俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

# Smirnov Advanced Mathematics (Volume IV(2))

# 斯米尔诺夫高等数学

## （第四卷·第二分册）

[俄罗斯] 斯米尔诺夫 著　　斯米尔诺夫高等数学编译组 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

俄罗斯数学精品译丛

“十二五”国家重点图书

# 斯米尔诺夫高等数学

Smirnov Advanced Mathematics (Volume IV (2))

（第四卷·第二分册）

[俄罗斯] 斯米尔诺夫 著

斯米尔诺夫高等数学编译组 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

黑版贸审字 08 - 2016 - 040 号

## 内容简介

本书共分二章：偏微分方程的一般理论，边值问题. 主要介绍了一阶方程、高阶方程、方程组、椭圆型方程等相关内容. 理论部分叙述扼要，应用部分叙述详尽.

本书适合于高等院校相关专业师生参考.

图书在版编目(CIP)数据

斯米尔诺夫高等数学. 第四卷. 第二分册/(俄罗斯)斯米尔诺夫著；斯米尔诺夫高等数学编译组译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2018. 3
ISBN 978 - 7 - 5603 - 6519 - 0

Ⅰ. ①斯…　Ⅱ. ①斯…　②斯…　Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 050717 号

书名：Курс высшей математики
作者：В. И. Смирнов


策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　李宏艳
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451 - 86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 27.75　字数 520 千字
版　　次　2018 年 3 月第 1 版　2018 年 3 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978 - 7 - 5603 - 6519 - 0
定　　价　88.00 元

◎目录

# 偏微分方程的一般理论

第3章

## §1 一阶方程

### 99. 具有两个自变量的线性方程

我们已不止一次地遇到含有未知函数偏导数的各种类型的微分方程，它们常是一些形状很特殊的方程，是从数学物理的具体问题中产生的. 本章的目的，要阐明偏微分方程的一般理论，而我们的叙述就从一阶方程的理论研究开始.

一个含自变量 $x_1,\cdots,x_n$ 的未知函数 $u$ 的一阶方程的形状为

$$F(x_1,\cdots,x_n,u,p_1,\cdots,p_n)=0$$

其中 $x_1,\cdots,x_n$ 是自变量，而 $p_k=u_{x_k}$ 是未知函数 $u$ 关于各自变量的偏导数. 我们首先研究关于偏导数 $p_k$ 是线性的方程，也就是下面形状的方程

$$a_1(x_1,\cdots,x_n,u)p_1+\cdots+a_n(x_1,\cdots,x_n,u)p_n=c(x_1,\cdots,x_n,u) \tag{1}$$

而系数 $a_k$ 和自由项 $c$ 都是所有自变量 $x_k$ 和未知函数 $u$ 的给定的函数. 因为函数 $u$ 本身在系数和自由项中可以任意方式出现，有时说这样的方程不是线性的，而叫作准线性方程. 这一段

我们只对两个自变量的情形来考虑形状(1) 的方程. 在这一特别情形，自变量通常用字母 $x$ 和 $y$ 来记，而偏导数照常以下面方式来记：$p=u_x$ 及 $q=u_y$. 因此，本段研究的对象就是下面形状的方程

$$a(x,y,u)p+b(x,y,u)q=c(x,y,u) \tag{2}$$

回忆一下我们很早就曾见到过线性偏微分方程[Ⅱ;21]，并且知道形状(2) 的方程的积分问题和某一常微分方程组的积分问题是等价的. 我们将对过去所得的结果，补充一些新的事项，它们对于进一步研究更复杂的问题是有益的.

