Fractional Calculus and Fractional-order Control

# 分数阶微积分学与分数阶控制

薛定宇 著

科学出版社

# 分数阶微积分学与分数阶控制

薛定宇 著

科学出版社

北 京

## 内 容 简 介

本书系统地介绍分数阶微积分学与分数阶控制领域的理论知识与数值计算方法。特别地，作者提出并实现一整套高精度的分数阶微积分学的数值计算方法；提出线性、非线性分数阶微分方程的通用数值解法和基于框图的通用仿真框架，为解决分数阶控制系统的仿真问题奠定了基础；开发面向对象的分数阶系统控制的 MATLAB 工具箱，可以用于多变量分数阶系统的建模、分析与控制器设计的全过程。本书所有知识点均配有高质量的 MATLAB 代码，有助于读者更好地理解知识点的内涵，更重要地，可以利用代码实践并创造性地解决相关问题。

本书可供数学、控制科学等领域的高年级本科生、研究生与工程师系统学习分数阶微积分学理论及其应用，是其尝试在自己的领域引入分数阶微积分的新途径。

图书在版编目(CIP)数据

分数阶微积分学与分数阶控制/薛定宇著. —北京：科学出版社，2018.1

ISBN 978-7-03-054398-1

Ⅰ.①分… Ⅱ.①薛… Ⅲ.①微积分-研究 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 218373 号

责任编辑：张 震 姜 红／责任校对：郭瑞芝
责任印制：吴兆东／封面设计：无极书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京厚诚则铭印刷科技有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2018 年 1 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2018 年 1 月第一次印刷 印张：20 1/4
字数：408 000

定价：135.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

# 前　言

分数阶微积分学与分数阶控制是当前科学与工程领域迅速发展的研究方向。本书介绍该领域的系统知识，并提供直接可用的MATLAB代码，使得读者能尽快上手该领域的应用探讨。

本书第一部分主要介绍分数阶微积分学的基础及其计算方法；第二部分介绍一个面向对象的MATLAB FOTF工具箱，为分数阶控制系统的建模与分析提供实用的工具与平台；第三部分介绍一些分数阶系统的控制器设计技术，包括分数阶PID控制器的设计和多变量频域设计等。

在本书中有很多首次公开的原创性研究成果，相关的算法和代码包括分数阶微积分的高精度算法；全新的全面支持多变量系统的MATLAB FOTF工具箱；分数阶广义状态方程模型；分数阶扩展状态方程建模与仿真；多变量分数阶系统的频域分析与设计；非线性Caputo分数阶微分方程的高效高精度求解算法；基于Simulink的非零初值Caputo微分方程建模与求解方法；最优分数阶PID类控制器的统一设计框架；分数阶微分方程求解算法基准测试问题等。

本书中每一个知识点都配备我编写的MATLAB函数，读者可以直接使用这些可重用代码再现书中的结果，更重要的，利用这些代码创造性地解决他们遇到的问题，并探讨新的知识。

在2000年前后，受一个长期合作的朋友、现美国加利福尼亚大学莫赛德分校的陈阳泉教授的鼓动甚至劝说，我开始接触分数阶控制领域的研究，不过直到2003年开始与陈教授合作《高等应用数学问题的MATLAB求解》第一版著作时，我才真正花时间研读这方面的文献，并开始研究分数阶微积分领域的计算问题。在该著作中系统地介绍了分数阶微积分计算、滤波器近似、线性与非线性分数阶微分方程求解等大量工作，其中很多代码与模型至今仍被分数阶领域的研究者广泛使用。所以这里必须首先感谢陈阳泉教授。

还要感谢一些分数阶领域著名学者和活跃的研究者，包括斯洛伐克科希策工业大学的Igor Podlubny教授和Ivo Petráš 教授、德国不伦瑞克工业大学的Kai Diethelm教授、山东大学的李岩教授、中国科学技术大学的王永教授及其团队、上海交通大学的卢俊国教授、上海大学的李常品教授、清华大学的李东海教授、北京交通大学的于永光教授、哈尔滨工业大学的孙光辉教授、河海大学的陈文教授与孙洪广教授、华南理工大学的曾才斌教授、长春理工大学的王春阳教授（排名不分先后）等，也感谢我2010年在Springer出版专著时的合作者，即西班牙学者Blas

