

[法] 吕克·若兰 (Luc Jaulin) 著

王世伟 谢广明 译

# 移动机器人 原理与设计

## MOBILE ROBOTICS



机器人学译丛

[法] 吕克·若兰 (Luc Jaulin) 著

王世伟 谢广明 译

# 移动机器人 原理与设计

MOBILE  
ROBOTICS



机械工业出版社  
China Machine Press

## 图书在版编目 (CIP) 数据

移动机器人原理与设计 / (法) 吕克·若兰 (Luc Jaulin) 著; 王世伟, 谢广明译. —北京: 机械工业出版社, 2018.3

(机器人学译丛)

书名原文: Mobile Robotics

ISBN 978-7-111-59186-3

I. 移… II. ①吕… ②王… ③谢… III. 移动式机器人-研究 IV. TP242

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2018) 第 033113 号

本书版权登记号: 图字 01-2016-6520

Elsevier

Elsevier (Singapore) Pte Ltd.

3 Killiney Road, #08-01 Winsland House I, Singapore 239519

Tel: (65) 6349-0200; Fax: (65) 6733-1817

Mobile Robotics

Luc Jaulin

Copyright © 2015 ISTE Press Ltd. Published by Elsevier Ltd. All rights reserved.

ISBN-13: 978-1-78548-048-5

This translation of Mobile Robotics by Luc Jaulin was undertaken by China Machine Press and is published by arrangement with Elsevier (Singapore) Pte Ltd.

Mobile Robotics by Luc Jaulin 由机械工业出版社进行翻译, 并根据机械工业出版社与爱思唯尔 (新加坡) 私人有限公司的协议约定出版。

《移动机器人原理与设计》(王世伟 谢广明 译)

ISBN: 978-7-111-59186-3

Copyright © 2018 by Elsevier (Singapore) Pte Ltd.

All rights reserved. No part of this publication may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording, or any information storage and retrieval system, without permission in writing from Elsevier (Singapore) Pte Ltd. Details on how to seek permission, further information about the Elsevier's permissions policies and arrangements with organizations such as the Copyright Clearance Center and the Copyright Licensing Agency, can be found at our website: [www.elsevier.com/permissions](http://www.elsevier.com/permissions).

This book and the individual contributions contained in it are protected under copyright by Elsevier (Singapore) Pte Ltd. and China Machine Press (other than as may be noted herein).

### 注意

本译本由 Elsevier (Singapore) Pte Ltd. 和机械工业出版社完成。相关从业及研究人员必须凭借其自身经验和知识对文中描述的信息数据、方法策略、搭配组合、实验操作进行评估和使用。由于医学科学发展迅速, 临床诊断和给药剂量尤其需要经过独立验证。在法律允许的最大范围内, 爱思唯尔、译文的原文作者、原文编辑及原文内容提供者均不对译文或因产品责任、疏忽或其他操作造成的人身及/或财产伤害及/或损失承担责任, 亦不对由于使用文中提到的方法、产品、说明或思想而导致的人身及/或财产伤害及/或损失承担责任。

Printed in China by China Machine Press under special arrangement with Elsevier (Singapore) Pte Ltd. This edition is authorized for sale in the People's Republic of China only, excluding Hong Kong SAR, Macau SAR and Taiwan. Unauthorized export of this edition is a violation of the contract.

本书封底贴有 Elsevier 防伪标签, 无标签者不得销售。

出版发行: 机械工业出版社 (北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码: 100037)

责任编辑: 曲 熠

责任校对: 李秋荣

印刷: 北京诚信伟业印刷有限公司

版次: 2018 年 3 月第 1 版第 1 次印刷

开本: 185mm × 260mm 1/16

印张: 14.25

书号: ISBN 978-7-111-59186-3

定价: 69.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

客服热线: (010) 88378991 88361066

投稿热线: (010) 88379604

购书热线: (010) 68326294 88379649 68995259

读者信箱: [hzjsj@hzbook.com](mailto:hzjsj@hzbook.com)

版权所有·侵权必究

封底无防伪标均为盗版

本书法律顾问: 北京大成律师事务所 韩光/邹晓东

让机器人在一定范围的工作空间内敏捷、精确地移动，是机器人技术应用的基本前提之一。具备移动能力的机器人称为移动机器人，其中包含工作空间坐标表示、机器人动力学建模、移动控制算法设计、空间定位与导航、信号滤波等关键技术。经过多年的发展，移动机器人的相关理论与方法已逐渐成熟，本书的主要目标是概述机器人学中有助于移动机器人设计的相关理论和方法。

研究机器人技术，必须强调理论联系实际。本书列举了陆地机器人、空中机器人和水中机器人等，基于多个实际案例展开理论分析，并辅以实践效果作为验证。这对于教师和学生做移动机器人的理论分析和实际工程应用而言，均是很好的借鉴，同时，对于培养移动机器人方向的工程应用型人才也具有参考价值。

希望本书能够为学习移动机器人的本科生和研究生提供面向工程应用所需要的基础知识和分析工具。总体而言，本书作为工程应用型教材，既适合本科高年级学生阅读学习，又适合研究生作为科研入门的参考工具。

最后，特别感谢在本书翻译过程中为我们提供帮助的李建武和李东武两位学者，以及其他提出宝贵意见的人。

欢迎读者批评指正。

译者

2018年2月

移动机器人可以被定义为一个能够在其所处的环境中自主移动的机械系统。为了实现这个目标，它必须装备：

- 传感器，帮助获得关于其周围环境的知识（这些知识它或多或少知道一些）并确定它的位置。
- 执行器，使得机器人能够运动起来。
- 智能（算法或调节器），基于传感器收集到的数据，计算出移动指令并发送到执行器，以完成给定的任务。

