新世纪高等学校规划教材·数学系列

应用数学基础
概率论与数理统计

陈珍培 周轩伟◎主编

YINGYONG SHUXUE JICHU，
GAILVLUN YU SHULI TONGJI

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

新世纪高等学校规划教材 · 数学系列

应用数学基础
概率论与数理统计

陈珍培　周轩伟◎主编

YINGYONG SHUXUE JICHU
GAILVL[illegible] TONGJI

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

应用数学基础．概率论与数理统计/陈珍培，周轩伟主编．
—北京：北京师范大学出版社，2016.6
新世纪高等学校规划教材·数学系列

ISBN 978-7-303-21072-5

Ⅰ.①应… Ⅱ.①陈… ②周… Ⅲ.①应用数学-高等学校-教材 ②概率论-高等学校-教材 ③数理统计-高等学校-教材
Ⅳ.①O29 ②O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 183039 号

营销中心电话　010-62978190　62979006
北师大出版社科技与经管分社　www.jswsbook.com
电子信箱　jswsbook@163.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com
北京市海淀区新街口外大街 19 号
邮政编码：100875

印　　刷：北京京师印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：730 mm×980 mm　1/16
印　　张：10
字　　数：214 千字
版　　次：2016 年 6 月第 1 版
印　　次：2016 年 6 月第 1 次印刷
定　　价：20.00 元

策划编辑：雷晓玲　　责任编辑：雷晓玲
美术编辑：刘　超　　装帧设计：刘　超
责任校对：赵非非　　责任印制：赵非非

内容提要

本教材主要内容有：随机事件及其概率，随机变量及其数字特征，随机向量及其数字特征，参数的点估计，参数的区间估计，假设检验，回归分析简介。

本教材可作为应用型高校工科、经济、管理本科生概率论与数理统计课程的教材。讲授本教材约需 32 课时，带“ * ”的内容可供课时较多时选用，或者有兴趣的读者参考。

前 言

本教材是根据应用型院校的特点编写的，着力于介绍基本概念、基本理论与基本方法，突出基本思想方法和实际应用，强调概念的直观性和基本方法的应用性。本教材编写遵循以下原则：

一是突出基础知识，弱化理论分析。根据应用型院校的培养目标，本教材对传统知识体系做了较大的调整，充分兼顾学生的学习基础与学习兴趣。

二是突出实际应用，淡化抽象推导。本教材安排了相当一部分来自工程技术与日常生活方面应用的例子，具有较强的时代气息，增加了教材的趣味性与吸引力。对于证明技巧较高的定理，则只给出结论，证明过程省略。

三是精简内容，适应少课时教学。本教材适合应用型院校中对概率论与数理统计理论要求相对较低、课时较少的相关专业，本教材按32课时数编写。

本教材与传统教材相比，在内容安排与处理技巧方面具有以下特点：

第1章介绍概率论的基本概念。内容编排与传统教材没有太大的变化，主要是介绍概率定义、古典概型、几何概型、全概率公式、独立事件和伯努利试验，主要目的是为随机变量内容作准备。

第2章讨论随机变量及其数字特征的有关内容。其中离散型随机变量的内容主线为：分布列→数字特征(期望和方差)→常用随机变量；连续型随机变量的内容主线为：密度函数→数字特征→常用随机变量→随机变量函数的分布。

第3章讨论随机向量及其数字特征的有关内容。其中二维离散型随机向量的内容主线为：联合分布列→数字特征(协

方差和相关系数)；二维连续型随机向量的内容主线为：联合密度函数→数字特征(协方差和相关系数)→常用随机向量→随机向量函数的分布→大数定律与中心极限定理。在讨论随机向量函数的分布时，给出了 t 分布和 χ^2 分布的密度函数(本书没有提及 F 分布)。通过对传统教材内容主线的调整，授课时间得到了节省。

第 4～7 章讨论数理统计的有关内容。内容的主线为：点估计→区间估计→假设检验→回归分析。其中统计量的分布不作单独讨论，而是将其分散到区间估计的内容中。考虑到课时数的限制，区间估计和假设检验都是针对双边的情形进行讨论，单边的情形没有提及。另外，本教材对双样本的统计推断只介绍均值差的区间估计和检验，而没有涉及方差比的区间估计和检验。

本教材例题习题连贯配套，图形精致准确，赏心悦目。

本教材虽然经过认真讨论、修改及校对，但是仍会存在一些疏漏与不妥之处，恳请各位专家、同行和读者批评与指正。

编　者

2016 年 6 月

目　录

第 1 章　随机事件及其概率

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律的学科. 在工程技术、管理科学和经济活动等领域有着广泛应用. 本章介绍的随机事件及其概率是概率论中最基本、最重要的概念之一.

