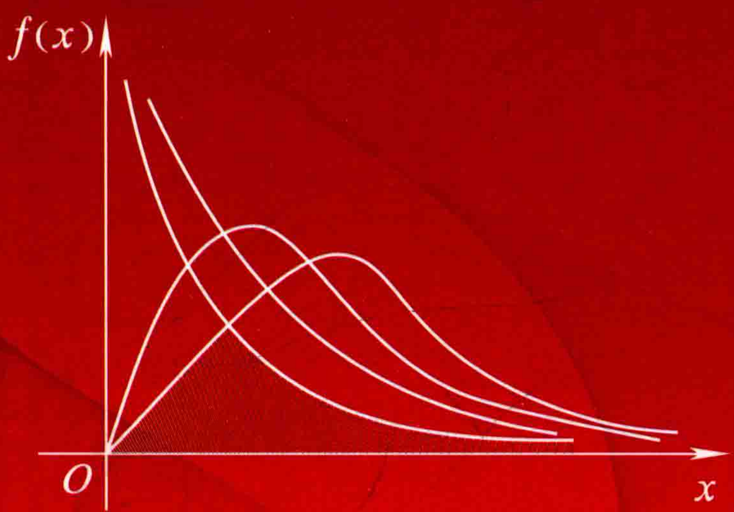
高等学校数学教材系列丛书



复变函数与积分变换

主编　贾君霞

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

高等学校数学教材系列丛书

复变函数与积分变换

主　编　贾君霞
副主编　田　瑞　彭　静

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书依据工科数学复变函数与积分变换教学大纲，结合该学科的发展趋势，在教学实践的基础上编写而成。本书主要内容分为七章，包括复数和复平面、解析函数、复变函数的积分、解析函数的级数表示法、留数、傅里叶变换和拉普拉斯变换。每一章都有小结，并配有一定数量的习题，书末附有习题参考答案。

本书适合作为高等学校理工科各专业的复变函数与积分变换教材，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换/贾君霞主编. —西安：西安电子科技大学出版社，2017.7
高等学校数学教材系列丛书
ISBN 978-7-5606-4532-2

Ⅰ.①复… Ⅱ.①贾… Ⅲ.①复变函数 ②积分变换 Ⅳ.①O174.5 ②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 114898 号

策　　划　秦志峰
责任编辑　杜　萍　秦志峰
出版发行　西安电子科技大学出版社(西安市太白南路 2 号)
电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071
网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com
经　　销　新华书店
印刷单位　陕西华沐印刷科技有限责任公司
版　　次　2017 年 7 月第 1 版　2017 年 7 月第 1 次印刷
开　　本　787 毫米×960 毫米　1/16　印张 12
字　　数　280 千字
印　　数　1～2000 册
定　　价　26.00 元
ISBN 978-7-5606-4532-2/O
XDUP 4824001-1

如有印装问题可调换
本社图书封面为激光防伪覆膜，谨防盗版。

前　言

复变函数与积分变换既是高等院校理工科专业的一门专业基础课，也是高等数学的理论推广，更是众多专业学科的学习基础，目前已被广泛地应用于自然科学的众多领域。

本书是依据高等院校复变函数与积分变换的教学大纲，并结合编者多年的教学实践编写的，书中立足于普通高等学校人才培养的需要，对内容进行了适度的约简，兼顾数学方法的物理意义和工程应用背景，以期达到通俗易懂、易教易学的目的。编者希望通过本书的学习，读者能初步掌握复变函数与积分变换的理论方法，并能够将其运用到自己的专业领域。

本书主要内容包括复数和复平面、解析函数、复变函数的积分、解析函数的级数表示法、留数、傅里叶变换和拉普拉斯变换。在学习过程中，读者需要注重与实变函数进行比较并分析、体会二者的联系和变化，从而达到融会贯通的效果。本书内容均是经过仔细筛选的，精简之余又保证了该课程的完整性。在教学过程中，教师还可根据学生具体情况再进行适当删减。