Vinagre教授、Concepción Monje教授和Vicente Feliu教授，和他们的讨论与交流催生了我在这个领域的很多新的想法与研究成果，丰富了本书的内容。

我与东北大学的同事们，特别是潘峰博士、陈大力博士与张雪峰博士等人的深入讨论也为本书带来了很多有意义的内容。也感谢我的学生们为本书的研究成果的贡献，具体包括在分数阶微积分与微分方程数值计算方面白鹭同学、赵春娜博士的贡献；在滤波器设计方面赵春娜博士与孟丽博士的贡献；在控制器设计方面赵春娜博士、孟丽博士、王伟楠同学、刘禄同学与李婷雪同学的贡献；还要感谢在其他相关领域杨洋同学、张艳珠博士、刘艳梅博士、陈震博士、陈岚枫同学的贡献。特别感谢白鹭同学提出并实现的各种高精度算法，和他在本书代码的编写、测试等方面的贡献。我个人认为，其原创性工作可以为分数阶常微分方程数值解法的研究画上一个句号。

本书英文版同期由德国Walter de Gruyter出版社作为“应用科学与工程中的分数阶微积分学”系列丛书的第一卷出版，感谢该丛书主编李常品教授、编委陈阳泉教授的邀请，以及Igor Podlubny教授与陈阳泉教授为英文版写的序言。感谢Walter de Gruyter出版社杨超、王白桦、Astrid Seifert、Nadja Schedensack、Gesa Plauschenat等编辑的辛勤劳动。

感谢国家自然科学基金委员会的自然科学基金面上项目（项目编号:61174145、61673094）对本书研究工作与出版的资助。

最后特别感谢我的妻子杨军和女儿薛杨在生活和事业上给予了我莫大的帮助与鼓励，没有她们的鼓励和一如既往的支持，本书和我的其他著作均不能顺利面世，谨以此书献给她们。

薛定宇

沈阳 • 东北大学

xuedingyu@mail.neu.edu.cn

2017年12月13日

# 目　录

# 第 1 章　分数阶微积分学简介

## 1.1　分数阶微积分学的历史回顾

在经典微积分学（本书称整数阶微积分学）理论的发展初期，英国科学家Newton与德国数学家Leibniz使用了不同的符号来表示不同阶次的导数，Newton使用的符号为$\dot{y}(x)$，$\ddot{y}(x)$，$\dddot{y}(x)$，而Leibniz使用的符号为$\mathrm{d}^n y(x)/\mathrm{d}x^n$，其中$n$为正整数。

在一封法国数学家L'Hôpital 1695年写给Leibniz的信中，他曾经问了这样的一个问题，就是$\mathrm{d}^n y(x)/\mathrm{d}x^n$记号中如果$n=1/2$会有什么含义。在1695年9月3日Leibniz的回信中，他回答到："可以推导出$\mathrm{d}^{1/2}x=\sqrt{\mathrm{d}x:x}$，这显然是一个悖论（paradox），可能日后某一天会得出有用的结果。"[1] 这两位数学家的问答被广泛认为是分数阶微积分学的开端。1819年，法国数学家Lacroix证明了$x$的1/2阶导数为$2\sqrt{x/\pi}$。现在看来，Newton发明的导数符号不适合拓展到分数阶微积分学的领域，而Leibniz发明的符号可以直接用于分数阶微积分学。

三个多世纪过去了，直到几十年之前分数阶微积分学领域的研究还一直侧重于纯数学理论方面的工作，分数阶微积分学领域的一些比较好的历史回顾可以参见文献 [1] 和文献 [2]。在文献 [1] 中，Miller和Ross教授从纯数学角度给出了分数阶微积分学很好的历史回顾，在文献 [2] 中，Oldham与Spanier引述了Ross教授总结的分数阶微积分领域主要成果从诞生开始到1975年的编年史。