给定的函数 $a(x,y,u)$，$b(x,y,u)$ 和 $c(x,y,u)$ 在空间 $(x,y,u)$ 确定了某个方向场，就是说，在空间的每一定点有一个方向，它的方向余弦与 $a,b,c$ 成比例. 方向场确定这样的曲线族，其中任何一条曲线，它的每一点的切线合于在这点的场中的方向. 这条曲线族的获得，是下面常微分方程组积分的结果

$$\frac{\mathrm{d}x}{a(x,y,u)}=\frac{\mathrm{d}y}{b(x,y,u)}=\frac{\mathrm{d}u}{c(x,y,u)} \tag{3}$$

或者，如果用 $\mathrm{d}s$ 来记写出的这三个比的公共值，就有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=a(x,y,u),\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=b(x,y,u),\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=c(x,y,u) \tag{4}$$

量 $p$，$q$ 及 $-1$ 和所求曲面的法线的方向余弦成比例，于是方程(2) 表示所求曲面的法线和场中方向正交的条件

$$ap+bq+c(-1)=0$$

就是说，方程(2) 归结到这样的要求，使得在所求曲面 $u=u(x,y)$ 上的每一点，由上述方向场所确定的方向落在曲面的切平面上. 由方程组(4) 所确定的曲线称为方程(2) 的特征曲线或特征. 若某一曲面 $u=u(x,y)$ 是方程(2) 的特征曲线的几何轨迹，就是说，若曲面由满足方程组(4) 的曲线 $l'$ 所构成，则过这曲面上每一点的曲线 $l'$ 的切线都落在曲面的切平面上，于是推知，这曲面满足方程(2)，就是说，是这个方程的积分曲面. 因此，如果曲面 $u=u(x,y)$ 由方程(2) 的特征曲线所构成，则这曲面是此方程的积分曲面.

我们假设曲面 $u=u(x,y)$ 在每一点有切平面，并且曲面的法线方向沿曲面连续地变动. 也就是假设 $u(x,y)$ 的一阶偏导数是存在和连续的.

以后说到积分曲面，我们就假定这个曲面具有上述性质. 通常简称这样的曲面为光滑的.

以上我们证明了，具有方程 $u=u(x,y)$ 且由特征曲线组成的光滑曲面是积分曲面. 倒过来说，不难看出，若某一光滑曲面满足方程(2)，即它为积分曲面，那么这可用特征曲线来遮盖.

实际上，若某曲面 $S$ 满足方程(2)，则在它的每一点，方向 $(a,b,c)$ 在 $S$ 的切平面上. 因此，我们在 $S$ 上有了方向场. 把这方向场所对应的一阶常微分方程积出来，我们就得到在曲面 $S$ 上并且满足方程组(4) 的曲线 $l'$. 例如，方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{a(x,y,u)}=\frac{\mathrm{d}y}{b(x,y,u)}$$

能作为这一阶方程,其中 $u$ 用它在曲面 $S$ 的方程中的表达式 $u=u(x,y)$ 替代.假定说,积分所写出的方程,我们得到 $y$ 的通过 $x$ 和任意常数 $C$ 的表达式;把这个表达式代入公式 $u=u(x,y)$,对于 $u$ 我们也得到通过 $x$ 和 $C$ 的表达式,这样便有了遮盖曲面 $S$ 的曲线族 $l'$ 的方程.

在一阶常微分方程的研究中,我们见到过,若对应于自变量的给定值,给定了未知函数所取的初值,未知函数就能完全确定[Ⅱ;50,51].如果能够求出一般积分的话,由这些初值就可以确定一般积分所含的任意常数.可是只要借助于证明存在性与唯一性定理时所用过的逐次逼近法[Ⅱ;51],就算不知道一般积分,也可以由初始值来确定解.方程(2)的通解所含的已经不是任意常数,而是任意函数[Ⅱ;22],在这种情形下按初始条件的定解问题可表述为以下方式:确定方程(2)的积分曲面,使它通过空间$(x,y,u)$的某给定曲线$l$.如果我们用$\lambda$记曲线 $l$ 在平面$(x,y)$上的投影,于是上述问题化为求方程(2)的这样的解,使它在曲线 $\lambda$ 上各点取给定值的问题.先来拟定所提出的问题的解法[Ⅱ;22].设 $M_0$ 是曲线 $l$ 上的某一点,把它的坐标看作由方程组(4)所确定的函数的初始值.按照存在性与唯一性定理,得到通过这点 $M_0$ 的完全确定的特征线.对曲线 $l$ 的每一点皆这样做,我们得到一族特征线;假定它们构成某曲面 $S$.它就通过曲线 $l$,且按上面所说,就是方程(2)的积分曲面.反之,如前面所说的一样,方程(2)的每一积分曲面,可由特征线组成,也就是由满足方程组(4)的曲线所组成.由于取 $l$ 上的点的坐标作为这些解的初始条件,因此,我们可以肯定,用上面所述方法来确定通过曲线 $l$ 的积分曲面是唯一可能的;严格地说,就是问题的解是唯一的,并且所求积分曲面是通过曲线 $l$ 上各点的特征线的几何轨迹.

