重点大学自主招生
数学备考用书

Mathematics | 甘志国　编著

中国科学技术大学出版社

重点大学自主招生
数学备考用书

athematics

甘志国　编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书是重点大学自主招生数学备考用书，共包含五个部分（含 74 个专题）：讲座精选（10 个专题）、推广加强（30 个专题）、试题集锦（17 个专题）、真题再现（17 个专题）、备考面试. 本书对重点大学自主招生数学科目中的重点、难点进行了归纳、总结，涵盖面广，可使考生深入理解数学概念和基本原理，灵活运用解题方法，较大程度地提升学生在自主招生考试中的应试能力. 试题集锦部分中的题目较多（虽说都是精选出来的好题，但考生不必全做），旨在让考生备考时有挑选的余地. 本书也可作为普通高考和数学竞赛方面的备考用书，教师（教练）亦可参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

重点大学自主招生数学备考用书/甘志国编著. —合肥：中国科学技术大学出版社，2016. 1
ISBN 978-7-312-03770-2

Ⅰ. 重…　Ⅱ. 甘…　Ⅲ. 中学数学课—高中—升学参考资料　Ⅳ. G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 257709 号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
http://press. ustc. edu. cn
http://shop109383220. taobao. com
印刷　合肥学苑印务有限公司
发行　中国科学技术大学出版社
经销　全国新华书店
开本　787 mm×1092 mm　1/16
印张　31. 5
字数　806 千
版次　2016 年 1 月第 1 版
印次　2016 年 1 月第 1 次印刷
定价　63. 00 元

作 者 简 介

甘志国(1972～),笔名甘喆.湖北竹溪人,民进会员,研究生学历,特级教师、湖北名师、政府专项津贴专家,《中学数学》、《高中数理化》等杂志封面、封底人物.中国数学会会员,全国初等数学研究会常务理事,《中学数学教学参考》、《中学数学》、《学数学》、《新高考》等刊书报的编委、特约编辑,人民教育出版社课程教材研究所“十二五”课题(课题批准号KC 2014—015)核心成员.近五年在公开发行的期刊上发表近两百篇论文并产生较大影响.在哈尔滨工业大学出版社出版《初等数学研究(Ⅰ)》、《教材教法》、《自主招生》、《高考压轴题》等14册图书(总计650万字),在浙江大学出版社出版《高中数学经典题选·三角函数与平面向量》,在清华大学出版社出版《高考数学真题解密》,即将在哈尔滨工业大学出版社出版《高中数学题典》(9册).培养多名学生考入清华、北大等名校和在全国高中数学联赛中荣获一等奖.个人小传曾载入《中国当代教育名人名家大辞典》(中国科学技术出版社,1999)等多部典籍.现任教于北京市示范高中北京丰台二中,并在全校主讲过“大学自主招生数学课程”.

大学数学自主招生概况及试题特点

（代序）

为进一步深化高等学校招生录取制度改革、扩大高等学校招生自主权，教育部于2003年在北京大学、中国人民大学、清华大学等23所大学进行了大学招生自主选拔录取的改革试点，而后大学自主招生规模逐年扩大. 到了2008年，上海的两所顶尖大学——复旦大学、上海交通大学在上海等地区通过自主招生录取的人数首次超过统一高考录取的人数.

2014年，自主招生试点大学共有90所，招生人数约占试点大学招生总数的5%. 2014年选拔录取了2.3万人，其中绝大部分是顶尖大学. 在全国116所"211工程"院校（有4所是两个校区）中，已经有80所（占69%）参与到自主招生中；在39所"985工程"大学（第一期34所，第二期5所，不包括第三期的部分专业是985平台的5所）中只有中国人民大学（在2014年因故停止）、中国农业大学、国防科技大学、中央民族大学没有参加自主招生，自主招生大学占90%. 这些自主招生大学除了"单飞"，就是参加了"三大"（"北约"、"华约"、"卓越"）"一小"（"京都"）的四联盟.

