普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学同步练习指导

朱存斌 主编

中国工信出版集团
人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

普通高等教育“十三五”规划教材

高等数学同步练习指导

朱存斌 主编

人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

高等数学同步练习指导 / 朱存斌主编. -- 北京 :
人民邮电出版社, 2016.9
普通高等教育“十三五”规划教材
ISBN 978-7-115-32607-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①朱… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－
习题集 Ⅳ. ①013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第217446号

内容提要

本书是根据理工科类大学数学——高等数学教材基本要求和章节安排特点，充分吸取同类辅导参考书的精华，并结合多年的教学实践经验，针对当前大学生对学习大学数学时遇到的困难以及学习习惯而编写的。全书共12章，主要内容包括函数的极限与连续、一元函数的微分学及其应用、一元函数的积分学及其应用、常微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、多元函数积分学和无穷级数。每章分为内容提要、题型归纳和例题分析、同步练习题以及章节自测题并配有解答过程。

本书注重知识点的归纳和分析讲解，使之符合当前大学生认知学习习惯，更易于读者接受。同时本书精炼了主要题型，并加以归纳总结，内容从基本概念到知识点的延伸，注重知识点的连贯性，例题的多样性和练习题的丰富性、层次性，辅导读者在学习知识点的同时拓展视野，增强学习大学数学的兴趣。

本书可作为大学理工科类各专业“高等数学”课程的配套参考教材，也可以供考研学生复习参考。

◆ 主　　编　朱存斌
　责任编辑　王亚娜
　责任印制　焦志炜
◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路 11 号
　邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　大厂聚鑫印刷有限责任公司印刷
◆ 开本：787×1092　1/16
　印张：18　　　　　　2016 年 9 月第 1 版
　字数：432 千字　　　2016 年 9 月河北第 1 次印刷

定价：42.00 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315

前言

本书是编者从事“高等数学”教学多年实践经验的总结，在编写过程中编者参考了近年来国内外出版的多种同类辅导丛书，吸取它们的精华，根据自己多年教学实践经验加以优化，并结合理工科大学学生的实际需求编写。本书主要特点如下。

(1)循序渐进，突出重点。本书在内容编排上，紧密结合相应教材，在每章节内容提要中罗列出主要知识要点，便于基础概念学习。针对相应知识点配套典型例题分析，例题由浅入深，逐步拓展，同时加以归纳总结。引导读者融会贯通，避免题海式学习，培养学生学习大学数学的方法，激发其学习大学数学的兴趣，达到一劳永逸的效果。

(2)针对性强，帮助理解。高等数学概念的抽象性需要加强理解，一般“高等数学”课程都安排在大学第一学期开始学习，而大多数刚入学的大一新生习惯了初等数学学习的习惯，一般都需要一个适应的过程。为了帮助大一新生尽快适应高等数学的学习思维，本书有针对性地设置典型例题来分析讲解，帮助学生理解高等数学中抽象的概念，引入一些用几何意义来解题的例题。在保证知识体系完整性的同时，针对不同学生的需求，本书设置了不同难度的题型穿插其中，满足不同专业、学生的需求。

(3)题型多样，习题丰富。每章均设置了大量的例题分析讲解，帮助学生巩固知识点，同时每章节都安排了大量的同步练习题供学生训练，并配套详细解答。在习题编排上注重层次性，难易相宜，满足不同学生的需求。同时每章配有自测题供学生及时检查学习效果，拾遗补漏、自我检测。另外，本书还选取了部分考研题编入其中，以便学生提升能力和满足考研需求。

(4)归纳总结，拓展思维。针对每章知识点内容进行典型例题分析归纳总结，突出典型、提升素养、拓展思维，对一些经典题型进行详尽的分析总结，加强了知识点的理解和升华，使学生数学素养得到提升，解题思维得到拓展，通过解题技巧性的学习和训练，激发学生学习高等数学的兴趣。通过本书的使用学习能够把高等数学知识点扎实掌握，完成学业目标。