为严格地推导问题的解的存在性与唯一性的证明,需要对方程组(4)的右边做某些假定,并且也要对曲线 $l$ 加上某些重要的附加条件.例如,若给定的曲线 $l$ 本身就是特征线,则按上述方法,从 $l$ 上的各点引特征线不能导出曲面而仍只是曲线 $l$.在这种情形下,解将有无穷多[Ⅱ;23].实际上,若过曲线 $l$ 上的某一点引曲线 $l_1$,它就不是特征线.通过这条曲线上的各点引特征线(给定的曲线 $l$ 也在其中),我们得到通过已给曲线 $l$ 的积分曲面.注意到选取 $l_1$ 时的任意性,我们就看出:如果给定的曲线 $l$ 是特征线,问题就有无穷多的解.也可能发生问题根本没有解的情况.当通过曲线 $l$ 上点的特征线在这条曲线的邻域并不构成有显式方程 $u=u(x,y)$ 的曲面时,其中 $u(x,y)$ 是单值连续,且有连续的一阶偏导数,就属于这种情形.例如,要是所说到的特征线形成母线平行于 $u$ 轴的柱面就是如此.在下一段,我们就来讲述所提出的问题有一个确定解的解析条件.

**100. 柯西问题和特征线**

柯西问题通常指的是前面列出的关于确定通过已给曲线 $l$ 的方程(2)的积

分曲面的问题.为了深入研究这个问题的解的存在性与唯一性问题,我们必须利用常微分方程论中的一个定理,这就是:

**定理** 设微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}y_k}{\mathrm{d}x}=f_k(x,y_1,\cdots,y_n)\quad(k=1,2,\cdots,n)\tag{5}$$

的右边是其所有变量的在某一区域内的连续函数,这区域由下面不等式所确定

$$|x-a|\leqslant A,\ |y_k-b_k|\leqslant B\quad(k=1,2,\cdots,n)\tag{6}$$

此外,若 $f_k$ 在这区域内有连续偏导数 $\dfrac{\partial f_k}{\partial y_s}$ 存在,则由于存在性与唯一性定理,对区域(6)内的任意初始值 $(x_0,y_1^0,y_2^0,\cdots,y_n^0)$ 所确定的方程组(5)的解

$$y_k=\varphi_k(x,x_0,y_1^0,\cdots,y_n^0)\quad(k=1,2,\cdots,n)$$

有关于初始值的偏导数 $\dfrac{\partial\varphi_k}{\partial y_s^0}$,它们是其所含变量 $(x,x_0,y_1^0,\cdots,y_n^0)$ 的连续函数.

为了不中断叙述,我们把这个定理的证明延到后一段去.

现在来解决柯西问题.假定曲线 $l$ 的方程以参数的形式给出

$$x_0=x_0(t),y_0=y_0(t),u_0=u_0(t)\quad(t_0\leqslant t\leqslant t_1)\tag{7}$$

且设方程组(4)的右边在空间 $(x,y,u)$ 的含曲线 $l$ 在内的某一区域内满足上述定理中的条件.取 $l$ 上的点的坐标作为在 $s=0$ 的初始值,则对充分接近于零的 $s$,得到方程组(4)的解

$$x=x(s,x_0,y_0,u_0),y=y(s,x_0,y_0,u_0),u=u(s,x_0,y_0,u_0)$$

或者,由于(7)

$$x=x(s,t),y=y(s,t),u=u(s,t)\tag{8}$$

假设方程(7)的右边关于 $t$ 连续可微,并利用上面的定理,我们可以肯定函数(8)不仅对 $s$ 而且对 $t$ 也有连续导数.对区间 $t_0<t<t_1$ 中任意给定的 $t$,函数(8)对于充分接近于零的所有 $s$ 是确定的.做出这些函数中的前面两个关于 $s$ 和 $t$ 的函数行列式