最后，我们还必须加上移动机器人所处的环境和它的使命。前者对应于机器人所处的不断变化的世界，后者对应于机器人必须要完成的任务。从 21 世纪初以来，移动机器人在军事领域（空中无人机 [BEA 12]、水中机器人 [CRE 14] 等）乃至医疗和农业领域都取得了持续不断的进展。在某些领域中，执行任务对人类而言是痛苦或者危险的，这些领域对机器人的需求非常高。例如这样一些情形：清除地雷、在海底搜索失事飞机的黑匣子以及行星探测等。人造卫星、发射器（如阿里安五号运载火箭）、无人驾驶地铁和自动电梯都是移动机器人的典型案例。飞机、火车和汽车以一种持续的方式不断向改进着的自主系统演化，并且非常有可能在接下来的几十年内变成移动机器人。

移动机器人学是着眼于移动机器人设计的学科 [LAU 01]。它基于自动控制、信号处理、力学、计算和电子等多个学科。本书的主要目标是概述机器人学中有利于移动机器人设计的有关方法和工具。机器人将由状态方程描述，即一组一阶（通常为非线性的）微分方程。这些状态方程可以运用力学定律获得。我们的目标不包括详细讲授机器人建模的方法（可参考文献 [JAU 05] 和 [JAU 15] 获得更多相关主题的信息），而是仅仅回顾相关基本原理。对于建模，我们这里指得到状态方程，这一步是机器人仿真以及控制器设计的必要前提。不过，在第 1 章中我们会刻意举一些三维（3D）案例来阐述建模的基本原理。这是为了介绍机器人学中的一些重要基本概念，如欧拉角和旋转矩阵。例如，我们将讨论一个车轮的动力学过程和一个水中机器人的运动学过程。移动机器人都是强非线性系统，并且只有一类非线性方法可以构造有效的控制器。此类构造过程是第 2 章和第 3 章的主题。第 2 章主要以依赖于机器人模型的控制方法为基础，这个方法将利用反馈线性化的概念，我们将通过多个例子进行介绍和阐述。第 3 章提出一些更实用的方法，这些方法不会用到机器人的状态模型，而是归为无模型或者模仿。该类方法采用一类对机器人的更直观



的描述，适用于机器人相对简单且可以远程控制的情形，例如车辆、帆船或者飞机。第4章关注导引问题，其处于比控制更高的层面。换句话说，将重点放在导引、监控那些经由第2章和第3章所列工具控制之下的系统。因此，这里将着重强调如何获得指令并提供给控制器，以便机器人能够完成给定的任务。那么，这些导引必须考虑到周遭环境的知识、障碍物的出现以及环形的地球表面。非线性控制和导引方法需要关于系统状态变量的优良知识，例如那些定义机器人位置的变量。这些位置变量是最难获得的，因此第5章关注定位问题。这一章引入一些经典的非线性方法，长期以来人们一直利用这些方法来进行定位，包括观测信标、星象、使用罗盘或者累计步数。尽管定位可以看成一类特殊的状态观测，但其特定的方法值得将其单独列为一章。第6章的辨识专注于从另外一些可测量的量获得不可测量的量，并保有一定的精度。为了完成这种辨识，我们将主要关注所谓的最小二乘方法，该方法通过寻找变量向量使得误差的平方和达到最小。第7章介绍卡尔曼滤波器，可以将该滤波器看作一个参数随时间变化的线性动态系统的状态观测器。

本书习题中的 MATLAB 代码及相关说明视频可以从下面的网站获得：[www.ensta-bretagne.fr/jaulin/isterob.html](http://www.ensta-bretagne.fr/jaulin/isterob.html)。

译者序	
前言	
<b>第 1 章 三维建模</b> .....	1
1.1 旋转矩阵 .....	1
1.1.1 定义 .....	1
1.1.2 旋转向量 .....	2
1.1.3 伴随矩阵 .....	3
1.1.4 坐标系变换 .....	4
1.2 欧拉角 .....	6
1.2.1 定义 .....	6
1.2.2 欧拉矩阵的导数 .....	7
1.2.3 欧拉矩阵的旋转向量 .....	7
1.3 刚性机器人的运动学模型 .....	8
1.4 习题 .....	11
1.5 参考答案 .....	20
<b>第 2 章 反馈线性化</b> .....	33
2.1 控制积分链 .....	33
2.1.1 比例-微分控制器 .....	33
2.1.2 比例-积分-微分控制器 .....	34
2.2 引例 .....	35
2.3 方法的原理 .....	36
2.3.1 原理 .....	36
2.3.2 相对次数 .....	37
2.3.3 微分延迟矩阵 .....	38
2.3.4 奇异点 .....	39
2.4 二轮车 .....	40
2.4.1 一阶模型 .....	40
2.4.2 二阶模型 .....	42
2.5 控制三轮车 .....	44
2.5.1 速度和转向控制 .....	44
2.5.2 位置控制 .....	45
2.5.3 选择另一个输出 .....	46
2.6 帆船 .....	46
2.6.1 极坐标曲线 .....	47
2.6.2 微分延迟 .....	48
2.6.3 反馈线性化的方法 .....	49
2.6.4 极坐标曲线控制 .....	51
2.7 运动学模型和动力学模型 .....	51
2.7.1 原理 .....	51
2.7.2 倒立摆系统 .....	52
2.7.3 伺服电机 .....	55
2.8 习题 .....	55
2.9 参考答案 .....	61
<b>第 3 章 无模型控制</b> .....	72
3.1 无人车的无模型控制 .....	72
3.1.1 方向和速度的比例 控制器 .....	73
3.1.2 方向的比例-微分 控制器 .....	74
3.2 雪橇车 .....	75
3.2.1 模型 .....	76
3.2.2 正弦驱动控制 .....	77
3.2.3 最大推力控制 .....	78
3.2.4 快速动态特性的简化 .....	79