本书由安徽财经大学朱存斌编写和统稿。本书在编写和统稿的过程中得到了系部教师同仁和广大同学的支持和帮助，在编写初稿过程中得到各位同仁的宝贵建议，谨在此表示衷心的感谢！

编　者

2016 年 8 月

目录

第一章

函数与极限

一、内容提要

1. 函数的概念

(1) 函数的定义.
(2) 函数的特性:奇偶性、有界性、单调性、周期性.
(3) 函数的四则运算、复合函数、反函数.
(4) 基本初等函数、初等函数、分段函数.

2. 极限的概念

(1) 数列极限的概念.
(2) 函数极限的概念.
(3) 特殊极限:无穷小与无穷大的概念.

3. 极限存在准则与重要极限

(1) 单调有界准则.
(2) 夹逼准则.
(3) 3 个重要极限① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$,② $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$,③ $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

4. 极限的运算

(1) 无穷小运算法则.
(2) 无穷小与无穷大的关系.
(3) 无穷小与极限存在的关系.
(4) 极限的四则运算法则.
(5) 无穷小的比较.

二、题型归纳与例题分析

1. 有关函数概念的常见题型

(1) 求函数的定义域.
①初等函数的自然定义域.

②含有抽象复合函数的定义域.

③分段函数的定义域.

(2) 利用函数的变换解有关函数的问题或求函数的表达式.

(3) 求反函数.

【例 1】 求函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{(x+2)\ln(5-x^2)}$ 的定义域.

【解】 函数的自变量 x 必须同时满足以下不等式:

$$\begin{cases}4-x^2\geqslant 0\\(x+2)\ln(5-x^2)\neq 0,\\5-x^2>0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\leqslant x\leqslant 2\\x\neq -2,\text{且 } x\neq\pm 2,\\-\sqrt{5}<x<\sqrt{5}\end{cases}\text{解得}:-2<x<2,$$

故 $f(x)$ 的定义域为:$(-2,2)$.

【注】 求初等函数的定义域时,主要根据基本初等函数的定义域.当函数是复合函数时,要逐层列出有关等式或不等式;当函数由有限多个函数经四则运算得到时,其定义域为有限个函数定义域的交集.

【例 2】 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,2]$,试求下列函数的定义域.

(1) $f(1+2x)$; (2) $f(2+\sin x)$; (3) $f(e^{\ln x})$; (4) $f(x+a)+f(x-a)$.

【解】 (1) 由 $0\leqslant 1+2x\leqslant 2$ 知,$-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$,故 $f(1+2x)$ 的定义域为:$-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$.

(2) 由 $0\leqslant 2+\sin x\leqslant 2$ 知,$-1\leqslant\sin x\leqslant 0$, $\Rightarrow$ $2k\pi-\pi\leqslant x\leqslant 2k\pi(k\in Z)$,
故 $f(2+\sin x)$ 的定义域为:$\bigcup\limits_{k\in Z}[2k\pi-\pi,2k\pi]$.

(3) 由 $0\leqslant e^{\ln x}\leqslant 2$ 知,$-\infty<\ln x\leqslant\ln 2$, $\Rightarrow$ $0<x\leqslant 2$,
故 $f(e^{\ln x})$ 的定义域为:$0<x\leqslant 2$.

(4) 由 $\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 2\\0\leqslant x-a\leqslant 2\end{cases}$, $\Rightarrow$ $\begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 2-a\\a\leqslant x\leqslant 2+a\end{cases}$,

则有:①当 $a\leqslant 2-a$,即 $0<a\leqslant 1$ 时,函数的定义域为:$[a,2-a]$.

②当 $a>2-a$,即 $a>1$ 时,此时上述不等式组无解,故函数无定义.

【注 1】 复合函数的定义域的求法:内层函数的值域与外层函数的定义域交集上的内层函数的自变量取值范围,即复合函数的定义域.