1.1　随机事件

1.1.1　随机试验、样本点与样本空间

在概率论中,把满足以下条件的试验称为**随机试验**,简称**试验**,记为 E.

(1) 试验在相同条件下是可重复的;

(2) 试验的全部可能结果不止一个,且都是事先可以知道的;

(3) 每一次试验都会出现上述可能结果中的某一个结果,至于是哪一个结果则事前无法预知.

试验 E 的每一个结果称为**样本点**,用希腊字母 ω 表示,全体样本点的集合称为**样本空间**,用大写希腊字母 Ω 表示. 样本空间 Ω 的子集 A 称为**随机事件**,简称**事件**. 事件是概率论中最基本的概念,通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 或 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 表示.

按照上述约定,试验中事件 A 发生与出现 A 中的某个样本点 ω 是等价的. 空集 $\varnothing$ 是 Ω 的子集,由于 $\varnothing$ 中没有样本点,永远不可能发生,所以 $\varnothing$ 是**不可能事件**. Ω 也是样本空间 Ω 的子集,它包含了所有的样本点,因而总是会发生的,故称 Ω 是**必然事件**.

例如,在掷一枚骰子的试验中,用 ω_i 表示掷出 i 点. 称这 6 个结果是试验的样本点,样本空间为

$$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4,\omega_5,\omega_6\},$$

而出现奇数点这一事件可表示为

$$A=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}.$$

上述试验的样本空间也可直观地表示为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

例 1.1 从装有 3 个白球（编号为 1,2,3）与 2 个黑球（编号为 4,5)的袋中任取 2 个球,试观察取出 2 个球的号码,写出试验的样本空间及下列事件：

(1) 取到的两球都是白球,表示为事件 A;

(2) 取到的两球为一个白球和一个黑球,表示为事件 B.

解 用 ω_{ij} 表示“取出第 i 号与第 j 号球”（$1\leqslant i<j\leqslant 5$),于是样本空间是由 $C_5^2=10$ 个样本点构成的集合

$$\Omega=\{\omega_{12},\omega_{13},\omega_{14},\omega_{15},\omega_{23},\omega_{24},\omega_{25},\omega_{34},\omega_{35},\omega_{45}\},$$

(1) $A=\{\omega_{12},\omega_{13},\omega_{23}\}$,

(2) $B=\{\omega_{14},\omega_{15},\omega_{24},\omega_{25},\omega_{34},\omega_{35}\}$.

1.1.2 随机事件的关系及运算

由前面的讨论知,事件是样本空间的某个子集,事件经过集合运算得到的结果还是事件,这样事件的运算可以借用集合的运算符号表示.

1. 事件的包含

若事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生,则称事件 A 包含于事件 B,记 $A\subset B$.

2. 事件相等

若事件 A,B 相互包含,即 A,B 的样本点完全一样,则称事件 A 和 B 相等,记 $A=B$.

3. 事件的并

A 和 B 至少一个发生,记 $A\cup B$,如图 1-1(a)所示.

推广：$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 发生表示至少有一个 $A_i(1\leqslant i\leqslant n)$发生,

$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 发生表示至少有一个 $A_i(i=1,2,\cdots)$发生.

4. 事件的交(积)

A 和 B 同时发生,记 $A\cap B$ 或 AB,如图 1-1(b)所示.

推广：$\bigcap\limits_{j=1}^{n}A_j$ 发生表示 $A_i(1\leqslant i\leqslant n)$都发生,

$\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}A_j$ 发生表示 $A_i(i=1,2,\cdots)$都发生.

5. 事件的差

A 发生而 B 不发生,记 $A-B$, 如图 1-1(c)所示.

6. 互不相容事件

当事件 $AB=\varnothing$时，称事件 A 和 B 不相容，或者 A 和 B 互斥，即 A 和 B 不可能同时发生. 对于多个事件 $A_1,A_2,\cdots$，两两不相容是指 $A_iA_j=\varnothing, i\neq j$，也称互不相容，或者两两互斥.

7. 对立事件

若 $AB=\varnothing$，且 $A\cup B=\Omega$，称 A,B 是互为对立事件，记 $B=\overline{A}$. 显然 $\overline{A}$ 和 A 是互斥的，如图 1-1(d)所示.

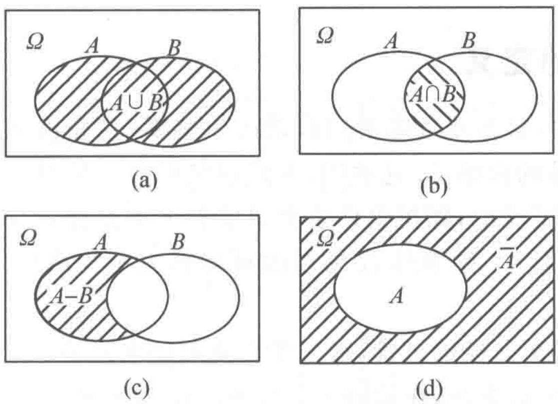

图 1-1　事件关系示意图

注　(1)当 $AB=\varnothing$时，也用 $A+B$ 表示 $A\cup B$，

(2)$A-B=A\overline{B}$.