本书由贾君霞担任主编并编写第 1 章、第 3 章、第 4 章、第 5 章、第 7 章，田瑞编写第 2 章，彭静编写了第 6 章。本书在编写过程中得到了兰州交通大学电信基础教研室全体教师的支持，在此表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中难免存在疏漏，敬请广大读者批评指正。

编　者

2017 年 2 月

目　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第1章

复数和复平面

复变函数是自变量为复数的函数。本章将在中学阶段所学复数的基础上，对复数的概念和基本运算作简要的复习与补充，并介绍扩充复平面、曲线和区域的概念，为进一步的学习奠定基础。

1.1　复数及其运算

1.1.1　复数的概念及其表示

复数的产生和发展是数学史上奇特的一章，它不是按现在教材中描述的逻辑顺序建立起来的，而是从求解方程的实践过程中产生的。意大利学者卡当在1545年发表的《重要的艺术》一书中，第一次把负数的平方根写到公式(后人称之为卡当公式)中。欧拉在1777年发表的《微分公式》一文中，首次使用符号i作为虚数的单位。经过许多数学家的长期不懈的努力，才使得在数学领域游荡了200多年的“幽灵”——虚数揭去了神秘的面纱，显现出它的本来面目，成为了数系大家庭中的一员，从而使实数集扩充到了复数集，复数理论也被运用到了各个领域当中。

我们知道，方程 $x^2+1=0$ 在实数集中无解，为了解方程的需要，引入一个新数i，称为虚数单位。对虚数单位，做如下规定：

(1) $\mathrm{i}^2=-1$；

(2) i可以与实数在一起按同样的法则进行四则运算。

这样，方程 $x^2+1=0$ 就有两个根，即i和$-\mathrm{i}$。

对于任意两个实数 x 和 y，称 $z=x+\mathrm{i}y$ 或者 $z=x+y\mathrm{i}$ 为复数，其中，x 和 y 分别称为 z 的实部和虚部，记作：

$$x=\mathrm{Re}(z),\ y=\mathrm{Im}(z)$$

当 $x=0$，$y\neq0$ 时，$z=\mathrm{i}y$ 称为纯虚数；当 $y=0$ 时，$z=x+0\mathrm{i}$，把它看做实数 x。

两复数相等当且仅当它们的实部和虚部分别相等。一个复数 z 等于0，当且仅当它的实部和虚部同时等于0。

注意，两个实数可以比较大小，而两个复数不能比较大小，因为复数是无序的。

由于复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 由一对有序实数 (x,y) 唯一确定，它与直角坐标 xOy 平面上的点是一一对应的，和坐标原点到点 (x,y) 的向量也是一一对应的，所以可以用平面上的点和向量来表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$，如图 1-1 所示。在几何上称该复数 z 为点 z 或向量 $\boldsymbol{z}$，称表示复数的 xOy 平面为复平面，又简称该平面为 z 平面。其中，x 轴上的点表示的是实数，称为实轴；y 轴上的点表示的是纯虚数，称为虚轴；原点即 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}$，称为零向量。

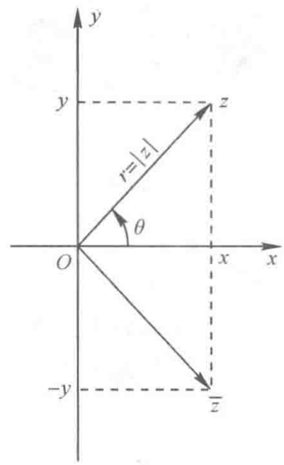


图 1-1

向量的长度称为复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的模或绝对值，记为 $|z|=r$。当 $z\neq0$ 时，把以正实轴为始边、以向量 $\boldsymbol{z}$ 为终边的角的弧度数称为复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 的辐角，记为 $\mathrm{Arg}z=\theta$。有

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ r=|z|=\sqrt{x^2+y^2} \tag{1.1.1}$$