3.3 帆船 .....	81	第6章 辨识 .....	142
3.3.1 问题 .....	81	6.1 二次型函数 .....	142
3.3.2 控制器 .....	82	6.1.1 定义 .....	142
3.3.3 导航 .....	87	6.1.2 二次型的导数 .....	143
3.3.4 实验 .....	87	6.1.3 二次型函数的特征值 .....	143
3.4 习题 .....	89	6.1.4 二次型函数的最小化 .....	144
3.5 参考答案 .....	95	6.2 最小二乘法 .....	145
<b>第4章 导引</b> .....	102	6.2.1 线性情形 .....	145
4.1 球面上的导引 .....	102	6.2.2 非线性情形 .....	146
4.2 路径规划 .....	104	6.3 习题 .....	147
4.2.1 简单示例 .....	105	6.4 参考答案 .....	149
4.2.2 贝塞尔多项式 .....	105	<b>第7章 卡尔曼滤波器</b> .....	158
4.3 维诺图 .....	107	7.1 协方差矩阵 .....	158
4.4 人工势场法 .....	108	7.1.1 定义和解释 .....	158
4.5 习题 .....	109	7.1.2 性质 .....	160
4.6 参考答案 .....	113	7.1.3 置信椭圆 .....	160
<b>第5章 实时定位</b> .....	123	7.1.4 生成高斯随机向量 .....	162
5.1 传感器 .....	123	7.2 无偏正交估计 .....	163
5.2 测角定位 .....	126	7.3 线性估计的应用 .....	166
5.2.1 问题描述 .....	126	7.4 卡尔曼滤波器 .....	167
5.2.2 内接角 .....	127	7.5 卡尔曼平滑器 .....	169
5.2.3 平面机器人的静态三角 测量 .....	128	7.6 习题 .....	170
5.2.4 动态三角测量 .....	128	7.7 参考答案 .....	184
5.3 多点定位 .....	130	<b>参考文献</b> .....	213
5.4 习题 .....	131	<b>索引</b> .....	215
5.5 参考答案 .....	134		



## 三 维 建 模

本章将介绍刚性(非关节型)机器人的三维(3D)建模。这样的模型可以用来代表一架飞机、一个四轴飞行器、一艘潜艇等。我们通过这种建模引出一些机器人学中的基本概念,如状态描述、旋转矩阵和欧拉角。一般情况下,不管是移动型的、可操控型的或是关节型的机器人,都可以将其转化为如下形式的状态描述:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases}$$

其中,  $\mathbf{x}$  是状态向量,  $\mathbf{u}$  是输入向量,  $\mathbf{y}$  是度量向量[JAU 05]。所谓建模,其步骤包括找出问题中所指机器人的一个较为精确的状态描述。一般而言,常数参数可能会出现在状态方程中(例如物体的质量、转动惯量、黏度等)。在这种情况下,辨识步骤可能是很有必要的。在此假设所有的参数都是已知的。当然,并没有一种可以对移动机器人进行建模的系统方法。本章的目标是介绍一种方法,该方法可以使我们获得 3D 刚体机器人的状态描述,并使读者获得一些关于机器人建模的有用经验。这些建模也需要我们回顾一些欧几里得几何中的重要概念,而这些概念在移动机器人学中也是十分重要的。本章将以回顾一些运动学中对建模有用的重要概念为起始。

1

## 1.1 旋转矩阵

对于 3D 建模,有必要充分理解本节所提到的与旋转矩阵相关的概念。只有利用这种方法,才能实现坐标系的转换和空间内物体的定位。

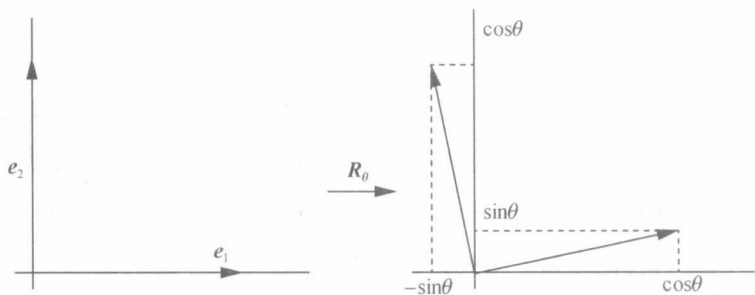
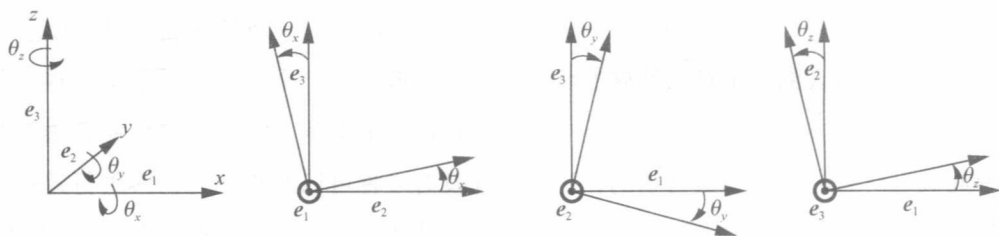
### 1.1.1 定义

回顾一下,一个  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  的线性变换矩阵的第  $j$  列表示标准基下的第  $j$  个向量  $\mathbf{e}_j$  的投影(如图 1-1 所示),因此在  $\mathbb{R}^2$  平面上,角  $\theta$  的旋转矩阵表达式由下式给出:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

关于空间  $\mathbb{R}^3$  内的旋转(见图 1-2),指定其旋转轴相当重要。在此区分如下三种主要的旋转:绕  $O_x$  轴旋转、绕  $O_y$  轴旋转和绕  $O_z$  轴旋转。相应的旋转矩阵分别表示如下:

$$\mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_y = \begin{pmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_z = \begin{pmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