【注 2】 该类题如按下方法求解是错误的.

因为 $0\leqslant x\leqslant 2$,所以 $1\leqslant 1+2x\leqslant 5$,故 $f(1+2x)$ 的定义域为:$[1,5]$.

【注 3】 当定义域与参数有关时,可能要对参数的取值范围进行讨论.

【例 3】 已知 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$,试求 $f(x)$.

【解】 方法一(变量替换法——一般性)

令 $t=x+\dfrac{1}{x}$,则 $x=\dfrac{1}{2}(t\pm\sqrt{t^2-4})$,将其代入已知条件中,得

$$f(t)=\left[\frac{1}{2}(t\pm\sqrt{t^2-4})\right]^2+1/\left[\frac{1}{2}(t\pm\sqrt{t^2-4})\right]^2=t^2-2.$$

所以, $$f(x)=x^2-2.$$

方法二(恒等变形法——特殊性)

$\because f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+2x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}-2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$,

$\therefore f(x)=x^2-2$.

【例 4】 已知 $f(x)=e^{x^2}$,$f[\varphi(x)]=1-x$,且 $\varphi(x)\geqslant 0$,求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域.

【解】 $\because f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}=1-x$,$\therefore \varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$.

由 $\ln(1-x)\geqslant 0$,知 $1-x\geqslant 1$,即 $x\leqslant 0$,故 $\varphi(x)$ 的定义域为:$(-\infty,0]$.

【注】 该题型是由已知复合函数的表达式,反过来求"中间变量"的表达式和定义域,关键是先写出 $f[\varphi(x)]$ 的一般形式.

【例 5】 设 $f(x)=\begin{cases}1+x & x<0\\ 1 & x\geqslant 0\end{cases}$,$g(x)=\begin{cases}x-1 & x<1\\ 0 & x\geqslant 1\end{cases}$. 试求复合函数 $f[g(x)]$.

【解】 $\because f[g(x)]=\begin{cases}1+g(x) & g(x)<0\\ 1 & g(x)\geqslant 0\end{cases}$,

$\therefore \begin{matrix}(1)\ 当\ x<1,g(x)=x-1<0,故\ f[g(x)]=x\\ (2)\ 当\ x\geqslant 1,g(x)=0,故\ f[g(x)]=1\end{matrix}$,

从而,
$$f[g(x)]=\begin{cases}x & x<1\\ 1 & x\geqslant 1\end{cases}.$$

【注】 求分段函数的复合函数时,除函数表达式用中间变量代替外,还要注意自变量的取值范围也要用中间变量代入,再确定复合函数的取值范围.

【例 6】 设函数 $f(x)=\begin{cases}1-2x^2 & x<-1\\ x^3 & -1\leqslant x\leqslant 2\\ 12x-16 & x>2\end{cases}$,求 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式.

【解】 令 $y=f(x)$,$\begin{matrix}(1)\ 当\ x<-1, & \Rightarrow y<-1, & 则\ x=-\sqrt{(1-y)/2}\\ (2)\ 当\ -1\leqslant x\leqslant 2, & \Rightarrow -1\leqslant y\leqslant 8, & 则\ x=\sqrt[3]{y}\\ (3)\ 当\ x>2, & \Rightarrow y>8, & 则\ x=\dfrac{1}{12}(y+16)\end{matrix}$,

故
$$g(x)=\begin{cases}-\sqrt{(1-x)/2} & x<-1\\ \sqrt[3]{x} & -1\leqslant x\leqslant 8\\ \dfrac{1}{12}(x+16) & x>8\end{cases}.$$

【注】 求分段函数的反函数时,应首先对每一分段区间求出对应的反函数,然后求出变量范围,最后再分段写出反函数的表达式.

2. 用定义证明函数的特性

【例 7】 试证:若函数 $f(x)$,$g(x)$ 具有相同的单调性,则复合函数 $f[g(x)]$ 必为单调增加函数.