"北约"联盟成员（11所）（按国家院校代码从小到大为序，下同）：北京大学（含医学部）、北京航空航天大学、北京师范大学、厦门大学、山东大学、武汉大学、华中科技大学、中山大学、四川大学、兰州大学、香港大学. 南开大学、复旦大学是2011年联盟成员，2012年退出.

"华约"联盟成员（6所）：上海交通大学、清华大学、中国科学技术大学、西安交通大学、南京大学、浙江大学. 另有中国人民大学于2014年因故退出.

"卓越"联盟成员（9所）：天津大学、同济大学、北京理工大学、重庆大学、大连理工大学、东南大学、哈尔滨工业大学、华南理工大学、西北工业大学.

"京都"联盟成员（5所）：北京邮电大学、北京交通大学、北京林业大学、北京化工大学、北京科技大学.

一般来说，四联盟的数学笔试试题难度渐升的顺序依次是"京都"、"北约"、"卓越"、"华约".

下面对三大联盟及复旦大学的数学笔试试题特点予以简述：

（1）"北约"的数学笔试，总的来说比较容易，试题更加关注基础知识和基本技能. 从内容上看，不追求对高中知识的全覆盖，重点为方程、不等式、数列、函数、平面几何、解析几何等. 一般来说，每题只有一问（不像高考题设置多问）. 当然，也不能说试题没有难度，大部分试题都达到了普通高考试题中后两道大题的难度.

（2）"华约"的自主选拔采用GSI模式，包括"华约"通用科目笔试（General Exam，简称G考）、各校特色测试（Special Exam，简称S考）、各校面试（Interview，简称I考）.

"华约"通用科目测试，中文名称为"高水平大学自主选拔学业能力测试"，英文名称为"Advanced Assessment for Admission"，简称"AAA测试". AAA测试是由"华约"联盟共同组织的高中毕业生学业能力测试.

一般来说，"华约"的数学笔试试题在难度和创新程度上均比普通高考试题高，部分试题

有竞赛特征.在内容上主要涉及三角、函数、数列、复数、概率、立体几何、解析几何、平面几何、组合问题等,以检测考生的创新潜质和学习能力为目标,突出对逻辑思维、运算变形、空间想象、综合创新等能力的考查.

(3)“卓越”成员均是工科特色鲜明的“985 工程”大学,所以其命题理念必定切合卓越人才的培养目标.从试题结构上看类似华约,10 道选择题,5 道解答题.考试内容一般不会超过高中所学内容,重点涉及概率、解析几何、三角、函数、数列、平面几何等.试题的题型、风格均类似于普通高考,但难度明显增加.

(4)“复旦水平测试”是一场高中文化课程综合知识的笔试,测试内容涵盖高中语文、数学、英语、政治、历史、地理、物理、化学、生物和计算机共 10 个科目,共计 200 道选择题,满分 1000 分(所以俗称复旦“千分考”)(每题答对得 5 分,不答得 0 分,答错扣 2 分),考试时间为 3 小时.

这样设置主要基于两个原因:一是保证进入大学的学生保质保量地接受过完整的高中教育;二是复旦大学的人才培养推行“通识教育”,要求学生有较宽的知识面.

复旦“千分考”更多关注学生是否具有知识的深厚积淀,命题一般不超过中学所学内容,以考查基础为主,不设题库.虽然试题难度不在于某一科、某一题上,而在于考十门、考综合、考基础,但就数学学科来说,试题难度确实要高于普通高考.数学试题 32 道,一般是第 113~144 题.

相对于全国普通高考来说,大学自主招生属新生事物.大凡新生事物,多欠完备,却是发展的机遇.

2014 年 9 月 3 日公布的《国务院关于深化考试招生制度改革的实施意见》对大学自主招生政策有所调整,规定从 2015 年起推行自主招生安排在全国统一高考后进行.

教育部于 2014 年 12 月 10 日发布的《关于进一步完善和规范大学自主招生试点工作的意见》进一步明确要求:从 2015 年起,所有试点大学自主招生考核统一安排在高考结束后、高考成绩公布前进行.该《意见》还指出:大学自主招生是我国大学考试招生制度的有机组成部分,是对现行统一高考招生录取的一种补充,主要选拔具有学科特长和创新潜质的优秀学生,促进科学选才,尊重教育规律和人才成长规律,通过科学有效途径选拔特殊人才.