事件的运算公式就是集合的运算公式，例如：

(1) $A\cup B= B\cup A$；$AB=BA$；

(2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；$(AB)C=A(BC)$；

(3) $A(B\cup C)=(AB)\cup(AC)$；$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$；

(4) $A\cup B=A+\overline{A}B$；$A=AB+A\overline{B}$；

(5) $\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$；$\overline{A\cup B}=\overline{A}\ \overline{B}$.

公式 (5) 可推广到多个事件的情形，即

$\overline{A_1A_2\cdots A_n}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\cdots\cup\overline{A_n}$；

$\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n}=\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdots\overline{A}_n$.

公式(5)也称反演律或者摩尔根定律.

例 1.2　掷一颗骰子，观察点数，令 A 表示掷出奇数点，B 表示掷出点数不超过 3，C 表示掷出点数大于 2，用样本点集合表示下列事件：

$$A\cup B, B\cup C, AB, A-B, B-A.$$

解 样本空间为 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$，事件 A,B,C 分别为

$$A=\{1,3,5\}, B=\{1,2,3\}, C=\{3,4,5,6\},$$

于是

$$A\cup B=\{1,2,3,5\}, B\cup C=\Omega, AB=\{1,3\}, A-B=\{5\}, B-A=\{2\}.$$

1.2 古典概型和几何概型

1.2.1 概率的定义

在购买彩票时，常常要考虑不同彩票的中奖率；在分析某批产品的质量时，要关注这一批产品的合格率. 这表明，人们已经形成一种共识：尽管随机事件有随机性，但在一次试验中，随机事件发生可能性大小是客观存在的，并且是可以度量的. 在随机试验中，称事件 A 出现的可能性大小为事件 A 的**概率**，记为 $P(A)$.

为了能够描述更复杂的试验，很多学者使用概率的统计定义.

设 A 是试验 E 的事件，在相同的条件下将试验 E 独立重复 n 次，这 n 次试验中事件 A 发生了 m 次，称

$$f_n=\frac{m}{n}$$

为 n 次重复试验中事件 A 发生的频率. 当 $n\to\infty$ 时，f_n 越来越稳定在数 p 的附近，那么 p 应该就是事件 A 的概率 $P(A)$，当 n 充分大时，f_n 可以看成是概率的近似值.

为了对概率进行科学的定义，数学家和统计学家做了不懈的努力，直到 20 世纪 30 年代，苏联数学家柯尔莫哥洛夫提出了概率的公理化定义.

定义 1.1 设试验 E 的样本空间为 Ω，若对任意事件 $A\subset\Omega$，有实数 $P(A)$ 与其对应，且 $P(A)$ 满足下面 3 个条件：

(1) 非负性，$P(A)\geqslant 0$；

(2) 规范性，$P(\Omega)=1$；

(3) 可列可加性，对两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则称 $P(A)$ 是事件 A 的概率.

定义 1.1 中的 3 个条件称为概率的**公理化条件**. 这里所谓的公理化就是：作为概率就一定满足这 3 个条件，反过来只要 P 满足这 3 个条件，P 就是概率. 条件(3)中的"可列"一词是指集合的个数或运算的次数可以依次排列起来，或者说凡是与自然数集建立一一对应的集合是可列的.

1.2.2　概率的性质

概率 P 具有以下性质：

(1) 如果 A,B 互不相容，则 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$；

(2) $P(A)+P(\overline{A})=1$；

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n);$$

(4) $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$；

(5) $P(\varnothing)=0$，即不可能事件的概率为零；

(6) $P(A-B)=P(A)-P(AB)$；

(7) 单调性：若 $B\subset A$，则 $P(B)\leqslant P(A)$.

下面予以简单的说明：

(1)由定义 1.1 中的条件(3)可直接得到性质(1)；

(2)由 $A+\overline{A}=\Omega$ 及性质(1)得到 $P(A)+P(\overline{A})=1$；

(3)由性质(1)连续使用 $n-1$ 次，即可得性质(3)；

(4)由 $A=AB+A\overline{B}$ 及性质(1)得到 $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$；

(5)由性质(1)得到 $P(\varnothing)+P(\Omega)=P(\Omega)$，于是 $P(\varnothing)=0$；

(6)由 $A=AB+(A-B)$及性质(1)得到 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$；

(7)由 $B\subset A$ 可得 $AB=B$，所以

$$P(A)-P(B)=P(A)-P(AB)=P(A-B)\geqslant 0,$$

从而得到　$P(B)\leqslant P(A)$.