【证明】 不妨设 $f(x)$,$g(x)$ 都是单调增函数,故以定义,当 $x_1<x_2$ 时,有 $g(x_1)<g(x_2)\Rightarrow f[g(x_1)]<f[g(x_2)]$. 从而 $f[g(x)]$ 为单调增加函数.

同理可证,$f(x)$,$g(x)$ 都是单调减函数时,$f[g(x)]$ 亦为单调增加函数.

【注】 类似可证，若函数 $f(x)$，$g(x)$ 具有相反的单调性，则复合函数 $f[g(x)]$ 必为单调减少函数．

【例 8】 已知函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内恒大于零，且当 $k>0$ 时，$f(x+k)=\dfrac{1}{f(x)}$．证明：$f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的周期函数．

【证明】 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，当 $k>0$ 时，$\because f[(x+k)+k]=\dfrac{1}{f(x+k)}=f(x)$，

即 $$f(x+2k)=f(x).$$

根据定义，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是周期函数，且 $2k$ 为其周期．

【例 9】 当 $x\neq 0$ 时 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf\left(\dfrac{1}{x}\right)=2x+\dfrac{3}{x}$，且 $f(0)=0$，$|a|\neq|b|$．证明：$f(x)$ 为奇函数．

【证明】 $$\because af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=2x+\frac{3}{x}, \tag{1}$$

$$af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=\frac{2}{x}+3x, \tag{2}$$

将(1)$\times a-$(2)$\times b$ 得

$$(a^2-b^2)f(x)=(2a-3b)x+(3a-2b)\frac{1}{x},$$

从而 $$f(x)=\frac{1}{a^2-b^2}\left[(2a-3b)x+(3a-2b)\frac{1}{x}\right].$$

$\because a^2-b^2\neq 0$，且 $2a-3b$，$3a-2b$ 不同时为零，又 $f(0)=0$，

$\therefore f(-x)=-\dfrac{1}{a^2-b^2}\left[(2a-3b)x+(3a-2b)\dfrac{1}{x}\right]=-f(x)$，

故 $f(x)$ 为奇函数．

【注】 要证 $f(x)$ 为奇函数，只要 $f(-x)=-f(x)$ 即可，为此关键先要找出函数 $f(x)$ 的表达式．

3. 极限的计算

【例 10】 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^n$．

【分析】 利用重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{f(n)}\right)^{f(n)}=\mathrm{e}$，$(f(n)\to\infty)$，需要把原题化成左式形式．

【解】 方法一 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^{\frac{n+2}{-1}\cdot\frac{-n}{n+2}}$$
$$=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{n+2}\right)^{\frac{n+2}{-1}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-n}{n+2}}=\mathrm{e}^{-1}.$$

方法二 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left[\left(1+\frac{2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}\right]^2}$$

$$=\frac{e}{e^2}=e^{-1}.$$

【例 11】 已知极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=4$，求常数 a．

【分析】 利用重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}=e,(\varphi(x)\to\infty)$，把已知极限化为重要极限形式，然后求出关于 a 的函数关系式．

【解】 因为 $4=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}}\right]^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-a}{x}\cdot 2a}=e^{2a}$，

即 $$e^{2a}=4\text{，所以 } a=\ln 2.$$

【例 12】 已知极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=2$，求常数 a,b．

【分析】 该类题型由已知极限值去确定式中常参量的值，通过直接计算即可导出一个方程组，再解之．

【解】 由 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=2\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-a)x^2-(a+b)x-b}{x+1}=2$，

因为极限存在，所以有

$$\begin{cases}1-a=0\\a+b=-2\end{cases},\qquad \text{从而}\begin{cases}a=1\\b=-3\end{cases}.$$

【例 13】 求下列极限．

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}$．　(2) 设 $x_1=\sqrt{2}$，$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}\,(n\geqslant 1)$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$．

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)$．

【解】 (1) 利用夹逼准则．

$\because 3<(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}<(3^n+3^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3\cdot 3^{\frac{1}{n}}$，

而 $\lim\limits_{n\to\infty}3=\lim\limits_{n\to\infty}3\cdot 3^{\frac{1}{n}}=3$，故由夹逼准则得：$\lim\limits_{n\to\infty}(1+2^n+3^n)^{\frac{1}{n}}=3$.

