概念及运算 (217)

二、特殊矩阵的幂 (220)

三、伴随矩阵的相关问题 (223)

四、可逆矩阵的相关问题 (225)

五、初等变换、初等矩阵 (228)

六、矩阵秩的计算 (230)

## 第三章 向 量 (234)

考点与要求 (234)

内容精讲 (234)

### ►►1 $n$ 维向量的概念与运算 (234)

### ►►2 线性表出、线性相关 (234)

一、线性表出的概念 (235)

二、线性相关、线性无关的概念 (235)

三、线性表出、线性相关的重要定理 (235)

### ►►3 极大线性无关组、秩 (236)

一、极大线性无关组、向量组秩的概念 (236)

二、有关秩的定理 (236)

### ►►4 Schmidt 正交化、正交矩阵 (236)

一、Schmidt 正交化(正交规范化方法) (236)

二、正交矩阵 (237)

例题分析 (237)

一、线性相关的判别 (237)

二、向量的线性表示 (238)

三、线性相关与线性无关的证明 (240)

四、秩与极大线性无关组 (243)

五、正交化、正交矩阵 (245)

## 第四章 线性方程组 (247)

考点与要求 (247)

内容精讲 (247)

### ►►1 克拉默法则 (247)

### ►►2 齐次线性方程组 (248)

### ►►3 非齐次线性方程组 (249)

例题分析 (251)

一、线性方程组的基本概念题 (251)

二、线性方程组的求解 (254)

三、基础解系 (260)

四、 $Ax = 0$  的系数矩阵的行向量和解向量的关系,

由  $Ax = 0$  的基础解系反求  $A$  (261)

五、线性方程组中系数矩阵的列向量和解向量的

关系 (263)

六、两个方程组的公共解 (265)

七、同解方程组 (266)

八、线性方程组的有关杂题 (268)

## 第五章 特征值、特征向量、相似矩阵 (271)

考点与要求 (271)

内容精讲 (271)

### ►►1 特征值、特征向量 (271)

一、定义 .....	(271)
二、特征值的性质 .....	(271)
三、求特征值、特征向量的方法 .....	(271)
▶▶2 相似矩阵、矩阵的相似对角化 .....	(272)
一、定义 .....	(272)
二、矩阵可相似对角化的充分必要条件 .....	(272)
三、相似矩阵的性质及相似矩阵的必要条件 .....	(273)
▶▶3 实对称矩阵的相似对角化 .....	(273)
一、定义 .....	(273)
二、实对称阵的特征值,特征向量及相似对角化 .....	(273)
三、实对称矩阵正交相似于对角阵的步骤 .....	(273)
<b>例题分析</b> .....	(274)
一、特征值,特征向量的求法 .....	(274)
二、两个矩阵有相同的特征值的证明 .....	(278)
三、关于特征向量及其他给出特征值特征向量的方法 .....	(279)
四、矩阵是否相似于对角阵 .....	(280)
五、利用特征值、特征向量及相似矩阵确定参数 .....	(283)
六、由特征值、特征向量反求 $A$ .....	(283)
七、矩阵相似及相似标准形 .....	(284)
八、相似对角阵的应用 .....	(289)
<b>第六章 二次型</b> .....	(294)
<b>考点与要求</b> .....	(294)
<b>内容精讲</b> .....	(294)
▶▶1 二次型的定义、矩阵表示,合同矩阵 .....	(294)
一、二次型概念 .....	(294)
二、二次型的矩阵表示 .....	(294)
▶▶2 化二次型为标准形、规范形 合同二次型 .....	(295)
一、定义 .....	(295)
▶▶3 正定二次型、正定矩阵 .....	(297)

一、定义 .....	(297)
<b>例题分析</b> .....	(297)
一、二次型的矩阵表示 .....	(297)
二、化二次型为标准形、规范形 .....	(298)
三、合同矩阵、合同二次型 .....	(304)
四、正定性的判别 .....	(307)
五、正定二次型的证明 .....	(311)
六、综合杂题 .....	(313)

## 第三篇 概率论与数理统计

<b>第一章 随机事件与概率</b> .....	(319)
<b>考点与要求</b> .....	(319)
▶▶1 事件、样本空间、事件间的关系与运算 .....	(319)
<b>内容精讲</b> .....	(319)
<b>例题分析</b> .....	(321)
▶▶2 概率、条件概率、独立性和五大公式 .....	(323)
<b>内容精讲</b> .....	(323)
<b>例题分析</b> .....	(324)
▶▶3 古典概型与伯努利概型 .....	(329)
<b>内容精讲</b> .....	(329)
<b>例题分析</b> .....	(330)
<b>第二章 随机变量及其概率分布</b> .....	(333)
<b>考点与要求</b> .....	(333)
▶▶1 随机变量及其分布函数 .....	(333)
<b>内容精讲</b> .....	(333)
<b>例题分析</b> .....	(334)
▶▶2 离散型随机变量和连续型随机变量 .....	(335)
<b>内容精讲</b> .....	(335)
<b>例题分析</b> .....	(336)
▶▶3 常用分布 .....	(337)
<b>内容精讲</b> .....	(337)