定理 1.1 (概率的加法公式)　设随机事件 $A,B\subset\Omega$，则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB). \tag{1.1}$$

证明　如图 1-2 所示，由于 $A\cup B=(A-B)\cup B$，且 $A-B,B$ 互不相容，所以

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A-B)+P(B)\\&=P(A)-P(AB)+P(B)\\&=P(A)+P(B)-P(AB).\end{aligned}$$

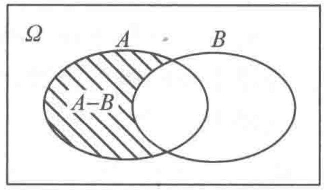

图 1-2　定理 1.1 证明示意图

上面的公式可以推广为

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC)$.

例 1.3 设 A,B 两个事件满足 $P(A)=P(B)=0.4,P(A\cup B)=0.5$,求 $P(A-B)$.

解 由式(1.1)可得

$$0.5=0.4+0.4-P(AB),$$

所以

$$P(AB)=0.3,$$

从而有

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.4-0.3=0.1.$$

1.2.3 古典概型

下面先讨论具有以下特征的随机试验:

(1) 试验的样本点只有有限个;

(2) 每一个样本点出现是等可能的.

若用 $|\Omega|$ 表示样本空间 Ω 包含的样本点个数,$|A|$ 表示事件 A 包含的样本点个数,则 A 的概率为

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}, \tag{1.2}$$

称满足式(1.2)的概率模型为**古典概型**.

例 1.4 抛掷一颗匀质骰子,B 表示出现的点数大于 4,求 $P(B)$.

解 样本空间 $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$,$B=\{5,6\}$,则 $|\Omega|=6$,$|B|=2$,所以

$$P(B)=\frac{|B|}{|\Omega|}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

在古典概型的计算中,经常用到排列数和组合数的计算,关于排列数与组合数的计算可以参考本章的补充知识点.

例 1.5 假设袋中有 5 个大小相同的小球,其中 2 个白球 3 个黑球,现从中任意抽取 2 个,求恰好抽到 1 个白球和 1 个黑球的概率.

分析 在概率论中所说的"任意抽取"是指每个对象等可能地被抽到.为了体现样本点的等可能性,将 2 个白球标为(1,2),3 个黑球标为(3,4,5),此时样本空间为

$$\Omega=\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5)\}$$

设 A 表示抽到 1 个白球和 1 个黑球,则

$$A=\{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5)\}.$$

这样就很容易看出 Ω 和 A 中样本点的数量. 但为了简便，在解决古典概型问题时，一般不必把 Ω 和 A 中的样本点罗列出来，而是直接计算 $|\Omega|$，$|A|$.

解　因为

$$|\Omega|=C_5^2=\frac{5\times4}{1\times2}=10,\ |A|=C_2^1C_3^1=2\times3=6,$$

所以

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{6}{10}=0.6.$$

例 1.6　设在 100 件产品中，有 4 件次品，其余均为正品，求

(1) 这批产品的次品率；

(2) 任取 3 件，全是正品的概率；

(3) 任取 3 件，恰好有 2 件正品的概率.

解　设 A 表示任取 1 件产品是次品，B 表示任取 3 件全是正品，D 表示任取 3 件恰好有 2 件正品.

(1) 记样本空间为 Ω'，则 $|\Omega'|=100$，显然 $|A|=4$，所以

$$P(A)=\frac{4}{100}=0.04.$$

(2) 记样本空间为 Ω''，则 $|\Omega''|=C_{100}^3$，而 $|B|=C_{96}^3$，故

$$P(B)=\frac{C_{96}^3}{C_{100}^3}\approx0.8836.$$

(3) 记样本空间为 Ω'''，则 $|\Omega'''|=C_{100}^3$，而 $|D|=C_{96}^2C_4^1$，故

$$P(D)=\frac{C_{96}^2C_4^1}{C_{100}^3}\approx0.1128.$$

例 1.7　在 $1,2,\cdots,100$ 中任取一数，求取到的数能被 2 或 3 整除的概率.

解　用 A 表示取到的数能被 2 整除，用 B 表示取到的数能被 3 整除，则 AB 表示取到的数同时能被 2 和 3 整除，即能被 6 整除，$A\cup B$ 表示取到的数能被 2 或 3 整除. 由题意知

$$P(A)=0.5,P(B)=0.33,P(AB)=0.16,$$

根据概率加法公式得

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.5+0.33-0.16=0.67.$$

例 1.8　设一年有 365 天，某班有 n 位同学($n<365$)，求至少有两人同一天过生日的概率.

解　设 M 表示 n 个人中至少有两人同生日，则 $\overline{M}$ 表示 n 个人中没有人同生日，由于每个人的生日等可能出现在 365 天中，因此