图 1-1 平面内角度  $\theta$  的旋转图 1-2 空间  $\mathbb{R}^3$  内不同视角的旋转变换

现在我们回顾一下旋转变换的标准定义。旋转变换是一类线性变换，该线性变换包括一个等距算子(换句话说，它是保持内积的)和一个移动(它不会改变物体的空间朝向)。

**定理 1.1** 一个矩阵  $\mathbf{R}$  是旋转矩阵，当且仅当满足：

$$\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{I} \quad \text{且} \quad \det \mathbf{R} = 1$$

**证明**  $\mathbf{R}$  是保持内积的，前提是对于  $\mathbb{R}^n$  内的任意  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{v}$ ，都有：

$$(\mathbf{R}\mathbf{u})^T \cdot (\mathbf{R}\mathbf{v}) = \mathbf{u}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$$

换言之， $\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{I}$ 。关于某个平面对称以及其他所有的非正常移动(例如等距各向同性就像一面镜子能够改变空间方位)也能验证  $\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{I}$ 。条件  $\det \mathbf{R} = 1$  将其限定于作为移动的各向同性之中。 $\mathbb{R}^n$  内旋转矩阵的集合构成了一个特殊正交群(特殊是因为  $\det \mathbf{R} = 1$ ，正交是因为  $\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{R} = \mathbf{I}$ )。 ■

### 1.1.2 旋转向量

如果  $\mathbf{R}$  是一个依赖于时间  $t$  的旋转矩阵，通过对  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T = \mathbf{I}$  求导，可得：

$$\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{R}}^T = 0$$

因此，矩阵  $\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T$  就是一个反对称矩阵(换言之，其满足  $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$ ，因此其对角线元

素只含有 0, 同时对于  $\mathbf{A}$  的每一个元素, 均有  $a_{ij} = -a_{ji}$ 。于是, 当  $\mathbf{R}$  是一个  $3 \times 3$  矩阵时, 可以写为:

$$\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

向量  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$  称为与  $(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})$  相关的旋转向量。必须要指出的是,  $\dot{\mathbf{R}}$  不是一个具有良好性能的矩阵(例如它是一个反对称矩阵)。但是, 矩阵  $\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T$  具有式(1.1)所示的结构, 这便使我们能够在实现旋转的坐标系内进行定位, 这是由于利用  $\mathbf{R}^T$  进行了基坐标的变换。两个向量  $\boldsymbol{\omega}$  和  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  间的向量积定义如下:

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3\omega_y - x_2\omega_z \\ x_1\omega_z - x_3\omega_x \\ x_2\omega_x - x_1\omega_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

### 1.1.3 伴随矩阵

对于每个向量  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ , 均可得到其反对称矩阵为:

$$\text{Ad}(\boldsymbol{\omega}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

可将其理解为一个与向量  $\boldsymbol{\omega}$  的向量积相关的矩阵。

4

**命题 1.1** 如果  $\mathbf{R}(t)$  是一个依赖于时间  $t$  的旋转矩阵, 则其旋转向量可由下式给出:

$$\boldsymbol{\omega} = \text{Ad}^{-1}(\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T) \quad (1.2)$$

**证明** 该关系式是由方程(1.1)直接推导出的结果。 ■

**命题 1.2** 如果  $\mathbf{R}$  是  $\mathbb{R}^3$  内的一个旋转矩阵, 同时  $\mathbf{a}$  为  $\mathbb{R}^3$  内的一个向量, 则有:

$$\text{Ad}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{R} \cdot \text{Ad}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{R}^T \quad (1.3)$$

上式也可写为:

$$(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}) \wedge = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{a} \wedge) \cdot \mathbf{R}^T$$

**证明** 令  $\mathbf{x}$  为  $\mathbb{R}^3$  内的一个向量, 则有:

$$\begin{aligned} \text{Ad}(\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{x} &= (\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}) \wedge \mathbf{x} = (\mathbf{R} \cdot \mathbf{a}) \wedge (\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^T \mathbf{x}) \\ &= \mathbf{R} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{R} \cdot \text{Ad}(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{R}^T \cdot \mathbf{x} \end{aligned} \quad \blacksquare$$

**命题 1.3(对偶性)** 有如下关系:

$$\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} = \text{Ad}(\mathbf{R}^T \boldsymbol{\omega}) \quad (1.4)$$

上述关系表达了一个事实, 即  $\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}}$  是与旋转矩阵  $\boldsymbol{\omega}$  相关的。但是表示在与  $\mathbf{R}$  相关的

坐标系内时,是与  $\mathbf{R}(t)$  相关的;而表示在标准基坐标系内时,  $\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T$  是与同一个向量相关的。

证明 如下式:

$$\mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{R}^T (\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T) \mathbf{R} \stackrel{(1.2)}{=} \mathbf{R}^T \cdot \text{Ad}(\boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{R} \stackrel{(1.3)}{=} \text{Ad}(\mathbf{R}^T \boldsymbol{\omega})$$

#### 1.1.4 坐标系变换

令  $\mathcal{R}_0: (\mathbf{o}_0, \mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0)$  和  $\mathcal{R}_1: (\mathbf{o}_1, \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_1)$  为两个坐标系,  $\mathbf{u}$  为  $\mathbb{R}^3$  内的一个向量(如图 1-3), 则有如下关系:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= x_0 \mathbf{i}_0 + y_0 \mathbf{j}_0 + z_0 \mathbf{k}_0 \\ &= x_1 \mathbf{i}_1 + y_1 \mathbf{j}_1 + z_1 \mathbf{k}_1 \end{aligned}$$

其中,  $(x_0, y_0, z_0)$  和  $(x_1, y_1, z_1)$  分别为坐标系  $\mathcal{R}_0$  和  $\mathcal{R}_1$  中  $\mathbf{u}$  的坐标。