注意，$z=0$ 的辐角不确定，$\mathrm{Arg}(0)$ 无意义。任一非零复数的辐角有无限多个值，这些值相差 2π 的整数倍，而满足条件 $-\pi<\theta\leqslant\pi$ 的辐角值是唯一的，称为辐角的主值，记为 $\arg z$。于是有

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots) \tag{1.1.2}$$

当复数位于不同象限时，可由下式确定其辐角主值：

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0,\ y>0\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0,\ y\geqslant0\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0,\ y<0\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,\ y<0\end{cases} \tag{1.1.3}$$

$z=x+\mathrm{i}y$ 是复数的代数表示式。当 $z\neq0$ 时，由式(1.1.1)和欧拉(Euler)公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$，可分别写出复数的三角表示式和指数表示式，分别如式(1.1.4)和式(1.1.5)所示。

$$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta) \tag{1.1.4}$$

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \tag{1.1.5}$$

【例 1.1.1】 求以下复数的模、辐角及辐角主值，并将其表示成指数形式。

(1) $1+\mathrm{i}$；(2) i；(3) -1；(4) $-1+\mathrm{i}$

解　(1)
$$|1+\mathrm{i}|=\sqrt{2}$$
$$\mathrm{Arg}(1+\mathrm{i})=\arctan 1+2k\pi=\frac{\pi}{4}+2k\pi \qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$
$$\arg(1+\mathrm{i})=\frac{\pi}{4}$$
$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

(2)
$$|\mathrm{i}|=1$$
$$\mathrm{Arg}(\mathrm{i})=\frac{\pi}{2}+2k\pi \qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$
$$\arg(\mathrm{i})=\frac{\pi}{2}$$
$$\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$$

(3)
$$|-1|=1$$
$$\mathrm{Arg}(-1)=\pi+2k\pi=(2k+1)\pi \qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$
$$\arg(-1)=\pi$$
$$-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$$

(4) $|-1+\mathrm{i}|=\sqrt{2}$，此时复数在第二象限，需对辐角进行修正，因此
$$\mathrm{Arg}(-1+\mathrm{i})=\arctan(-1)+\pi+2k\pi=\frac{3}{4}\pi+2k\pi \qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$$
$$\arg(-1+\mathrm{i})=\frac{3\pi}{4}$$
$$-1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$$

1.1.2　复数的运算

1. 代数运算

设有两个复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，则两个复数的四则运算规则如下：

两个复数的和与差：
$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2)$$
两个复数的积：
$$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1+x_1y_2)$$
两个复数的商：
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$$
其中，$z_2\neq\mathbf{0}$。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

另外，因为复数可以由向量表示，所以复数的和与差可以按照向量的平行四边形法则来表示，易知：

$$|z_2+z_1|\leqslant|z_2|+|z_1|,\ |z_2-z_1|\geqslant||z_2|-|z_1|| \tag{1.1.6}$$

对于非零复数 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$ 和 $z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$，利用三角函数的和、差角公式，可以得到 z_1z_2 和$\dfrac{z_1}{z_2}$的三角形式表示式分别为

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)] \tag{1.1.7}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)] \tag{1.1.8}$$

所以有

$$|z_1z_2|=r_1r_2=|z_1||z_2| \tag{1.1.9}$$

$$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2 \tag{1.1.10}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{r_1}{r_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|} \tag{1.1.11}$$

$$\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2 \tag{1.1.12}$$

式(1.1.10)和式(1.1.12)两边都是多值的，它们成立是指等式两边辐角值的集合相等。由于两个主值辐角的和或差可能超出主值的范围，因此，这两个等式对于辐角的主值而言不一定成立，所以不能写成 $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2$ 或 $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)=\arg z_1-\arg z_2$。