所以参加自主招生对于大学和考生来说,是个双赢的过程.考生要想如愿考上顶尖名校,参加自主招生是一条捷径.笔者认为,大学自主招生会持续高热.《周易》曰:君子见机而作,不俟终日!

至此,读者可能对自主招生试题有了一些了解,希望你提前做好规划、及时行动、充分应变,并在做中体味、修正、总结、提高.

祝你成功!

在本书出版之际,作者要感谢中国科学院张景中院士、武汉大学原校长齐明友教授、北京师范大学王世强教授、华中师范大学毛经中教授、曲阜师范大学李吉宝教授、广东连平县忠信中学严文兰老师、浙江余姚市三中朱世杰老师、上海市南洋中学耿亮老师对作者在初等数学研究方面的指导、勉励和无私帮助!感谢养育我成长的父亲甘武关、母亲袁秀芬及太太张琳、儿子甘超一对我生活的体贴照料,你们辛苦多多!表扬我近年执教的曲云鹏(2015 年高考总分 689 分,数学 144 分)、陈朝鹏(2015 年高考总分 687 分,数学 146 分)、刘殊睿(2015

年高考总分 681 分,数学 133 分)、王金宇(2015 年高考总分 674 分,数学 143 分)、刘家桐(2015 年高考总分 672 分,数学 140 分)、王相谋(2015 年高考总分 671 分,数学 136 分)、刘雨珂(2015 年高考总分 646 分,数学 142 分)等一大批学子,他们酷爱数学、各科成绩优异、品学兼优,一直支持着作者的教学工作.

甘志国

2015 年 7 月 1 日于北京

目　　录

讲座精选

推广加强

试 题 集 锦

真题再现

备考面试

- 讲 座 精 选 -

求解根式问题

题 1 （2007 年全国高中数学联赛甘肃赛区预赛第 4 题）若 $x,y\geqslant 1$，且 $\sqrt[n]{x-1}+\sqrt[n]{y-1}\leqslant 2$，则（　　）.

A. $x\geqslant y$　　B. $x\leqslant y$　　C. $x+y\geqslant xy$　　D. $x+y\leqslant xy$

解 C. 设 $a=\sqrt[n]{x-1}$，$b=\sqrt[n]{y-1}$，得 $x=a^n+1$，$y=b^n+1$，所以

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}=\frac{\sqrt[n]{x-1}+\sqrt[n]{y-1}}{2}\leqslant 1,\quad a^nb^n\leqslant 1$$

由此，得

$$x+y-xy=a^n+1+b^n+1-(1+a^n+b^n+a^nb^n)\geqslant 0$$
$$x+y\geqslant xy$$

题 2 （上海交通大学 2008 年冬令营数学试题第一题第 6 小题）若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\dfrac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$，则这个数列的前 99 项之和 $S_{99}=$______.

解 $\dfrac{9}{10}$. 可得 $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$.

题 3 （2005 年复旦大学自主招生数学试题第一题第 5 小题）$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-n-1})=$______.

解 1. 先分子有理化.

题 4 （上海交通大学 2005 年保送、推优生数学试题第一题第 5 小题）若有理数 x,y 满足 $\sqrt{2\sqrt{3}-3}=\sqrt{x\sqrt{3}}-\sqrt{y\sqrt{3}}$，则 $(x,y)=$______.

解 $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right)$. 先得 $x>y\geqslant 0$. 将已知式平方后，可得 $x+y-2=2\sqrt{xy}-\sqrt{3}$.

由 $x,y\in\mathbf{Q}$，得 $\sqrt{xy}\notin\mathbf{Q}$. 把所得式平方，得 $4xy+3-(x+y-2)^2=4\sqrt{3xy}$，所以可设 $\sqrt{3xy}=3m$，$\sqrt{xy}=\sqrt{3}m(m\in\mathbf{Q})$，得 $x+y-2=(2m-1)\sqrt{3}$，所以 $x+y-2=2m-1=0$，得 $x=\dfrac{3}{2}$，$y=\dfrac{1}{2}$.