例题分析	(340)
»4 随机变量函数的分布	(343)
内容精讲	(343)
例题分析	(344)
<b>第三章 多维随机变量及其分布</b>	(346)
考点与要求	(346)
»1 二维随机变量及其分布	(346)
内容精讲	(346)
例题分析	(348)
»2 随机变量的独立性	(353)
内容精讲	(353)
例题分析	(354)
»3 二维均匀分布和二维正态分布	(362)
内容精讲	(362)
例题分析	(363)
»4 两个随机变量函数 $Z = g(X, Y)$ 的分布	(365)
内容精讲	(365)
例题分析	(366)
<b>第四章 随机变量的数字特征</b>	(373)
考点与要求	(373)
»1 随机变量的数学期望和方差	(373)
内容精讲	(373)
例题分析	(375)
»2 矩、协方差和相关系数	(382)
内容精讲	(382)
例题分析	(383)

»3 切比雪夫不等式	(391)
内容精讲	(391)
例题分析	(391)
<b>第五章 大数定律和中心极限定理</b>	(393)
考点与要求	(393)
内容精讲	(393)
例题分析	(394)
<b>第六章 数理统计的基本概念</b>	(396)
考点与要求	(396)
»1 总体、样本、统计量和样本数字特征	(396)
内容精讲	(396)
例题分析	(397)
»2 常用统计抽样分布和正态总体的抽样分布	(399)
内容精讲	(399)
例题分析	(401)
<b>第七章 参数估计</b>	(406)
考点与要求	(406)
»1 点估计	(406)
内容精讲	(406)
例题分析	(406)
»2 估计量求法	(411)
内容精讲	(411)
例题分析	(412)

# 第1篇

## 微积分





# 第一章 函数 极限 连续

## 考点与要求

**理解** 函数的概念,复合函数及分段函数的概念,无穷小量的概念,函数连续性的概念(含左连续与右连续),闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理).

**了解** 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性,反函数及隐函数的概念,初等函数的概念,极限的概念,函数左、右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系,极限的性质,极限存在的两个准则;无穷大量的概念,连续函数的性质和初等函数的连续性.

**会** 建立应用问题的函数关系,判别函数间断点的类型,应用闭区间上连续函数的性质.

**掌握** 函数的表示方法,基本初等函数的性质及其图形,无穷小量的比较方法,极限的四则运算法则,利用两个重要极限求极限的方法.

## >> 1 函 数

### 内容精要

#### 一、函数的概念及表示方法

**1. 函数** 设  $x$  和  $y$  是两个实变量,  $D$  是一个给定的非空实数集, 如果对于任意  $x \in D$ , 按照一定的法则, 变量  $y$  总有唯一确定的值与之对应, 则称变量  $y$  是变量  $x$  的函数, 记作  $y = f(x)$ , 其中  $x$  称作自变量,  $y$  称作因变量,  $D$  称作函数  $y = f(x)$  的定义域, 函数值  $f(x)$  的全体所构成的集合称作函数  $f(x)$  的值域. 函数有公式法、表格法、图象法等表示方法.

要注意的是对于两个给定的函数, 当且仅当它们的定义域和对应法则都相同时, 才能说它们是相同的函数, 否则它们就是不同的函数.

**2. 邻域** 设  $\delta > 0$ , 实数集合  $U(x_0, \delta) = \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}$  称为点  $x_0$  的半径为  $\delta$  的邻域. 实数集合  $U(x_0, \delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}$  称为点  $x_0$  的半径为  $\delta$  的去心邻域. 相应地  $\{x \mid 0 < x - x_0 < \delta\}$  称为  $x_0$  的去心右邻域,  $\{x \mid -\delta < x - x_0 < 0\}$  称为  $x_0$  的去心左邻域.

#### 二、函数的性态

**1. 有界性** 设函数  $y = f(x)$  在区间  $I$  上有定义, 如果存在正数  $M$ , 对于任意  $x \in I$ , 恒有  $|f(x)| \leq M$ , 则称函数  $y = f(x)$  在区间  $I$  上有界; 否则称函数  $y = f(x)$  在  $I$  上无界. 如果存在数  $M_1$ , 对于任意  $x \in I$ , 恒有  $f(x) \leq M_1$ , 则称函数  $y = f(x)$  在区间  $I$  上有上界; 如果存在数  $M_2$ , 对于任意  $x \in I$ , 恒有  $f(x) \geq M_2$ , 则称函数  $y = f(x)$  在区间  $I$  上有下界. 显然, 函数  $f(x)$  在区间  $I$  上有界的充分必要条件是它在  $I$  上既有上界又有下界.