2. 复数的乘幂与方根

当 $z_1=z_2=z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$时，对于任意自然数 n，由式(1.1.7)有

$$z^n=r^n[\cos(n\theta)+\mathrm{i}\sin(n\theta)] \tag{1.1.13}$$

式(1.1.13)表示 n 个相同复数 z 的乘积，称为 z 的 n 次幂。

当 $r=1$ 时，就是棣莫佛公式：

$$(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta \tag{1.1.14}$$

利用公式(1.1.13)可以求方程 $w^n=z$ 的根 w，其中，z 为已知的复数。当 z 的值不等于零时，就有 n 个不同的 w 值与之对应，每一个这样的值称为 z 的 n 次根，记作$\sqrt[n]{z}$，也即 $w=\sqrt[n]{z}$ 。

令 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，$w=\rho(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$，将其代入 $w^n=z$，有

$$w^n=\rho^n(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi)=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=z$$

于是 $\rho^n=r$，$\cos n\varphi=\cos\theta$，$\sin n\varphi=\sin\theta$。显然，后两式成立的条件是 $n\varphi=\theta+2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，故

$$\rho=r^{\frac{1}{n}},\ \varphi=\frac{\theta+2k\pi}{n}$$

所以

$$w=\sqrt[n]{z}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \tag{1.1.15}$$

当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时，分别对应 n 个相异的根：

$$w_0=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{n}\right)$$

$$w_1=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2\pi}{n}\right)$$

$$\vdots$$

$$w_{n-1}=r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2(n-1)\pi}{n}\right)$$

当 k 取其他整数时，这些根会重复出现。容易发现，这些根的模值相同，相邻两个根的夹角相同，所以这 n 个根是等间隔地分布在以原点为圆心、半径为 $r^{\frac{1}{n}}$ 的圆周上，或者说这 n 个根是以原点为圆心、半径为 $r^{\frac{1}{n}}$ 的圆的内接正多边形的顶点。

【例 1.1.2】 求 5 次单位根。

解　5 次单位根即求 1 的 5 次根。

$$1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}$$

由式(1.1.15)可知：

$$w_k=\cos\left(\frac{2k\pi}{5}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi}{5}\right)\qquad(k=0\sim4)$$

所以

$$w_0=1,\ w_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{5}\pi},\ w_2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{4}{5}\pi},\ w_3=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{6}{5}\pi}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{4}{5}\pi},\ w_4=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8}{5}\pi}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2}{5}\pi}$$

【例 1.1.3】 求 $z=1+\mathrm{i}\sqrt{3}$ 的 4 次根。

解　$z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$，即

$$r=2,\ \theta=\frac{\pi}{3}$$

由式(1.1.15)知：

$$w_k=2^{\frac{1}{4}}\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2k\pi}{4}\right)\quad(k=0\sim3)$$

所以

$$w_0=2^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}},\ w_1=2^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{12}},\ w_2=2^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}=2^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}},\ w_3=2^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{19\pi}{12}}=2^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}$$

3. 共轭复数

实部相同而虚部绝对值相等且符号相反的两个复数称为共轭复数，记为 $\bar{z}$。

共轭复数的运算按照以下规律进行：

(1) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$，$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$，$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$；

(2) $\overline{\overline{z}} = z$；

(3) $|\overline{z}| = |z|$；

(4) $z\overline{z} = |z|^2$；

(5) $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$，$z - \overline{z} = 2\mathrm{Im}(z)$。

上述公式的证明请读者自行完成。

1.1.3 扩充复平面及复球面

为了建立扩充复平面的概念，引入复数的另一种几何表示法——用球面上的点来表示复数。这个球面与复平面切于原点 $z=0$，球面上的点 S 与原点重合，通过 S 作垂直于复平面的直线与球面相交于另一点 N。N 称为北极，S 称为南极。

对于复平面内任何一点 z，如果用一直线段把北极 N 和点 z 连起来，那么该直线段一定与球面相交于异于 N 的唯一一点 P。这样，就建立了复平面上的有限点 z 与球面上的点 $P(P \neq N)$之间的一一对应关系，如图 1-2 所示。当点 z 在复平面上沿任意方向趋于无穷远时，即 $|z| \to +\infty$，对应球面上的点 P 就趋向北极 N。因此，为了使点 N 对应复平面上的唯一一个点，应当把复平面的各个方向上趋向无穷远的极限点看做一个点，称这个点为复平面上的无穷远点，记它和它所对应的复数为∞。这样一来，球面上的每一个点，就有唯一的一个复数与它对应，这样的球面称为复球面。