题 5 （2007 年上海市高中竞赛试题（新知杯）数学试卷第 1 题）方程 $\sqrt{x_1-1}+2\sqrt{x_2-4}+3\sqrt{x_3-9}=\dfrac{1}{2}(x_1+x_2+x_3)$ 的实数解 $(x_1,x_2,x_3)=$________.

解 (2,8,18). 原方程可变形为

$$(\sqrt{x_1-1}-1)^2+(\sqrt{x_2-4}-2)^2+(\sqrt{x_3-9}-3)^2=0$$

进而可得答案.

题 6 (1) 函数 $y=2x-3+\sqrt{x^2-12}$ 的值域是________.

(2) （2001 年全国高中数学联赛第 11 题）函数 $y=x+\sqrt{x^2-3x+2}$ 的值域为________.

解 (1) $(-\infty,-9]\cup[4\sqrt{3}-3,+\infty)$. 用导数可求.

(2) 用导数可求得答案为$\left[1,\frac{3}{2}\right)\cup[2,+\infty)$.

题 7 若 $f(x)=x^6-2\sqrt{2006}x^5-x^4+x^3-2\sqrt{2007}x^2+2x-\sqrt{2006}$,则 $f(\sqrt{2006}+\sqrt{2007})=$________.

解 $\sqrt{2007}$.设 $a=\sqrt{2007}+\sqrt{2006}$,$b=\sqrt{2007}-\sqrt{2006}$,得 $ab=1$,所以

$$a^6-2\sqrt{2006}a^5-a^4=a^5(a-2\sqrt{2006})-a^4=a^4\cdot ab-a^4=a^4-a^4=0$$

$$\begin{aligned}a^3-2\sqrt{2007}a^2+2a-\sqrt{2006}&=a^2(a-2\sqrt{2007})+2a-\sqrt{2006}\\&=aa\cdot(-b)+2a-\sqrt{2006}=-a+2a-\sqrt{2006}\\&=\sqrt{2007}\end{aligned}$$

所以

$$f(a)=0+\sqrt{2007}=\sqrt{2007}$$

题 8 (2009 年清华大学自主招生数学试题(理科)第 1 题)设$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$的整数部分为 a,小数部分为 b.(1) 求 a,b;(2) 求 $a^2+b^2+\frac{ab}{2}$;(3) 求$\lim\limits_{n\to\infty}(b+b^2+\cdots+b^n)$.

解 (1) $a=2,b=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.(2) 5.(3) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

题 9 (上海交通大学 2000 年本硕连读试题第一题第 5 小题)求函数 $y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$ $(x\in\mathbf{R})$的反函数.

解 由恒等式$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$,可得

$$\begin{aligned}y=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}\quad(x\in\mathbf{R})&\Leftrightarrow y^3=2x-3y\quad(x\in\mathbf{R})\\&\Leftrightarrow x=\frac{y^3+3y}{2}\quad(y\in\mathbf{R})\end{aligned}$$

所以,所求反函数为 $y=\frac{x^3+3x}{2}(x\in\mathbf{R})$.

题 10 (2003 年全国高中数学联赛第一题第 13 小题)设$\frac{3}{2}\leqslant x\leqslant 5$,求证 $2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}<2\sqrt{19}$.

解 可证结论:当 $a,b,c,d\in\mathbf{R}_+$时,$a+b+c+d\leqslant 2\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$(当且仅当 $a=b=c=d$ 时取等号).所以 $2\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-3}+\sqrt{15-3x}\leqslant 2\sqrt{x+14}\leqslant 2\sqrt{19}$,由此可得欲证.

题 11 (1993~1994 年全俄中学生数学奥林匹克试题)证明:若$(x+\sqrt{x^2+1})(y+\sqrt{y^2+1})=1$,则 $x+y=0$.