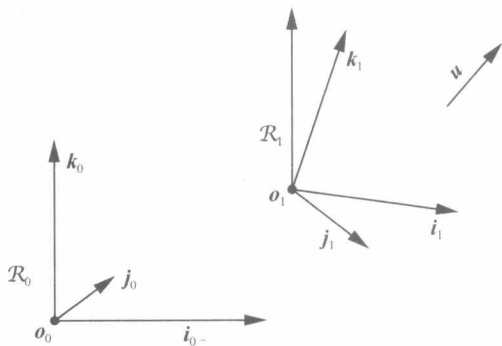


图 1-3 从坐标系  $\mathcal{R}_0$  到  $\mathcal{R}_1$  的变换

那么,对于任意向量  $\mathbf{v}$ , 均有:

$$\langle x_0 \mathbf{i}_0 + y_0 \mathbf{j}_0 + z_0 \mathbf{k}_0, \mathbf{v} \rangle = \langle x_1 \mathbf{i}_1 + y_1 \mathbf{j}_1 + z_1 \mathbf{k}_1, \mathbf{v} \rangle$$

分别取  $\mathbf{v} = \mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0$ , 可得如下三个关系式:

$$\begin{cases} \langle x_0 \mathbf{i}_0 + y_0 \mathbf{j}_0 + z_0 \mathbf{k}_0, \mathbf{i}_0 \rangle = \langle x_1 \mathbf{i}_1 + y_1 \mathbf{j}_1 + z_1 \mathbf{k}_1, \mathbf{i}_0 \rangle \\ \langle x_0 \mathbf{i}_0 + y_0 \mathbf{j}_0 + z_0 \mathbf{k}_0, \mathbf{j}_0 \rangle = \langle x_1 \mathbf{i}_1 + y_1 \mathbf{j}_1 + z_1 \mathbf{k}_1, \mathbf{j}_0 \rangle \\ \langle x_0 \mathbf{i}_0 + y_0 \mathbf{j}_0 + z_0 \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0 \rangle = \langle x_1 \mathbf{i}_1 + y_1 \mathbf{j}_1 + z_1 \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_0 \rangle \end{cases}$$

然而,由于  $\mathcal{R}_0$  的基  $(\mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0)$  是标准正交的,且  $\langle \mathbf{i}_0, \mathbf{i}_0 \rangle = \langle \mathbf{j}_0, \mathbf{j}_0 \rangle = \langle \mathbf{k}_0, \mathbf{k}_0 \rangle = 1$  以及  $\langle \mathbf{i}_0, \mathbf{j}_0 \rangle = \langle \mathbf{j}_0, \mathbf{k}_0 \rangle = \langle \mathbf{i}_0, \mathbf{k}_0 \rangle = 0$ , 因此可将上述三个关系式转化为:

$$\begin{cases} x_0 = x_1 \langle \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_0 \rangle + y_1 \langle \mathbf{j}_1, \mathbf{i}_0 \rangle + z_1 \langle \mathbf{k}_1, \mathbf{i}_0 \rangle \\ y_0 = x_1 \langle \mathbf{i}_1, \mathbf{j}_0 \rangle + y_1 \langle \mathbf{j}_1, \mathbf{j}_0 \rangle + z_1 \langle \mathbf{k}_1, \mathbf{j}_0 \rangle \\ z_0 = x_1 \langle \mathbf{i}_1, \mathbf{k}_0 \rangle + y_1 \langle \mathbf{j}_1, \mathbf{k}_0 \rangle + z_1 \langle \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_0 \rangle \end{cases}$$

或用矩阵形式表示为:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \langle i_1, i_0 \rangle & \langle j_1, i_0 \rangle & \langle k_1, i_0 \rangle \\ \langle i_1, j_0 \rangle & \langle j_1, j_0 \rangle & \langle k_1, j_0 \rangle \\ \langle i_1, k_0 \rangle & \langle j_1, k_0 \rangle & \langle k_1, k_0 \rangle \end{pmatrix}}_{=R_{\mathcal{R}_0}^{\mathcal{R}_1}} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=u|_{\mathcal{R}_0}} \qquad \underbrace{\hspace{10em}}_{=u|_{\mathcal{R}_1}}$

从上式可以看出存在一个旋转矩阵  $R_{\mathcal{R}_0}^{\mathcal{R}_1}$ ，其列表示在绝对坐标系  $\mathcal{R}_0$  中时  $i_1, j_1, k_1$  的坐标。换言之：

$$R_{\mathcal{R}_0}^{\mathcal{R}_1} = \left( \begin{array}{c|c|c} i_1 & j_1 & k_1 \\ \hline |_{\mathcal{R}_0} & |_{\mathcal{R}_0} & |_{\mathcal{R}_0} \end{array} \right)$$

该矩阵是随时间变化的，并将坐标系  $\mathcal{R}_1$  和  $\mathcal{R}_0$  关联起来。由于  $R_{\mathcal{R}_0}^{\mathcal{R}_1}$  中包含这两个坐标系的基向量的方向余弦，因此通常将其称为方向余弦矩阵。同样，如果有多个坐标系  $\mathcal{R}_0, \dots, \mathcal{R}_n$  (如图 1-4)，则有：

$$u|_{\mathcal{R}_0} = R_{\mathcal{R}_0}^{\mathcal{R}_1} \cdot R_{\mathcal{R}_1}^{\mathcal{R}_2} \cdot \dots \cdot R_{\mathcal{R}_{n-1}}^{\mathcal{R}_n} \cdot u|_{\mathcal{R}_n}$$