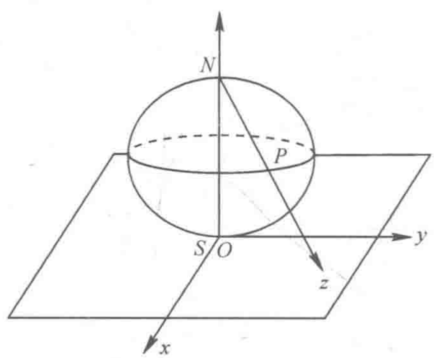


图 1-2

我们把包括无穷远点在内的复平面称为扩充复平面，不包括无穷远点在内的复平面称为有限复平面，或者简称复平面。对于复数∞来说，实部、虚部与辐角均无意义，但它的模为正无穷大，即 $|\infty| = +\infty$。这样，对其他每一个复数都有 $|z| < +\infty$。对于复数∞的四则

运算作如下规定：

(1) 加法：

$$\alpha+\infty=\infty+\alpha=\infty \quad (\alpha\neq\infty)$$

(2) 减法：

$$\alpha-\infty=\infty-\alpha=\infty \quad (\alpha\neq\infty)$$

(3) 乘法：

$$\alpha\cdot\infty=\infty\cdot\alpha=\infty \quad (\alpha\neq 0)$$

(4) 除法：

$$\frac{\alpha}{\infty}=0,\qquad \frac{\infty}{\alpha}=\infty \quad (\alpha\neq\infty),\qquad \frac{\alpha}{0}=\infty \quad (\alpha\neq 0)$$

今后，本书中如无特殊说明，所谓“平面”一般指有限复平面，所谓“点”一般指有限复平面上的点。

1.2　复平面上的曲线和区域

1.2.1　复平面上曲线方程的表示

复平面上的曲线方程有两种形式，即直角坐标形式和参数方程形式，其中直角坐标形式也可以用复数形式来表示。

1. 直角坐标形式

直角坐标形式的一般方程即 $F(x,y)=0$ 或者 $F(z)=0$，二者可以相互转换。将关系式 $z=x+\mathrm{i}y$ 和 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$ 代入 $F(z)=0$，可得到 $F(x,y)=0$ 的形式；而将关系式 $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$ 和 $y=\dfrac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$ 代入 $F(x,y)=0$，即可转化为复数形式 $F(z)=0$。

【例 1.2.1】 将通过两点 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$ 和 $z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 的直线用复数形式的方程来表示。

解　通过两点 (x_1,y_1) 与 (x_2,y_2) 的直线方程为

$$\begin{cases}x=x_1+t(x_2-x_1)\\ y=y_1+t(y_2-y_1)\end{cases},\quad t\in(-\infty,+\infty)$$

所以它的复数形式的参数方程为

$$z=z_1+t(z_2-z_1),\quad t\in(-\infty,+\infty)$$

故由 z_1 到 z_2 的直线段的参数方程为

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

若取 $t = \dfrac{1}{2}$，得线段 $\overline{z_1 z_2}$ 的中点坐标为

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

【例 1.2.2】 求下列方程所表示的曲线。

(1) $|z+\mathrm{i}|=2$；　(2) $|z+2-2\mathrm{i}|=|z+2|$；　(3) $\mathrm{Im}(1+\mathrm{i}+\bar{z})=2$

解　(1) 方程 $|z+\mathrm{i}|=2$ 表示所有与点 $-\mathrm{i}$ 距离为 2 的点的轨迹，即表示中心为 $-\mathrm{i}$、半径为 2 的圆。