(2) 方法一(利用单调有界准则)

先证单调性：

$\because x_1=\sqrt{2}>0$；$\therefore x_2=\sqrt{2+x_1}>\sqrt{2}=x_1$；$x_3=\sqrt{2+x_2}>\sqrt{2+x_1}=x_2$；

$x_4=\sqrt{2+x_3}>\sqrt{2+x_2}=x_3$；…；

$\Rightarrow x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}>\sqrt{2+x_{n-1}}=x_n\ (n=2,3,4,\cdots)$.

从而 $\{x_n\}$ 单调增加．

再证明 $\{x_n\}$ 的有界性：

$\because x_1=\sqrt{2}<2$；$\therefore x_2=\sqrt{2+x_1}<\sqrt{2+2}=2$；$x_3=\sqrt{2+x_2}<\sqrt{2+2}=2$；

$x_4=\sqrt{2+x_3}<\sqrt{2+2}=2$；…； $\Rightarrow x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}>\sqrt{2+2}=2\,(n=2,3,4,\cdots)$.

从而，$\{x_n\}$ 对一切的自然数 n 都有 $x_n<2$，即 $\{x_n\}$ 有界；

根据单调有界准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在．

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则由 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$ 两边取极限得：$a=\sqrt{2+a}$，

解得：$a=2$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

方法二（利用数列的特征）

$\because\ x_1=\sqrt{2}=2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=2\cos\dfrac{\pi}{2^2}, x_2=\sqrt{2+x_1}=\sqrt{2\left(1+\cos\dfrac{\pi}{2^2}\right)}=2\cos\dfrac{\pi}{2^3},\cdots,$

$\Rightarrow\ x_n=2\cos\dfrac{\pi}{2^{n-1}}$，由此取极限得：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{\pi}{2^{n-1}}=2.$

【注】 利用解方程的技巧求递推型数列极限的方法，其前提是极限要存在，忽略这一点往往会导致错误的结论，例如，$x_n=2^n$，则 $x_n=2x_{n-1}$，如果设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，两边取极限得：$a=2a$，由此解得 $a=0$，该结论与 $\lim\limits_{n\to\infty}2^n$ 不存在矛盾.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\dfrac{3}{n^2+3}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)$

$\because\ \dfrac{k}{n^2+n}\leqslant\dfrac{k}{n^2+k}\leqslant\dfrac{k}{n^2+1}(k=1,2,\cdots,n)$，

$\therefore\ \dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}\leqslant\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2}+\dfrac{3}{n^2+3}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n}\right)\leqslant\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}.$

又 $\because\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+n)}=\dfrac{1}{2}$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+\cdots+n}{n^2+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+1)}=\dfrac{1}{2}$，

所以由夹逼准则知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2}+\frac{3}{n^2+3}+\cdots+\frac{n}{n^2+n}\right)=\frac{1}{2}.$$

【注】 在运用夹逼准则时，关键是找到一个放缩对象 $\{y_n\}$ 和放大对象 $\{z_n\}$，且满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n$.

【例 14】 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1})$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)})$.

【解】 (1) $\because\ \lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n})$ “$\infty-\infty$”型

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}\text{（分子、分母有理化）“}\frac{\infty}{\infty}\text{”型}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}\text{（分子、分母消除无穷大）}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}}=1.$$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)})$ “$\infty-\infty$”型

【分析】 该题与(1)同为“$\infty-\infty$”型，但先要把根号里的和求出来，再利用有理化方法.