常见的在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界函数有  $\sin x, \cos x, \arctan x, \operatorname{arccot} x, \arcsin x, \arccos x$ .

**【注】** (1) 函数  $y = f(x)$  有界或无界是相对于某个区间而言的, 例如  $y = \frac{1}{x^2}$  在区间 $(0,$

1) 内无界, 但在区间 $[\frac{1}{4}, 1]$ 上是有界的. 如不指明区间, 那么是指在  $f(x)$  的定义域上.

(2) 无界函数和无穷大的区别: 在某一变化过程中, 若  $f(x)$  为无穷大, 则存在对应的区间使  $f(x)$  无界; 但是若  $f(x)$  在某个区间上无界, 则  $f(x)$  不一定为无穷大. 例如  $y = \frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$  在区间 $(0, 1]$ 上无界, 但函数不是  $x \rightarrow 0^+$  时的无穷大.

(3) 若函数  $y = f(x)$  在区间  $I$  上有界, 则  $f(x)$  的导函数和原函数在区间  $I$  上不一定有界. 例如  $y = \sqrt{x}$  在  $(0, 1]$  上有界, 但其导函数  $y = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  在  $(0, 1]$  上无界的;  $y = 1 - \sin x$  在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界,  $F(x) = x + \cos x$  是其原函数, 但它在 $(-\infty, +\infty)$ 上无界的.

**2. 单调性** 设函数  $f(x)$  在区间  $I$  上有定义, 如果对于任意  $x_1, x_2 \in I$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 恒有  $f(x_1) < f(x_2)$  (或  $f(x_1) > f(x_2)$ ), 则称函数  $y = f(x)$  在区间  $I$  上是单调增加 (或减少) 的.

**【注】** 若对任意  $x_1, x_2 \in I$ , 当  $x_1 < x_2$  时, 恒有  $f(x_1) \leq f(x_2)$  (或  $f(x_1) \geq f(x_2)$ ), 则称函数  $y = f(x)$  在区间  $I$  上是单调不减 (或不增) 的.

**3. 周期性** 设函数  $f(x)$  的定义域为  $D$ , 如果存在一个常数  $T > 0$ , 使得对于任一  $x \in D$ , 有  $x \pm T \in D$  且  $f(x+T) = f(x)$  恒成立, 则称  $f(x)$  为周期函数,  $T$  称为  $f(x)$  的周期. 通常 (如果存在) 把满足上式的最小正数  $T$  称为函数  $f(x)$  的最小正周期.

**4. 奇偶性** 设函数  $f(x)$  的定义域  $D$  关于原点对称, 如果对任意  $x \in D$ , 恒有  $f(-x) = f(x)$  (或  $f(-x) = -f(x)$ ), 则称函数  $f(x)$  为偶函数 (或奇函数). 偶函数的图形关于  $y$  轴对称, 奇函数的图形关于坐标原点对称.

**【注】** 若函数的定义域关于原点不对称, 则此函数必定既不是奇函数, 也不是偶函数.

### 三、几个与函数相关的概念

**1. 复合函数** 给定两个函数  $y = f(u), u = \varphi(x)$ , 如果  $u = \varphi(x)$  的值域与  $y = f(u)$  的定义域有非空交集, 则称函数  $y = f[\varphi(x)]$  为由  $y = f(u)$  及  $u = \varphi(x)$  而成的复合函数,  $u$  称为中间变量.

**【注】** 复合函数可多重复合, 如  $y = f[\varphi(\psi(x))]$  可看作是由  $y = f(u), u = \varphi(v)$  和  $v = \psi(x)$  复合而成.

**2. 反函数** 设函数  $y = f(x)$  的定义域为  $D$ , 值域为  $W$ . 若对  $\forall y \in W$ , 存在唯一确定的  $x \in D$ , 使得  $y = f(x)$ , 则得到  $x$  是  $y$  的函数, 记作  $x = f^{-1}(y)$ , 称为  $y = f(x)$  的反函数, 而  $y = f(x)$  称为直接函数, 习惯上将  $y = f(x)$  的反函数记为  $y = f^{-1}(x)$ .

**【注】** (1) 单调函数一定存在反函数.

(2) 反函数  $y = f^{-1}(x)$  与直接函数  $y = f(x)$  有相同的单调性.

(3) 函数  $y = f(x)$  的图象与函数  $x = f^{-1}(y)$  的图象重合, 但与函数  $y = f^{-1}(x)$  的图象关于直线  $y = x$  对称.

**3. 隐函数** 设有方程  $F(x, y) = 0$ , 若对  $\forall x \in D$ , 存在唯一确定的  $y$  满足  $F(x, y) = 0$ , 由此确定的  $y$  与  $x$  的函数关系  $y = y(x)$  称为由方程  $F(x, y) = 0$  所确定的隐函数.

**4. 分段函数** 在自变量的不同变化范围中, 对应法则用不同式子来表示的函数, 称为分段函数.