$$\Delta=x_sy_t-x_ty_s\tag{9}$$

对以后重要的是这个行列式异于零还是等于零这件事.我们首先考虑沿曲线 $l$ 当 $\Delta\neq0$ 的情形;其次,再考虑沿曲线 $l$ 当 $\Delta=0$ 的情形.从第一种情形开始

$$\Delta\neq0\quad(\text{沿曲线 } l)\tag{10}$$

就是说,当 $s=0$ 时 $\Delta\neq0$,不仅如此,由于导数的连续性,在初始值 $s=0$ 与值 $t$ 的某一邻域内 $\Delta\neq0$ 也成立,而 $t$ 对应于曲线 $l$ 的某一点 $M$.此时,从(8)中的前两个方程,对曲线 $l$ 上点 $M$ 的坐标 $(x,y)$ 的某一邻域中的一切 $x$ 及 $y$,可以关于 $s$ 及 $t$ 解出,这解是唯一的,并且得到的函数 $s(x,y)$,$t(x,y)$ 有一阶连续导数[Ⅲ;19].将所得的函数 $s(x,y)$ 及 $t(x,y)$ 代入(8)中的第三个方程,则在所述的邻域中得到函数 $u(x,y)$,它有连续一阶导数,并且曲面 $u=u(x,y)$ 在 $M$ 的邻域含

有曲线 $l$ 的一段. 从前段所说的几何学上的看法,直接推出 $u(x,y)$ 满足方程(2). 我们以下也要用分析的方法来检验这个事实.

应当指出,我们仅在曲线 $l$ 上任一给定点 $M$ 的某一邻域内作出解 $u(x,y)$,或者说,得到了问题的局部解. 在加上某些条件到 $a,b,c$ 及曲线 $l$ 上时,可以相信,在整个曲线 $l$ 的某一邻域内,即对平面$(x,y)$上所有充分接近于 $x=x_0(t)$,$y=y_0(t)$ 的一切 $x$ 和 $y$,是可能作出积分曲面来的. 这里假设 $x'_0(t)$,$y'_0(t)$ 不同时为零. 类似这种结论的确切说法将在下段指出.

关于在平面$(x,y)$上的某一预先指定的区域内,方程的解的存在问题是很难决定的. 可以作出平面$(x,y)$上的一个区域 $B$,和在其上有任何阶导数的函数 $b(x,y)$,使得对于方程

$$u_x+b(x,y)u_y=0$$

在全区域 $B$ 上有连续一阶导数的解,仅仅是 $u=$常数.

现在验证,所作函数 $u(x,y)$ 确实是方程(2)的解. 利用复合函数的求导数法则及方程(4),可以写出

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=u_xa+u_yb$$

但是$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=c$,由此推知,$u(x,y)$ 确实满足方程(2).

问题的解的唯一性,直接从每个积分曲面由特征曲线所构成的这个事实推出. 现在我们从解析上来证明它. 设 $u=u(x,y)$ 是某一积分曲面,并且 $u(x,y)$ 有一阶连续导数. 对常微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=a[x,y,u(x,y)],\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=b[x,y,u(x,y)] \tag{11}$$

求积分,并将所得的解代入函数 $u=u(x,y)$,在我们的积分曲面上就得到一族曲线.

不难验证,这时函数 $u$ 满足(4)中第三个方程. 实际上,由于(11)

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=u_xa+u_yb$$

但是 $u=u(x,y)$ 是积分曲面,就是说,$u_xa+u_yb=c$,因此,$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=c$. 这样,上面所讲的遮盖曲面 $u=u(x,y)$ 的曲线确实是特征线. 于是,在条件(10)之下,柯西问题有唯一的解. 我们在考虑非线性一阶方程时还要回到唯一性问题.

现在假定沿曲线 $l$,即当 $s=0$ 时,我们有

$$\Delta=x_sy_t-x_ty_s=0 \tag{12}$$

在这种情况下要证明,如果通过曲线 $l$ 且有一阶连续导数的积分曲面 $u=u(x,y)$ 存在,则这条曲线一定是特征线. 在这里和以前一样,要是我们说曲面

$u=u(x,y)$ 通过曲线 $l$,那么应理解为是局部的,就是说,只考虑 $l$ 的某一段.