从1960年开始，分数阶微积分学的研究开始扩展到科学与工程领域。意大利学者Caputo与Mainardi教授给出了基于分数阶导数建立的耗散模型（dissipation model）[3]；日本学者Manabe（真锅舜治）教授将非整数阶的研究扩展到控制系统的应用中，引入了非整数阶控制系统的概念[4]；斯洛伐克学者Podlubny教授提出了分数阶比例-积分-微分（proportional-integral-derivative，PID）控制器的模型[5]；法国学者Oustaloup教授领导的研究组提出了分数阶鲁棒控制的概念与技术并将其成功应用于汽车工业的悬挂控制（suspension control）[6, 7]，这可以看成分数阶微积分学在真实世界中里程碑式的应用成果。

从大约2000年开始，出现了一些专门论述分数阶微积分学及其应用的专著，这些专著分布于各个专业领域，其中比较有影响的著作有Podlubny教授1999年出版的关于分数阶微分方程及其在自动控制领域应用的著作[8]，Hilfer教授于2000年出版的在物理学领域的著作[9]，Magin教授于2006年出版的在生物工程领域的著

作[10]等。

近年来在分数阶微积分学理论与数值计算方面也出版了一些著作，如Diethelm教授2010年出版的著作[11]，Das教授2011年出版的著作[12]，Uchaikin教授2013年出版的著作[13]，Li（李常品）教授和Zeng（曾凡海）博士2015年出版的著作[14]。

在自动控制领域近年来也出版了一些专著，如Caponetto、Dongola、Fortuna和Petráš等教授2010年出版的著作[15]，Monje、Chen（陈阳泉）、Vinagre、Xue（薛定宇）和Feliu等教授2010年的著作[16]，Petráš教授2011年出版的著作[17]，Luo（罗映）博士和Chen教授2012出版的著作[18]，Oustaloup教授2014年出版的著作[19]。Uchaikin教授2013年出版的著作[20]对分数阶微积分在各个领域中的应用给出了很好的介绍。

中国学者也出版了分数阶微积分学及其应用的教材与专著，薛定宇、陈阳泉教授2004年出版的著作有分数阶微积分及其计算的专门章节[21]。与本书内容相关的著作还包括陈文、孙洪广和李西成教授2010年出版的著作[22]，汪纪锋教授2010年出版的著作[23]，赵春娜、李英顺和陆涛教授2011年出版的著作[24]，王春阳、李明秋、姜淑华教授等于2014年出版的著作[25]，李文、赵慧敏教授于2014年出版的著作[26]，廖晓钟和高哲教授于2016年出版的著作[27]，吴强、黄建华教授于2016年出版的著作[28]等。中国国家自然科学基金在“分数阶”领域的立项数也逐年增加，2014年批准47项，2015年批准58项，2016年批准68项。

值得指出的是，本领域使用的“分数阶”（fractional-order）一词实际上是一个误用的词汇，正确的名称应该是“非整数阶”甚至是“任意阶”，因为阶次除了可以为分数（有理数）之外，还可以是无理数甚至是复数，比如，$\mathrm{d}^{\sqrt{2}}y(t)/\mathrm{d}t^{\sqrt{2}}$可以认为是信号$y(t)$的$\sqrt{2}$阶导数，复数阶次超出了本书介绍的范围。不过在浩瀚的参考文献中，相关的研究者绝大部分都采用“分数阶”一词，所以本书将沿用该词汇，但实质上包括无理数阶次，甚至无理式的系统结构。

整数阶微积分有简洁明确的物理意义，比如位移、速度和加速度可以很好地解释一个信号与其整数阶导数之间的关系。然而分数阶微积分却没有这么简洁易懂的物理解释，尽管很多学者在做这方面的尝试，Podlubny教授给出过一个有意义的解释是“篱笆上移动的影子”[29]，不过现在看来还是缺少像整数阶微积分那样简单和直观的解释。