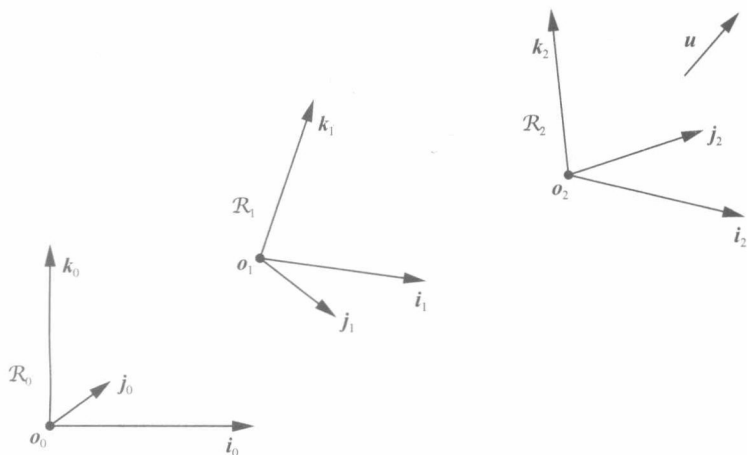


图 1-4 复合坐标系变换图

例如，考虑一个机器人在 3D 环境中移动的情况。引入  $\mathcal{R}_0: (o_0, i_0, j_0, k_0)$  作为其参考坐标系(比如，初始时刻该机器人的坐标系)。用坐标系  $\mathcal{R}_0$  中的向量  $p(t)$  表示机器人的位置，用旋转矩阵  $R(t)$  表示其姿态(即其方向)。该旋转矩阵  $R(t)$  代表在  $t$  时刻  $\mathcal{R}_0$  中所表示机器人的坐标系  $\mathcal{R}_1$  中向量  $i_1, j_1, k_1$  的坐标，由此可得：

$$R(t) = \left( \begin{array}{c|c|c} i_1 & j_1 & k_1 \\ \hline |_{\mathcal{R}_0} & |_{\mathcal{R}_0} & |_{\mathcal{R}_0} \end{array} \right) = R_{\mathcal{R}_0}^{\mathcal{R}_1}(t)$$

7

该矩阵可通过一个安装在机器人上的精确姿态单元得到。如果该机器人也装备有一个多普勒计程仪(DVL)，它可为机器人返回一个表示在坐标系  $\mathcal{R}_1$  中的相对于地面或者海底的速度向量  $v_r$ ，那么该机器人的速度向量  $v$  满足：

$$\underbrace{v|_{\mathcal{R}_0}}_{\dot{p}(t)} \stackrel{(1.5)}{=} \underbrace{R_{\mathcal{R}_0}^{\mathcal{R}_1}}_{R(t)} \cdot \underbrace{v_r|_{\mathcal{R}_1}}_{v_r(t)}$$

换言之:

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{R}(t) \cdot \mathbf{v}_r(t) \quad (1.6)$$

航位推测法便是由  $\mathbf{R}(t)$  和  $\mathbf{v}_r(t)$  合并而来的该状态方程组成。

## 1.2 欧拉角

### 1.2.1 定义

在相关文献中, 1770 年欧拉提出一系列角度用于表示空间内刚体的方向, 这些角度没有唯一的定义。在此主要区别横滚-偏航-横滚、横滚-俯仰-横滚以及横滚-俯仰-偏航三种表达。因为要将其施加于移动机器人语言中, 所以后文将对其进行选择。在横滚-俯仰-偏航表达方式中, 欧拉角有时被称为是卡丹角。 $\mathbb{R}^3$  内的任意旋转矩阵可以用以下三个矩阵的内积的形式来表示:

$$\mathbf{R}(\psi, \theta, \varphi) = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_\psi} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_\theta} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}_\varphi}$$

其合并形式为:

$$\begin{bmatrix} \underbrace{\cos\theta \cos\psi}_{i_1 | \mathcal{R}_0} & -\cos\varphi \sin\psi + \sin\theta \cos\psi \sin\varphi & \sin\psi \sin\varphi + \sin\theta \cos\psi \cos\varphi \\ \cos\theta \sin\psi & \underbrace{\cos\psi \cos\varphi + \sin\theta \sin\psi \sin\varphi}_{j_1 | \mathcal{R}_0} & -\cos\psi \sin\varphi + \sin\theta \cos\varphi \sin\psi \\ -\sin\theta & \cos\theta \sin\varphi & \underbrace{\cos\theta \cos\varphi}_{k_1 | \mathcal{R}_0} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

角度  $\psi$ ,  $\theta$ ,  $\varphi$  就是欧拉角, 并将其分别称为进动角、章动角和自转角。而偏航角、俯仰角和横滚角则是一组常用术语, 分别对应于进动角、章动角和自转角。

**注释 1.1** 给定一个旋转矩阵  $\mathbf{R}$ , 可根据公式(1.7)很容易解出这三个欧拉角, 其公式如下:

$$\begin{cases} -\sin\theta = r_{31} \\ \cos\theta \sin\varphi = r_{32} & \cos\theta \cos\varphi = r_{33} \\ \cos\theta \cos\psi = r_{11} & \cos\theta \sin\psi = r_{21} \end{cases}$$

通过限定其取值范围  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\varphi \in [-\pi, \pi]$ ,  $\psi \in [-\pi, \pi]$ , 可得:

$$\theta = -\arcsin r_{31}, \quad \varphi = \operatorname{atan2}(r_{32}, r_{33}), \quad \psi = \operatorname{atan2}(r_{21}, r_{11})$$

此处,  $\operatorname{atan2}$  是二变量的反正切函数, 可由下式定义:



$$\theta = \text{atan2}(y, x) \Leftrightarrow \theta \in [-\pi, \pi] \quad \text{且} \quad \exists r > 0 \quad \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad (1.8)$$

### 1.2.2 欧拉矩阵的导数

用时间相关的欧拉角将一个旋转矩阵表示为：

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(\psi(t), \theta(t), \varphi(t))$$

在此，尝试在与  $\mathbf{R}(t)$  相关的坐标系中表示  $\dot{\mathbf{R}}(t)$  或其等效值  $\dot{\mathbf{R}}(t)\mathbf{R}^T(t)$ 。为此，当然要对表达式(1.7)逐项求导，但是其计算相当繁琐，此外，还存在所得表达式无法化简的风险。则有：