将假设 $a$ 及 $b$ 沿 $l$ 不等于零.考虑到方程组(4) 中的前两个,我们可写条件(12) 为形状

$$\frac{x_t}{a}=\frac{y_t}{b}=k \quad (s=0) \tag{13}$$

其中字母 $k$ 用来记所写比式的公共值.设 $u=u(x,y)$ 是通过 $l$ 的积分曲面,将式子 $x=x_0(t)$ 及 $y=y_0(t)$ 代入 $u(x,y)$,关于 $t$ 求导并利用(13),我们得到:$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=u_xka+u_ykb$.注意到 $u=u(x,y)$ 是方程(2) 的解并利用这个方程,更可写出 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=kc$,这样我们就导出方程组

$$\frac{x_t}{a}=\frac{y_t}{b}=\frac{u_t}{c} \quad (s=0)$$

于是推出曲线 $l$ 是特征线.因此,若 $\Delta=0$,则为了要使通过 $l$ 的积分曲面存在,这条曲线就必须是特征线.这时,如在前段见过的一样,通过曲线 $l$ 有无穷多积分曲面.在上面推导证明时,对我们来说,通过 $l$ 的积分曲面 $u=u(x,y)$,在这线上各点有连续导数当然是重要的;可能有这种情形,像我们将要在例题中见到的一样,$l$ 不是特征线,而沿着它 $\Delta=0$,并且竟还存在着通过 $l$ 的积分曲面,可是 $u(x,y)$ 的偏导数在 $l$ 的各点不复连续,换句话说,曲线 $l$ 是积分曲面的奇线.若 $l$ 不是特征线,而沿着它 $\Delta=0$,那么就是说,沿曲线 $l$

$$\frac{x_t}{a}=\frac{y_t}{b}\neq\frac{u_t}{c}$$

应当指出方程组(4) 的一个特性.辅助参数 $s$ 在方程的右边不出现,并且任意常数之一是作为 $s$ 的附加项而出现的.这个任意常数不起主要作用而归结为选 $s$ 初始值的任意性.因此,我们在求这个方程组的积分时有两个主要任意常数.要是写方程组(4) 为形状(3),这事实便立即清楚了.

回忆起,若是求隐式[Ⅱ;21]

$$\varphi(x,y,u)=C \tag{14}$$

的解,其中 $C$ 是某一任意常数,则准线性非齐次方程(2) 可化为纯线性齐次方程.按照隐函数求导的法则,我们有

$$u_x=-\frac{\varphi_x}{\varphi_u},u_y=-\frac{\varphi_y}{\varphi_u}$$

方程(2) 化为纯线性齐次方程

$$a(x,y,u)\varphi_x+b(x,y,u)\varphi_y+c(x,y,u)\varphi_u=0 \tag{15}$$

对应的常微分方程组是(3).若

$$\varphi_1(x,y,u)=C_1,\varphi_2(x,y,u)=C_2$$

是这个方程组的两个独立的解,则

$$\varphi = F(\varphi_1, \varphi_2)$$

也是方程(15)的解，其中$F$为$\varphi_1$及$\varphi_2$的任意函数.我们曾见到如何从柯西问题的条件来确定这函数的形状[Ⅱ;23].

上面的说明引起以下的问题.我们求方程(2)的解时，把这解看作是属于具隐式方程(14)，而含有任意常数$C$的这一类解中的.不难证明，用这样的方法，我们并未丢失方程的任何一个解.简单地说，由于柯西问题初始条件的任意性，这里的问题归结到，我们可把方程的任何解看作是属于含任意常数的整个解族中的；关于这个任意常数解出来，我们就确信任何解可从形状(14)的式子得到.我们可能丢失的仅是那些不能由上述柯西问题解法的过程中得到的解(奇解).如果函数$a$,$b$及$c$满足某些一般的条件，这样的解就不会有了.至于详细的证明，我们不去讲它.