下面将给出例子演示常用函数的分数阶微积分运算。

**例 1-1** 考虑正弦信号$\sin t$。众所周知，该信号的一阶导数为$\cos t$，再对其求高阶导数，则得出的结果无外乎$\pm\sin t$和$\pm\cos t$，不能得出其他的信号。如果引入分数阶微积分的概念情况又将如何呢？

**解** 由著名的Cauchy积分公式可以得出

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\sin t=\sin\left(t+n\frac{\pi}{2}\right)$$

上述公式事实上在$n$为任意非整数时也是成立的，所以用下面的MATLAB语句可以绘制出分数阶次下函数导数的曲面图，如图1-1所示。

```
>> n0=0:0.1:1.5; t=0:0.2:2*pi; Z=[];
   for n=n0, Z=[Z; sin(t+n*pi/2)]; end, surf(t,n0,Z)
```

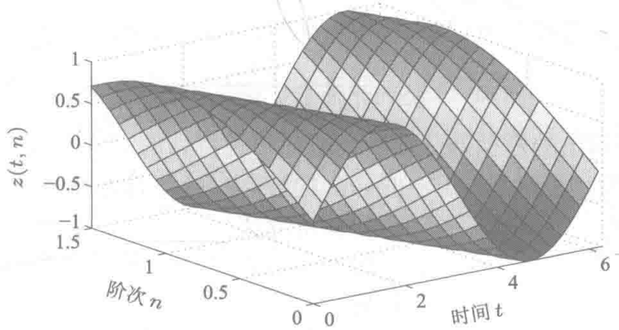


图 1-1 不同阶次导数的曲面表示

可以看出，除了$\pm\sin t, \pm\cos t$这4个已知的结果外，还能得到其他的信息，结果是渐变的。所以，函数的分数阶导数可能提供比整数阶导数更丰富的信息，在实际应用中，如果从分数阶微积分学的角度去观察世界，可能揭示出更多从整数阶微积分角度看不到的东西。

## 1.2 自然世界中的分数阶现象与模型举例

在参考文献[9]、[10]、[12]中有很多关于分数阶微积分应用的例子，这里列出一些相关的典型例子，往往这些例子在整数阶微积分的框架下不能很好地描述，必须借助分数阶微积分来描述，由此可见分数阶现象其实是无所不在的。

**例 1-2** 在高分子材料的黏弹性研究中，文献[9]建议，流变本构方程(rheological constitutive equation)应该更精确地描述成分数阶微分方程：

$$\sigma(t)+\tau^{\alpha-\beta}\frac{\mathrm{d}^{\alpha-\beta}\sigma(t)}{\mathrm{d}t^{\alpha-\beta}}=E\tau^{\alpha}\frac{\mathrm{d}^{\alpha}}{\mathrm{d}t^{\alpha}}\sigma(t)$$

式中，$0<\alpha,\beta<1$。

**例 1-3** 考虑半无限长有损传输线的驱动端阻抗问题，其标准的电压方程满足整数阶偏微分方程，且已知其边界条件

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2},\ v(0,t)=v_I(t),\ v(\infty,t)=0$$

经过一系列直接数学推导[12]，可以得出关于驱动端阻抗的电压电流方程式为如下具有零初值的分数阶微分方程式：

$$i(t)=\frac{1}{R\sqrt{\alpha}}\frac{\mathrm{d}^{1/2}v(t)}{\mathrm{d}t^{1/2}} \quad 或 \quad v(t)=R\sqrt{\alpha}\frac{\mathrm{d}^{-1/2}i(t)}{\mathrm{d}t^{-1/2}}$$

**例 1-4** 离子交换聚合金属材料（ionic polymer metal composite，IPMC）是一种新型智能材料，在机器人驱动器与人工肌肉等领域有广泛的应用前景。为辨识IPMC的模型，可以在实验中实测出一组频域响应数据，用成熟的线性系统模型辨识的方法尝试辨识，不过文献 [15] 表明，在整数阶系统的框架下得不出效果较好的辨识模型。如果引入分数阶模型辨识技术，则可能得出如下的辨识模型：

$$G(s)=\frac{340}{s^{0.756}(s^2+3.85s+5880)^{1.15}}$$

很显然，辨识出的模型是分数阶模型的一种特殊的形式。

**例 1-5** 在标准的热扩散（heat diffusion）过程中，一个热源棒在坐标$x$处的温度可以由下面给出的一维线性偏微分方程直接描述：

$$\frac{\partial c}{\partial t}=K\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$