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}+\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}}+\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+0}+\sqrt{\frac{1}{2}-0}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

【例 15】 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x-1}\sin\frac{1}{x}$.

【解】 方法一(做倒代换)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x-1}\sin\frac{1}{x}\ \text{“}\infty\cdot 0\text{”型}$$

$$\xlongequal{\text{令}x=\frac{1}{t}}\lim_{t\to 0}\frac{2+t^2}{t-t^2}\sin t=\lim_{t\to 0}\frac{2+t^2}{1-t}\frac{\sin t}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{2+t^2}{1-t}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=2\cdot 1=2.$$

方法二(做等价无穷小替换)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x-1}\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x-1}\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+1}{x^2-x}\ \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”型}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}(\text{分子、分母消除无穷大量})=\frac{2+0}{1-0}=2.$$

【例 16】 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}$.　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})\cdots(1+x^{2^n})]$, $(|x|<1)$.

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right]$.

【解】 (1) 利用夹逼准则

$\because 0<\frac{n!}{n^n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n}{n}<\frac{2}{n}$,又 $\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$,

由夹逼准则,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

(2)利用:$1-\frac{1}{k^2}=\frac{k^2-1}{k^2}=\frac{k-1}{k}\cdot\frac{k+1}{k}(k=1,2,3,\cdots)$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n+1}{n}\right),$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}.$$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})\cdots(1+x^{2^n})]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^{2^2})\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^{2^2})\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^{2^2})(1+x^{2^2})\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^{2^2})(1+x^{2^2})\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}=\cdots$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\frac{1}{1-x}\ (其中\ |x|<1).$$

(4) $\because \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{1}{\sin\frac{x}{2^n}}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\cdot\sin\frac{x}{2^n}$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{x}{2^n}}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cdot\sin\frac{x}{2^{n-1}}$$

$$=\frac{1}{2^2\sin\frac{x}{2^n}}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{2-2}}\cdot\sin\frac{x}{2^{n-2}}$$

$$=\frac{1}{2^3\sin\frac{x}{2^n}}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^{2-3}}\cdot\sin\frac{x}{2^{n-3}}=\cdots=\frac{1}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\sin x\ ,$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left[\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\sin x=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\cdot\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin x}{x}.$$

4. 函数连续性与间断点

【例 17】 设 $f(x)=\begin{cases}a+x^2 & x\leqslant 0\\ \frac{\sin x}{x} & x>0\end{cases}$,在 $x=0$ 处连续,求常数 a.

【分析】 有关分段函数在分段点处连续问题,利用

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A,\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A.$$

【解】 $\because \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(a+x^2)=a=f(0)$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=1.$

要使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,必须有 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$,故 $a=1$.

【例 18】 设 $f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ \frac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1} & x\neq 0\end{cases}$,判断 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续性,若不连续,指出间断点类型.

【解】 $\because \lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1}=-1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{1/x}-1}{e^{1/x}+1}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1-e^{-1/x}}{1+e^{-1/x}}=1.$

$\therefore$可确定 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续,且 $x=0$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点中的跳跃间断点.

5. 闭区间上连续函数零点定理有关题型

【例 19】 证明:方程 $2^x x=1$ 至少存在一个小于 1 的正根.

【证明】 令 $F(x)=2^x x-1$,取区间 $[0,1]$,显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续.

$$\text{又 } F(0)=-1<0, F(1)=1>0,$$

由闭区间连续函数的零点存在定理知:至少 $\exists \xi \in (0,1), st F(\xi)=0$,

亦即方程 $2^x x=1$ 至少存在一个小于 1 的正根.

【注】 该类题型通常都转化为一个函数(辅助函数)在要求的区间内是否有零点问题. 方法步骤如下.

第一步:将原方程化为 $F(x)=0$(称标准化),则辅助函数就可以取 $F(x)$.