9

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T &= \frac{d}{dt}(\mathbf{R}_\psi \cdot \mathbf{R}_\theta \cdot \mathbf{R}_\varphi) \cdot \mathbf{R}_\varphi^T \cdot \mathbf{R}_\theta^T \cdot \mathbf{R}_\psi^T \\ &= (\dot{\mathbf{R}}_\psi \cdot \mathbf{R}_\theta \cdot \mathbf{R}_\varphi + \mathbf{R}_\psi \cdot \dot{\mathbf{R}}_\theta \cdot \mathbf{R}_\varphi + \mathbf{R}_\psi \cdot \mathbf{R}_\theta \cdot \dot{\mathbf{R}}_\varphi) \cdot \mathbf{R}_\varphi^T \cdot \mathbf{R}_\theta^T \cdot \mathbf{R}_\psi^T \\ &= \dot{\mathbf{R}}_\psi \cdot \mathbf{R}_\psi^T + \mathbf{R}_\psi \cdot \dot{\mathbf{R}}_\theta \cdot \mathbf{R}_\theta^T \cdot \mathbf{R}_\psi^T + \mathbf{R}_\psi \cdot \mathbf{R}_\theta \cdot \dot{\mathbf{R}}_\varphi \cdot \mathbf{R}_\varphi^T \cdot \mathbf{R}_\theta^T \cdot \mathbf{R}_\psi^T \end{aligned}$$

然而，根据式(1.2)可得：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{R}}_\psi \mathbf{R}_\psi^T = \text{Ad}(\dot{\psi} \mathbf{k}) = \dot{\psi} \text{Ad}(\mathbf{k}) \\ \dot{\mathbf{R}}_\theta \mathbf{R}_\theta^T = \text{Ad}(\dot{\theta} \mathbf{j}) = \dot{\theta} \text{Ad}(\mathbf{j}) \\ \dot{\mathbf{R}}_\varphi \mathbf{R}_\varphi^T = \text{Ad}(\dot{\varphi} \mathbf{i}) = \dot{\varphi} \text{Ad}(\mathbf{i}) \end{cases}$$

因此：

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T &= \dot{\psi} \cdot \text{Ad}(\mathbf{k}) + \dot{\theta} \cdot \mathbf{R}_\psi \cdot \text{Ad}(\mathbf{j}) \cdot \mathbf{R}_\psi^T + \dot{\varphi} \cdot \mathbf{R}_\psi \cdot \mathbf{R}_\theta \cdot \text{Ad}(\mathbf{i}) \cdot \mathbf{R}_\theta^T \cdot \mathbf{R}_\psi^T \\ &\stackrel{(1.3)}{=} \dot{\psi} \cdot \text{Ad}(\mathbf{k}) + \dot{\theta} \cdot \text{Ad}(\mathbf{R}_\psi \cdot \mathbf{j}) + \dot{\varphi} \cdot \text{Ad}(\mathbf{R}_\psi \cdot \mathbf{R}_\theta \cdot \mathbf{i}) \end{aligned} \quad (1.9)$$

注意其线性依赖于  $(\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi})$ 。

### 1.2.3 欧拉矩阵的旋转向量

考虑下述情况，一个刚体在坐标系  $\mathcal{R}_0$  中运动， $\mathcal{R}_1$  为刚体上固连的坐标系(如图 1-5 所示)。此处所选约定为造船与轮机工程师协会(SNAME)的一些相关约定。假设这两个坐标系都是标准正交的，令  $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(\psi(t), \theta(t), \varphi(t))$  为连接两个坐标系的旋转矩阵，则需得到该刚体相对于  $\mathcal{R}_0$  的瞬时旋转向量  $\boldsymbol{\omega}$ ，并将其表示为关于  $\psi, \theta, \varphi, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$  的函数。则有：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega} |_{\mathcal{R}_0} &\stackrel{(1.2)}{=} \text{Ad}^{-1}(\dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{R}^T) \\ &\stackrel{(1.9)}{=} \text{Ad}^{-1}(\dot{\psi} \cdot \text{Ad}(\mathbf{k}) + \dot{\theta} \cdot \text{Ad}(\mathbf{R}_\psi \cdot \mathbf{j}) + \dot{\varphi} \cdot \text{Ad}(\mathbf{R}_\psi \cdot \mathbf{R}_\theta \cdot \mathbf{i})) \\ &= \dot{\psi} \cdot \mathbf{k} + \dot{\theta} \cdot \mathbf{R}_\psi \cdot \mathbf{j} + \dot{\varphi} \cdot \mathbf{R}_\psi \cdot \mathbf{R}_\theta \cdot \mathbf{i} \end{aligned}$$

10

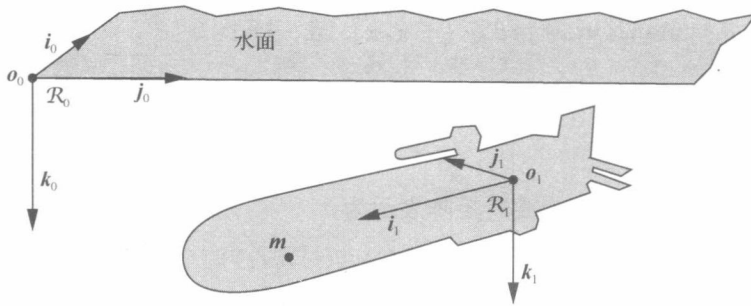


图 1-5 固连于机器人上的坐标系  $\mathcal{R}_1: (o_1, i_1, j_1, k_1)$

那么，在坐标系  $\mathcal{R}_0$  中计算出  $k$ 、 $R_\psi j$  以及  $R_\psi \cdot R_0 \cdot i$  之后，可得：

$$\omega |_{\mathcal{R}_0} = \dot{\psi} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \dot{\theta} \cdot \begin{pmatrix} -\sin\psi \\ \cos\psi \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{\varphi} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta \cos\psi \\ \cos\theta \sin\psi \\ -\sin\theta \end{pmatrix}$$