解 由题设,得

$$x+\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}=\sqrt{y^2+1}-y$$

$$x+y=\sqrt{y^2+1}-\sqrt{x^2+1}=\frac{(y+x)(y-x)}{\sqrt{y^2+1}+\sqrt{x^2+1}}$$

$$(x+y)\left(\frac{y-x}{\sqrt{y^2+1}+\sqrt{x^2+1}}-1\right)=0$$

由 $\sqrt{y^2+1}+\sqrt{x^2+1}>|y|+|x|\geqslant y-x$,得 $\frac{y-x}{\sqrt{y^2+1}+\sqrt{x^2+1}}-1<0$,所以 $x+y=0$.

题 12 已知 $a,x,y\in\mathbf{R}$,且 $x\sqrt{a(x-a)}+y\sqrt{a(y-a)}=\sqrt{|\lg(x-a)-\lg(a-y)|}$,求代数式 $\frac{3x^2+xy-y^2}{x^2-xy+y^2}$ 的值.

解 由 $x-a>0,y-a>0$,得 $(x-a)(a-y)<0$.

由 $a(x-a)\geqslant 0,a(y-a)\geqslant 0$,得 $a^2(x-a)(y-a)\geqslant 0$,所以 $a^2\leqslant 0$,即 $a=0$.

再得 $y=-x<0$,所以 $\frac{3x^2+xy-y^2}{x^2-xy+y^2}=\frac{1}{3}$.

题 13 若关于 x 的不等式 $\frac{1}{1+\sqrt{x}}\geqslant a\sqrt{\frac{x}{x-1}}$ 有解,求实数 a 的取值范围.

解 先得 $x>1$.所以可设 $x=t^2(t>1)$,得题设即关于 t 的不等式 $\frac{\sqrt{t^2-1}}{t^2+t}\geqslant a(t>1)$ 有解.

设 $f(t)=\frac{\sqrt{t^2-1}}{t^2+t}(t>1)$,得 $f'(t)=\frac{t^2-t-1}{t^2(t+1)\sqrt{t^2-1}}(t>1)$,再由导数知识得 $f(t)_{\max}=f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{10\sqrt{5}-22}$,所以所求实数 a 的取值范围是 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\sqrt{10\sqrt{5}-22}\right]$.

题 14 求函数 $f(x)=x-\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+1}+\frac{1}{x}(x>0)$ 的最大值.

解 设 $t=x+\frac{1}{x}(x>0)$,得 $t\geqslant 2$.所以 $f(x)=t-\sqrt{t^2-1}=\frac{1}{t+\sqrt{t^2-1}}(t\geqslant 2)$,可得 $f(x)$ 的值随 t 的增加而减小,所以当且仅当 $t=2$ 时,$f(x)_{\max}=2-\sqrt{3}$.

题 15 请找出一个以 $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ 为根的整系数多项式.

解 设 $x=\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$,得

$$(x-\sqrt{2})^3=3$$

$$x^3-3x^2\sqrt{2}+6x-2=3$$

$$(x^3+6x-5)^2=18x^4$$

$$x^6-6x^4-10x^3+36x^2-60x+25=0$$

该方程满足题意.

题 16 若当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时,不等式 $1-lx\leqslant\frac{1}{\sqrt{1+x}}\leqslant 1-kx$ 恒成立,求常数 l,k 的取值范围.

解 可得:当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时,$k\leqslant\frac{1}{x}-\frac{1}{x\sqrt{1+x}}\leqslant l$ 恒成立.

设 $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x\sqrt{1+x}}(1\leqslant x\leqslant 2)$,可证 $f'(x)=\frac{1}{x^2}\left(\frac{3x+2}{2(x+1)\sqrt{1+x}}-1\right)\leqslant 0(1\leqslant x\leqslant$

2)恒成立,所以 $f(x)$ 是减函数. 得 $k\leqslant f(2)$, $f(1)\leqslant l$, 即 l,k 的取值范围分别是 $\left[1-\frac{\sqrt{2}}{2},+\infty\right)$, $\left(-\infty,\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\right]$.

例谈配方法解题

题 1 (2005 年全国高中数学联赛福建赛区预赛试卷第 7 题)若实数 x,y,z 满足 $x^2+2y=7$, $y^2+4z=-7$, $z^2+6x=-14$, 则 $x^2+y^2+z^2=$______.