**101. 任意多个自变量的情形**

考虑有任意个数自变量的线性方程

$$a_1(x_1,\cdots,x_n,u)p_1+\cdots+a_n(x_1,\cdots,x_n,u)p_n=$$
$$c(x_1,\cdots,x_n,u) \tag{16}$$

以后我们常常假设系数$a_1,a_2,\cdots,a_n$对所考虑的变数$x_1,x_2,\cdots,x_n,u$之值来说不同时为零，就是说，$a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2>0$.在方程(16)的研究中，我们将利用类似于三维空间的几何术语；在这种情形下，我们有坐标是$(x_1,\cdots,x_n,u)$的$(n+1)$维空间.$m$维流形是指这空间中的一个点集，其中的点的坐标能用$m$个任意参数来表示

$$x_k=x_k(t_1,\cdots,t_m), u=u(t_1,\cdots,t_m)\quad (k=1,2,\cdots,n)$$

并且我们假设从写出方程中的某$m$个能关于$t_1,\cdots,t_m$解出.当$m=n$时，我们有$n$维流形，将称之为曲面.若参数取为$x_1,\cdots,x_n$，则有曲面的显式方程：$u=u(x_1,\cdots,x_n)$.方程(16)的积分曲面的方程正应有这样的形状.当$m=1$时，对应的一维流形称为$(n+1)$维空间的曲线.

方程(16)的特征曲线由以下方程组确定

$$\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s}=a_k(x_1,\cdots,x_n,u), \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=c(x_1,\cdots,x_n,u) \tag{17}$$

其中$s$是辅助参数.除了所有的$x_k$及$u$皆为常数的解以外，这个方程组的任一解都给出$(n+1)$维空间的曲线.由于$a_1^2+\cdots+a_n^2>0$，因而所有$x_k$和$u$皆为常数的解不可能存在.这条曲线的坐标可用参数$s$表示；为了从这些曲线作出曲面，我们必须取和$(n-1)$个任意参数有关的这种曲线的一族.得到总共与$n$个参数有关的点集.若某一光滑曲面$u=u(x_1,\cdots,x_n)$是由与$(n-1)$个参数有关的特征曲线族所构成，则它是方程(16)的积分曲面.实际上，$u(x_1,\cdots,x_n)$关于$s$求导数并利用方程组(17)得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=\sum_{k=1}^{n}u_{x_k}a_k$$

但是，由于(17) 中的最末一个方程，$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=c$，就推出方程(16). 反之，任一积分曲面可由与$(n-1)$ 个参数有关的特征线族所组成. 实际上，有了积分曲面 $u=u(x_1,\cdots,x_n)$，我们可从方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s}=a_k[x_1,\cdots,x_n,u(x_1,\cdots,x_n)]\quad (k=1,2,\cdots,n) \tag{18}$$

确定 $x_k$，并给出$(n-1)$ 个任意常数. 作为 $s$ 的附加项的一个任意常数不起重要作用. 将方程组(18) 的解代入 $u=u(x_1,\cdots,x_n)$ 的右边，关于 $s$ 求导数并利用方程(16) 和(18)，我们看到 $u$ 就满足方程组(17) 中的最末一个.

和在[100] 中的一样，我们假设 $u(x_1,\cdots,x_n)$ 及方程组(17) 的右边都有连续一阶导数.

方程(16) 的柯西问题是：确定积分曲面使含有给定的$(n-1)$ 维流形

$$x_k=x_k(t_1,\cdots,t_{n-1}),u=u(t_1,\cdots,t_{n-1})\quad (k=1,2,\cdots,n) \tag{19}$$

而这些等式的右边，在$(n-1)$ 维空间$(t_1,\cdots,t_{n-1})$ 的某一区域 $D$ 内连续且有连续一阶偏导数.

假设由导数$\frac{\partial x_k}{\partial t_l}$ 所形成的矩阵的秩等于$(n-1)$，并且不同的值组$(t_1,\cdots,t_{n-1})$ 有不同的点$(x_1,\cdots,x_n)$ 对应. 其次，如上面提过的一样，假设系数 $a_k(x_1,\cdots,x_n,u)$ 及 $c(x_1,\cdots,x_n,u)$ 在含有流形(19) 在内的空间某区域 $D$ 中有连续一阶导数.