由此，可得到如下结果：

$$\omega |_{\mathcal{R}_0} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin\psi & \cos\theta \cos\psi \\ 0 & \cos\psi & \cos\theta \sin\psi \\ 1 & 0 & -\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

注意，当  $\cos\theta=0$  时，该矩阵是一个奇异矩阵。因此，必须确保不会有等于  $\pm \frac{\pi}{2}$  的俯仰角  $\theta$ 。

### 1.3 刚性机器人的运动学模型

通常可将一个机器人(飞机、潜艇或轮船)视为一个刚体，其输入为这些(切向和角)加速度。事实上，这些加速度都是在机器人运动之初所施加力的解析方程。在此，将考虑运动学模型的输入为切向加速度和角速度的情况，之所以考虑这种情况是因为这些量是可以直接测量(如果表示在该机器人的坐标系内)和直接控制的(即使较大型结构的一个旋转会消耗大量时间)。一个运动学模型的状态向量是由向量  $p=(p_x, p_y, p_z)$ 、三个欧拉角( $\psi, \theta, \varphi$ )和速度向量  $v_r$  组成的，其中向量  $p=(p_x, p_y, p_z)$  给出了表示在绝对惯性坐标系  $\mathcal{R}_0$  内的机器人的中心坐标，机器人的速度向量  $v_r$  则是表示在其自身坐标系内的。该系统的输入有两个：一为表示在其自身坐标系内的机器人中心的加速度  $a_r=a_{\mathcal{R}_1}$ ；二为表示在机器人坐标系  $\mathcal{R}_1$  内机器人相对于坐标系  $\mathcal{R}_0$  的旋转向量  $\omega_r=\omega_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0}|_{\mathcal{R}_1}=(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ 。因为机器人自身可通过其上安装的传感器去测量  $a$  和  $\omega$ ，所以较为常见的就是将这些量表示在

机器人坐标系中。因此就自然而然地将其表示在了机器人坐标系中。第一个状态方程为：

$$\dot{\mathbf{p}} \stackrel{(1.6)}{=} \mathbf{R}(\psi, \theta, \varphi) \cdot \mathbf{v}_r$$

11

为了表示  $\mathbf{v}_r$ ，对方程求导可得：

$$\ddot{\mathbf{p}} = \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{v}_r + \mathbf{R} \cdot \dot{\mathbf{v}}_r$$

其中  $\mathbf{R} = \mathbf{R}(\psi, \theta, \varphi)$ ，将其用另一种形式表示为：

$$\dot{\mathbf{v}}_r = \underbrace{\mathbf{R}^T \cdot \ddot{\mathbf{p}}}_{\mathbf{a}_r} - \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{v}_r \stackrel{(1.4)}{=} \mathbf{a}_r - \text{Ad}(\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_0|\mathcal{R}_1}) \cdot \mathbf{v}_r$$

因此：

$$\dot{\mathbf{v}}_r = \mathbf{a}_r - \boldsymbol{\omega}_r \wedge \mathbf{v}_r$$

上式构成第二个状态方程。最后，还需将  $\dot{\psi}$ ， $\dot{\theta}$ ， $\dot{\varphi}$  表示为一个关于状态变量的方程，其关系如下：

$$\boldsymbol{\omega}_{|\mathcal{R}_0} = \mathbf{R}(\psi, \theta, \varphi) \cdot \boldsymbol{\omega}_{|\mathcal{R}_1}$$

根据方程(1.10)，可得：

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sin\psi & \cos\theta \cos\psi \\ 0 & \cos\psi & \cos\theta \sin\psi \\ 1 & 0 & -\sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \mathbf{R}(\psi, \theta, \varphi) \cdot \boldsymbol{\omega}_r$$

通过在该表达式中提取向量( $\dot{\psi}$ ， $\dot{\theta}$ ， $\dot{\varphi}$ )，可得第三个状态方程。将如上三个状态方程联立起来，便可得到该机器人的运动学模型，如下式所示：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{R}(\psi, \theta, \varphi) \cdot \mathbf{v}_r \\ \dot{\mathbf{v}}_r = \mathbf{a}_r - \boldsymbol{\omega}_r \wedge \mathbf{v}_r \\ \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sin\varphi}{\cos\theta} & \frac{\cos\varphi}{\cos\theta} \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 1 & \tan\theta \sin\varphi & \tan\theta \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\omega}_r \end{cases} \quad (1.11)$$

12

在水平面上：对于一个在水平面上运动的机器人，有  $\psi = \theta = 0$ 。由式(1.11)可知  $\dot{\psi} = \omega_{r3}$ ， $\dot{\theta} = \omega_{r2}$ ， $\dot{\varphi} = \omega_{r1}$ 。在这种情况下，便有了一个  $\boldsymbol{\omega}_r$  各分量和欧拉角的微分之间的完美对应关系。同时也会有一些奇异的情况，例如当  $\theta = \pi/2$  时(这是机器人指向上方时的情形)，无法定义欧拉角的微分。但旋转向量通常不会存在这种奇异性，因此成为首选。

航位推测法：对于航位推测法(换言之，没有外部传感器)，通常会有一些非常精密的激光陀螺测试仪(旋转速度为 0.001deg/s)，这些仪器利用的是萨格纳克效应(在一个环形光纤绕其自身回转的过程中，光循行一个完整来回所花费的时间是依赖于其路径方向的)。使用三种光纤，那么这些陀螺测量仪就会产生向量  $\boldsymbol{\omega}_r = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ ，同时也会有一些能