解 把题设中的三个等式相加后配方,可得

$$(x+3)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=0$$

$$x=-3,\quad y=-1,\quad z=-2$$

还可验证它们满足所有的题设,所以 $x=-3$, $y=-1$, $z=-2$. 由此,得

$$x^2+y^2+z^2=14$$

题 2 (2007 年上海市高中竞赛试题(新知杯)数学试卷第 1 题)方程 $\sqrt{x_1-1}+2\sqrt{x_2-4}+3\sqrt{x_3-9}=\frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3)$ 的实数解 $(x_1,x_2,x_3)=$________.

解 (2,8,18). 原方程可变形为

$$\left(\sqrt{x_1-1}-1\right)^2+\left(\sqrt{x_2-4}-2\right)^2+\left(\sqrt{x_3-9}-3\right)^2=0$$

进而可得答案.

题 3 (第 2 届美国数学奥林匹克试题)求方程组 $\begin{cases}x+y+z=3\\ x^2+y^2+z^2=3\\ x^5+y^5+z^5=3\end{cases}$ 的实数解.

解 由方程组中的头两个方程,可得 $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=0$, $x=y=z=1$, 进而可得原方程组的全部实数解为 $x=y=z=1$.

题 4 (1992 年"友谊杯"国际数学邀请赛试题)设 $a,b,c,x,y,z\in\mathbf{R}$, $a^2+b^2+c^2=25$, $x^2+y^2+z^2=36$, $ax+by+cz=30$, 求 $\frac{a+b+c}{x+y+z}$ 的值.

解 可得 $\left(\frac{a}{5}-\frac{x}{6}\right)^2+\left(\frac{b}{5}-\frac{y}{6}\right)^2+\left(\frac{c}{5}-\frac{z}{6}\right)^2=0$, 进而可得 $\frac{a+b+c}{x+y+z}=\frac{5}{6}$.

题 5 (2010 年浙江省高中数学竞赛试卷第 11 题)满足方程 $\sqrt{x-2009-2\sqrt{x-2010}}+\sqrt{x-2009+2\sqrt{x-2010}}=2$ 的所有实数解为______.

解 对题设中被开方式配方后,可得

$$\left|\sqrt{x-2010}-1\right|+\left|\sqrt{x-2010}+1\right|=2$$

由绝对值不等式中取等号的充要条件,可得 $-1\leqslant\sqrt{x-2010}\leqslant 1$, 所以得原方程的所有实数解为 $2010\leqslant x\leqslant 2011$.

题 6 (2012 年北约联盟自主招生数学试题第 2 题)求 $\sqrt{x+11-6\sqrt{x+2}}+\sqrt{x+27-10\sqrt{x+2}}=1$ 的实数根的个数.

解　对题设中被开方式配方后,可得

$$\left|\sqrt{x+2}-3\right|+\left|\sqrt{x+2}-5\right|=1$$

由绝对值不等式,可得 $\left|\sqrt{x+2}-3\right|+\left|\sqrt{x+2}-5\right|\geqslant 5-3=2$,所以原方程实数根的个数是0.

题7　在实数范围内解方程 $\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{1}{2}(x+y+z)$.

解　把所给方程去分母、移项、配方,得

$$(\sqrt{x}-1)^2+(\sqrt{y-1}-1)^2+(\sqrt{z-2}-1)^2=0$$
$$\sqrt{x}=1,\quad \sqrt{y-1}=1,\quad \sqrt{z-2}=1$$
$$x=1,\quad y=2,\quad z=3$$

题8　已知实数 a,b,c,d 满足 $ad-bc=1$, $a^2+b^2+c^2+d^2-ab+cd=1$,求 $a^{-3}b^{-1}c^3d^3$ 的值.