如果在$x=0$处加一个恒温$C_0$，则可以推导出热扩散下温度的Laplace变换表达式[30]

$$c(x,s)=\frac{C_0}{s}\mathrm{e}^{-x\sqrt{s/k}}$$

**例 1-6** 忆阻器（memristor，带记忆的电阻器）是Chua（蔡少棠）教授1971年指出的第4种基本电路元件[31]（前3种是人们熟知也是物理存在的电阻、电容和电感元件），2008年有研究者声称找到了这种缺失的元件[32]。由于分数阶微积分有描述记忆的功能，可以将其电阻用分数阶微积分的形式表示出来

$$R_{\mathrm{m}}=\left[R_{\mathrm{in}}^{\alpha+1}\mp 2kR_{\mathrm{d}}\int_0^t\frac{v(\tau)}{(t-\tau)^{1-\alpha}}\mathrm{d}\tau\right]^{1/(\alpha+1)}$$

式中，积分函数是分数阶微积分的基本表达式[33]。

在整数阶微积分中，系统中的信号展现出指数函数的形式，而现实生活中可以观测到某些现象展现出的结果可能是时间的幂函数，即所谓的幂律（power-law）现象。这种现象在分数阶微积分的框架下就比较容易理解了。有了分数阶微积分学的视角，人们可以更好地认识复杂的世界[34]。

## 1.3 分数阶微积分与分数阶控制工具简介

在分数阶微积分与分数阶控制领域研究中有几个MATLAB工具箱应用比较广泛，文献 [35] 对常用的工具箱做了对比性的综述。其实，文献 [35] 中对比的许多工具只是单个MATLAB函数，其中能称得上工具箱的只有4个，恰巧这4个工具箱都是分数阶控制方面的工具箱。这里按其推出的时间顺序作简单的对比介绍。

（1）CRONE 工具箱[6] 是法国著名学者 Oustaloup 教授领导的 CRONE 研究组的成果，该工作起始于 1990 年前后，是解决分数阶系统辨识与鲁棒控制器设计的实用工具。比较不利的是它是以 MATLAB 伪代码加密形式发行的，用户没有办法修改或扩展该工具箱的任何功能。CRONE 是法语 commande robuste d'ordre non entier（非整数阶鲁棒控制）的缩写。

（2）Ninteger 工具箱 [36] 是葡萄牙学者 Valério 教授于 2006 年开发的，该工具箱是一组基于 MATLAB 和 Simulink 的分数阶系统控制器设计与分析的函数、模型与界面。该工具箱有两个核心功能，一个是分数阶系统的辨识，另一个是用整数阶模型逼近分数阶系统。

（3）FOTF 工具箱 [37, 38] 是中国学者东北大学薛定宇教授（本书作者）编写的用于分数阶微积分数值计算与分数阶控制系统研究的 MATLAB 工具箱，该工具箱 2006 年首次以 FOTF 的名字公开，而 2004 年开始，作者陆续公开了其中很多的 MATLAB 函数与 Simulink 模型。在随本书公开的版本中，改写了全部程序与模型，全面支持分数阶多变量系统的分析与设计，此外，所涉及的底层分数阶微积分计算、微分方程求解等全部替换成作者提出的高精度算法，通常情况下其精度高于现有算法许多个数量级，使得工具箱本身更高效、可靠。本书将基于该工具箱详细介绍系统的理论知识与工具箱软件开发的细节，对读者学习分数阶系统领域的数值实现也有借鉴意义。