第二步:根据题目要求认定取值区间.

第三步:验证 $F(x)$ 在认定区间上满足零点定理的条件.

【例 20】 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)>a, f(b)<b$.

证明:存在一点 $\xi \in (a,b)$,使得 $f(\xi)=\xi$.

【证明】 令 $F(x)=f(x)-x$,取区间 $[a,b]$,显然 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

又 $F(a)=f(a)-a>0, F(b)=f(b)-b<0$,

由闭区间连续函数的零点存在定理知:至少 $\exists \xi \in (a,b), st F(\xi)=0$,

亦 $f(\xi)-\xi=0$,即:$\exists \xi \in (a,b), st f(\xi)=\xi$.

【注】 该类题型通常构造辅助函数在要求的区间内是否有零点问题. 方法步骤如下.

第一步:将要证结论化为 $f(\xi)-\xi=0$(称标准化),将要证结论标准化等式左边表达式中所有 ξ 换成 x,即 $f(x)-x$,则辅助函数就取 $F(x)=f(x)-x$.

第二步:根据题目要求认定取值区间.

第三步:验证 $F(x)$ 在认定区间内存在零点,从而得出所证结论.

【例 21】 若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续,$a<x_1<x_2<x_3<b$,则

$$\exists \xi \in (a,b), st f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}.$$

【分析】 利用连续函数的介值定理.

【证明】 因为 $f(x)$ 在 $[x_1,x_3]$ 上连续,由闭区间上连续函数最值定理,必存在最大值 M 和最小值 m,则

$$m \leqslant f(x_i) \leqslant M,(i=1,2,3).$$

从而有
$$m \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3} \leqslant M,$$

由闭区间连续函数的介值定理知 $\exists \xi \in [x_1,x_3] \subset (a,b)$,

使得
$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}.$$

【例 22】 证明在开区间 $(0,2)$ 内至少存在一点 x_0,使得 $e^{x_0}-2=x_0$.

【证】 构造辅助函数 $F(x)=e^x-2-x$,则 $F(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续,且

$$F(0)=e^0-2-0=-1<0, F(2)=e^2-2-2=e^2-4>0.$$

由闭区间上连续函数的零点定理知:至少存在一点 $x_0 \in (0,2)$,使得 $F(x_0)=0$.

即 $$e^{x_0}-2-x_0=0\text{，亦即 }e^{x_0}-2=x_0.$$

【例 23】 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

【分析】 该题是典型的"$\dfrac{0}{0}$"型，包含重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，常用等价无穷小有．

$$\sin x\sim x,\tan x\sim x,1-\cos x\sim\frac{x^2}{2},e^x-1\sim x.$$

【解】 方法一：
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x\cdot\sin^3 x}\\&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin^2 x}\right)\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

方法二：
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}&=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2/2}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

【注】 在利用等价无穷小替换时，只有当无穷小因子与整个要求极限是乘积或商的关系时才能利用等价替换．

如该题若：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{0}{x^3}=0$ 是错误的．

【例 24】 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$.

【解】 方法一(分子、分母有理化)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

方法二(恒等变形)

$\because$ $\sqrt{x}=e^{\ln\sqrt{x}}=e^{\frac{1}{2}\ln x}$，$\sqrt[3]{x}=e^{\ln\sqrt[3]{x}}=e^{\frac{1}{3}\ln x}$，当 $x\to 0$ 时，$e^x-1\sim x$，

$$\therefore\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{e^{\frac{1}{3}\ln x}-1}{e^{\frac{1}{2}\ln x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{3}\ln x}{\frac{1}{2}\ln x}=\frac{2}{3}.$$

方法三(最小公倍数替换)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}\xlongequal{令t=\sqrt[6]{x}}\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t^3-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t+1}{t^2+t+1}=\frac{2}{3}.$$

【例 25】 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+2x^2\cos(1/x)}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

【分析】 有时候在求极限时,可以把所求极限看成是若干个极限的乘积或商,若每一个乘积或商的极限均存在,我们可以先一部分求出极限,再求剩下部分极限.