解　由题设,可得

$$a^2+b^2+c^2+d^2-ab+cd=ad-bc$$
$$a^2+b^2+c^2+d^2=ab+ad-cd-bc$$
$$(a-b)^2+(a-d)^2+(c+d)^2+(b+c)^2=0$$
$$a=b=-c=d$$

再由 $ad-bc=1$,得 $a^2=\frac{1}{2}$,所以

$$a^{-3}b^{-1}c^3d^3=a^{-3}a^{-1}(-a)^3a^3=-a^2=-\frac{1}{2}$$

题9　已知实数 a,b,c 满足 $\left(\frac{1}{a}+b\right)\left(\frac{1}{a}+c\right)+\frac{1}{4}(b-c)^2=0$,求 $ab+ac$ 的值.

解　由题设,可得

$$4(ab+1)(ac+1)+(ab-ac)^2=0$$
$$(ab+ac)^2+4(ab+ac)+4=0$$
$$(ab+ac+2)^2=0$$
$$ab+ac=-2$$

题10　已知非零实数 a,b 满足 $(a^2+1)(b^2+1)=3(2ab-1)$,求 $b\left(\frac{1}{a}-a\right)$ 的值.

解　由题设,可得

$$(ab-2)^2+(a-b)^2=0$$
$$ab=2,\quad a=b$$
$$a^2=2$$

所以

$$b\left(\frac{1}{a}-a\right)=\frac{b(1-a^2)}{a}=1-a^2=1-2=-1$$

题11　已知一个四边形的各边长分别为 a,b,c,d,满足 $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$,判断该四边形的形状.

解　因为 $a^4+b^4+c^4+d^4-2(a^2b^2+c^2d^2)=(a^2-b^2)^2+(c^2-d^2)^2\geqslant 0$,所以

$$a^4+b^4+c^4+d^4\geqslant 2(a^2b^2+c^2d^2)$$

又 $a^2b^2-2abcd+c^2d^2=(a^2b^2-c^2d^2)^2\geqslant 0$,所以

$$a^2b^2+c^2d^2\geqslant 2abcd$$
$$a^4+b^4+c^4+d^4\geqslant 2(a^2b^2+c^2d^2)\geqslant 4abcd$$

再由题设 $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$,得

$$\begin{cases}a^2=b^2, \quad c^2=d^2\\ a^2b^2=c^2d^2\end{cases}$$
$$a=b=c=d$$

即题设中的四边形是菱形.

题 12 已知某个三角形的三边长 a,b,c 满足 $\dfrac{2a^2}{1+a^2}=b,\dfrac{2b^2}{1+b^2}=c,\dfrac{2c^2}{1+c^2}=a$,求该三角形的面积.

解 把题设中的三个等式取倒数后相加再配方,可得

$$\left(\frac{1}{a}-1\right)^2+\left(\frac{1}{b}-1\right)^2+\left(\frac{1}{c}-1\right)^2=0$$
$$a=b=c=1$$

还可验证 $a=b=c=1$ 满足所有题设,所以题设中的三角形是边长为 1 的正三角形,其面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

题 13 在 $\mathbf{R}$ 上解方程 $x^2-2x\sin\dfrac{\pi x}{2}+1=0$.

解 由原方程有

$$\left(x-\sin\frac{\pi x}{2}\right)^2+\cos^2\frac{\pi x}{2}=0$$

所以原方程的全部实数解为 $x=\pm 1$.

题 14 已知 $\alpha,\beta\in(0,\pi)$,$\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{3}{2}$,求 $2\alpha+\beta$ 的值.

解 可得 $\dfrac{\alpha-\beta}{2}\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$,$\dfrac{\alpha+\beta}{2}\in(0,\pi)$,且

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+1=\frac{3}{2}$$
$$\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=0$$
$$\begin{cases}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0\\ \cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0\\ \dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{\pi}{3}\end{cases}\Rightarrow\alpha=\beta=\frac{\pi}{3}$$

所以 $2\alpha+\beta=\pi$.

题 15 (2009 年中国科学技术大学自主招生数学试题)求证:$\forall x,y\in\mathbf{R}$,$x^2+y^2+xy\geqslant 3(x+y-1)$.

证法 1 因为

$$\begin{aligned}x^2+y^2+xy-3(x+y-1)&=x^2+(y-3)x+y^2-3y+3\\&=\left(x+\frac{y-1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(y-1)^2\geqslant 0\end{aligned}$$