设 $z = x + \mathrm{i}y$，则

$$|x+(y+1)\mathrm{i}|=2,\ \sqrt{x^2+(y+1)^2}=2$$

整理得圆方程为

$$x^2+(y+1)^2=4$$

(2) $|z+2-2\mathrm{i}|=|z+2|$ 表示所有与点 $-2+2\mathrm{i}$ 和点 -2 距离相等的点的轨迹，故方程表示的曲线就是连接点 $-2+2\mathrm{i}$ 和点 -2 的线段的垂直平分线。

设 $z = x + \mathrm{i}y$，有

$$|x+y\mathrm{i}+2-2\mathrm{i}|=|x+y\mathrm{i}+2|$$

化简后得

$$y=1$$

(3) $\mathrm{Im}(1+\mathrm{i}+\bar{z})=2$，设 $z=x+\mathrm{i}y$，有

$$1+\mathrm{i}+\bar{z}=1+x+(1-y)\mathrm{i}$$

$$\mathrm{Im}(1+\mathrm{i}+\bar{z})=1-y=2$$

故所求曲线方程为

$$y=-1$$

2. 参数方程形式

设 $z=x+\mathrm{i}y$，$z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$，则由两个复数相等的定义得曲线 C 的参数方程：

$$x=x(t) \text{ 且 } y=y(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta) \tag{1.2.1}$$

等价于其复数形式

$$z=x(t)+\mathrm{i}y(t) \text{ 或 } z=z(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta) \tag{1.2.2}$$

【例 1.2.3】 指出下列方程表示什么曲线。

(1) $z=(1+\mathrm{i})t+z_0 \quad (-\infty<t<\infty)$

(2) $z=(1+\mathrm{i})t+z_0 \quad (t>0)$

解 设 $z=x+\mathrm{i}y$，$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$，则由 $z=(1+\mathrm{i})t+z_0$ 知

$$x=x_0+t \quad 且 \quad y=y_0+t$$

可见，方程(1)表示过点 z_0 且其方向平行于向量 $1+\mathrm{i}$ 的直线。

由参数 t 的范围知，方程(2)是方程(1)中直线的半直线，由于点 z 满足：

$$\arg(z-z_0)=\arg[(1+\mathrm{i})t]=\frac{\pi}{4} \qquad (t>0)$$

因此，方程(2)是从 z_0 出发倾角为 $\frac{\pi}{4}$ 的射线(不包含 z_0)。

显然，方程(2)可简写为

$$\arg(z-z_0)=\frac{\pi}{4}$$

另外，对于圆周的参数方程：

$$\begin{cases} x=x_0+r\cos t \\ y=y_0+r\sin t \end{cases} \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)$$

令

$$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$$

其等价的复数形式为

$$z=z_0+r(\cos t+\mathrm{i}\sin t) \quad 或 \quad z=z_0+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

1.2.2 连续曲线、简单曲线和光滑曲线

设曲线 C 为 $z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，若 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，即 $z(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续，则称曲线 C 为连续曲线。

对于曲线 C，当 $\alpha\leqslant t_1<t_2<\beta$ 时，总有 $z(t_1)\neq z(t_2)$，则该连续曲线在图形上无重点，称它为简单曲线或 Jordan 曲线。如果简单曲线的起点与终点重合，即 $z(\alpha)=z(\beta)$，则称为简单闭曲线。

若曲线 C 为 $z=z(t)$ $(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$，其中，$z'(t)=x'(t)+\mathrm{i}y'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续且 $z'(t)\neq 0$，则称曲线 C 为光滑曲线。由有限条光滑曲线所连接成的曲线称为按段光滑曲线。显然，直线、圆周、椭圆、抛物线等都是光滑曲线，而折线、多边形的边界等都是按段光滑曲线。

1.2.3 平面点集和区域

为了研究复变函数，我们会讨论复变数的变化范围，这个范围就是区域。本节主要介绍一些相关的概念。

1. 平面点集的相关概念

平面上以 z_0 为中心、δ(任意的正数)为半径的圆：

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com