（4）FOMCON 工具箱[39] 是爱沙尼亚 Tepljakov 在读硕士研究生期间开发的，刚开始时只是对 FOTF 的类与 Ninteger 工具箱做了直接集成，后来在原作者建立的框架下改写了大部分程序，形成了一套解决分数阶系统辨识、分析与设计的程序与模型。由于该工具箱使用了本书作者的 FOTF 类早期版本作为基础，该工具箱仅限于解决单变量分数阶系统的问题。

除此之外，建议读者从 MathWorks 公司网站的"File Exchange"栏目下载可能出现的新工具箱与实用函数，不过，由于该网站的程序与工具编程水平良莠不齐，可能有些工具质量会很差，有时甚至可能导致错误的结果，用户在选择下载工具箱与实用函数时应该特别留意。

## 1.4 本书的结构

### 1.4.1 本书的主要内容与要点

本书系统介绍分数阶微积分学与分数阶控制领域的基础知识，为读者提供直接可用的计算机工具，可以加强对内容的理解与知识点的可操作性。

在第 1 章中，给出了分数阶微积分学及其应用领域发展过程的简单回顾，通过真实世界中的一些分数阶现象解释为什么要引入分数阶微积分的视角来观察世

界，总结了国际上现有的几个分数阶微积分与分数阶控制的MATLAB工具箱，本书将广泛使用作者开发的FOTF工具箱。

第2章侧重于介绍分数阶微积分领域常用的各种特殊函数的定义、性质与计算，为介绍分数阶微积分的定义与计算内容打下基础。

第3章介绍各种常见的分数阶微积分定义与计算方法，特别是本书提出了一系列高精度的数值算法，比现有的算法高出许多个数量级，这些方法可以认为是本书后续内容的数值计算基础。

第4章介绍线性分数阶微分方程的内容，探讨方程的解析解算法与数值解算法，提出具有零初值与非零初值的线性分数阶微分方程的高精度数值解法，并引入数值Laplace变换与反变换方法求解无理系统的数值解。

第5章介绍分数阶行为的滤波器逼近方法，并探讨各种连续滤波器的设计方法，包括针对分数阶算子的滤波器与无理传递函数的滤波器等，评价分数阶行为的滤波器拟合效果，并给出滤波器设计参数的选择建议。

在第6章和第7章中，作者设计两个经常用到的线性分数阶模型的MATLAB类，即分数阶传递函数类与分数阶状态方程类，引入面向对象的程序设计技术，建立起分数阶模型输入与转换、分数阶系统分析与分数阶系统设计等实际问题的解决框架。这使得对线性分数阶系统的处理像利用MATLAB控制系统工具箱对整数阶系统的处理那么简单直观。

第8章探讨非线性分数阶系统的数值解方法，具体可以采用两种主要的途径，一是将这个系统的分数阶微分方程写成标准的形式，然后通过MATLAB函数调用的方式直接求解。这样的方法可以得出一般显式微分方程甚至隐式微分方程的高精度数值解。另一种方法是采用基于Simulink框图的求解方法，设计分数阶系统建模仿真常用模块的FOTF模块集，可以直接搭建起分数阶微分方程的仿真模型。这类方法理论上可以用于处理任意复杂的非线性分数阶微分方程的求解问题。

本书第9章和第10章介绍各种分数阶系统控制器的设计方法，首先探讨分数阶受控对象的最优整数阶PID控制器设计问题，给出有意义的最优化指标，用数值最优化的方法解决控制器的设计问题。可以将这样的思路直接拓展到最优分数阶控制器的设计中去，设计出最优的分数阶PID控制器，并介绍变阶次模糊PID控制器的设计方法与仿真方法。对多变量分数阶系统而言，可以将整数阶系统中几种有用的频域设计方法拓展到分数阶系统的设计，设计方法包括采用伪对角化的方法解耦再进行单独回路设计的方法和分数阶系统的参数最优化的直接设计方法等。除了设计方法之外，本书还对控制系统鲁棒性——尤其是受控对象增益变化下的鲁棒性进行了必要的仿真分析。

本书给出3个附录。附录A给出与分数阶和无理函数相关的Laplace变换表；附录B分类列出作者为本书开发的全部函数与模型，以供参考；附录C中作者设计