【解】 $\because \lim\limits_{x\to 0}(1+\cos x)=2$,

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sin x+2x^2\cos(1/x)}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+2x^2\cos(1/x)}{2\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+2x^2\cos(1/x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}+\lim_{x\to 0}\frac{2x^2\cos(1/x)}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}+\lim_{x\to 0}x\cos(1/x)=\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}.$$

【例 26】 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$. "$\infty\cdot 0$ 型"

【解】 方法一(部分有理化)

$$\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}+1}=\frac{1}{2}.$$

方法二(倒代换)

$$\lim_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)\xlongequal{令x=\frac{1}{t}}\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{1+t^2}+t}=\frac{1}{2}.$$

【例 27】 已知极限 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=5$,试求常数 a,b 的值.

【解】 由 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=5$ 存在,且分母 $x-1$ 当 $x\to 1$ 时为无穷小,则分子一定为无穷小,

即 $$\lim_{x\to 1}(x^2+ax+b)=0,故\ a=-(1+b).$$

从而有 $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax+b}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-(1+b)x+b}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-b)=1-b.$$

故 $$1-b=5,于是\ b=-4,a=3.$$

【例 28】 当 $x\to 0$ 时,$f(x)=\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是( ).

A. 无穷小　　B. 无界的,但不是无穷大量

C. 无穷大　　D. 有界的,但不是无穷小量

【分析】 要正确选出答案,关键要弄清楚无穷大量与无界变量之间的区别:

(1) 无界变量不一定是无穷大量.

(2) 无穷大量一定是无界变量.

若取 $x_{1n}=\dfrac{1}{n\pi}$,则 $f(x_{1n})=\dfrac{1}{x_{1n}^2}\sin\dfrac{1}{x_{1n}}=(n\pi)^2\sin n\pi=0$.

取 $x_{2n}=\dfrac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)}$,则 $f(x_{2n})=\dfrac{1}{x_{2n}^2}\sin\dfrac{1}{x_{2n}}$

$$=\left(2n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)$$
$$=\left(2n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2\ (n=1,2,3,\cdots)$$

因此,当 $n\to\infty$ 时,有 $x_{1n}\to 0$,$x_{2n}\to\infty$,但变量 $f(x)$ 或等于0或趋于$+\infty$,这表明当 $x\to 0$ 时,$f(x)$ 是无界的,但不是无穷大,故B项为正确答案.

三、同步练习题

(一) 填空题

1. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,1]$,则 $f(\sqrt{1-x^2})$ 的定义域为________.

2. 已知 $f(x)=\sin x$,$f[\varphi(x)]=1-x^2$,则 $\varphi(x)=$________.

3. 已知 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$,若 $0<a<\dfrac{1}{2}$,则 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域为________.

4. 已知 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\leqslant 0\\ x^2+x & x>0\end{cases}$,则 $f(-x)=$________.

5. 设 $f(x)=a^x\ (a>0,a\neq 1)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=$________.

6. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+2a}\right)^x=8$,则 $a=$________.

7. 函数 $y=2\arcsin\dfrac{x}{3}$ 的反函数为________.

8. 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$,在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,则 $a=$________.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 2x}-1}{\ln(1+3x)}=$________.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+2}{2x-1}+\dfrac{x-1}{x^2}\sin x\right)=$________.

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^{2n}=$________.

12. $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\sin x)^{\frac{2}{x}}=$________.

13. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^4+2n+3}-n^2)(n+4)=$________.

14. 若 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+a}{x-2}=b$,则 $a=$________.

15. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+2x+3}-x)=$________.

(二) 单项选择题

1. 当 $x\to 0$ 时,$2^{\frac{1}{x}}$ 的极限是( ).

A. 0　　B. ∞　　C. 1　　D. 不存在