在特殊情形下，柯西问题中的这一条件可以是：当自变量之一取给定的数值时，给出未知函数 $u$ 作为其余变量的函数

$$u\big|_{x_1=x_1^{(0)}}=\varphi(x_2,\cdots,x_n) \tag{20}$$

问题的解法完全和两个自变量情形类似. 表达式(19) 当作求方程组(17) 积分时的初始条件. 这样，我们得到下面形状的解

$$x_k=x_k(s,t_1,\cdots,t_{n-1}),u=u(s,t_1,\cdots,t_{n-1}) \tag{21}$$

往后，行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}\frac{\partial x_1}{\partial s} & \frac{\partial x_2}{\partial s} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial s}\\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial t_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}}\end{vmatrix} \tag{22}$$

要起重要作用，考虑到方程组(17)，我们能将它改写为形状

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial t_{n-1}} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix} \tag{23}$$

若这行列式在流形(19)上(即当 $s=0$ 时)异于零,则从方程(21)中前面 $n$ 个可关于 $s,t_1,\cdots,t_{n-1}$ 解出,并且代入方程(21)中的最末一个,我们得到方程(16)的积分曲面.在这种情形,柯西问题就不会有任何其他的解.所有这些可以完全和两个自变量的情况一样地来证明.考虑初始条件为形状(20)的情形,又假定 $x_2,\cdots,x_n$ 起参数 $t_1,\cdots,t_{n-1}$ 的作用.取线性方程并假定行列式(23)在我们的流形上异于零.注意到,当 $p\neq q$ 时$\frac{\partial x_p}{\partial x_q}=0$,而$\frac{\partial x_p}{\partial x_p}=1$,即得 $\Delta=a_1\neq 0$.用系数 $a_1$ 来除方程,得到下面形状的方程

$$p_1+a_2(x_1,\cdots,x_n)p_2+\cdots+a_n(x_1,\cdots,x_n)p_n= \\ b(x_1,\cdots,x_n)u+c(x_1,\cdots,x_n) \tag{24}$$

设 $a_k$,$b$ 及 $c$ 对 $\alpha\leqslant x_1\leqslant\beta$ 与任何实数 $x_2,\cdots,x_n$ 为连续且关于 $x_2,\cdots,x_n$ 有连续一阶偏导数.此外,并假定在这些条件下,所述的函数都有界:$|a_k|\leqslant M$,$|b|\leqslant M$,$|c|\leqslant M$.

选取 $x_1$ 为自变量,写方程组(17)为形状

$$\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}x_1}=a_k(x_1,\cdots,x_n)\quad(k=2,\cdots,n) \tag{25}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x_1}=b(x_1,\cdots,x_n)u+c(x_1,\cdots,x_n) \tag{26}$$

设 $x_1^{(0)}$ 是区间$[\alpha,\beta]$中 $x_1$ 的初始值.在某些初始条件下

$$x_k\big|_{x_1=x_1^{(0)}}=x_k^{(0)}\quad(k=2,\cdots,n)$$

求方程组(25)的积分.

从 $|a_k|\leqslant M$ 可推出方程组(25)的解 $x_k$ 有有界导数$\left|\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}x_1}\right|\leqslant M$,因此,量 $x_k$ 本身的绝对值也是有界的:$|x_k|\leqslant M(\beta-\alpha)$.应用逐次逼近法[Ⅱ;51],我们容易相信,对任意初始值 $x_k^{(0)}(k=2,\cdots,n)$ 所说的解

$$x_k=\varphi_k(x_1,x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})\quad(k=2,\cdots,n) \tag{27}$$

在全区间 $\alpha\leqslant x_1\leqslant\beta$ 上存在.我们可以说,通过点 $A_0(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$ 的积分曲线也通过点 $A(x_1,\cdots,x_n)$,点 $A$ 的坐标则由公式(27)确定.根据唯一性定理,可以肯定,如果取点 $A$ 为初始点,则对应的积分曲线也要经过点 $A_0$.由此推出,方程(27)对任何 $x_k$ 关于 $x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}$ 可解,而且解的形状为

$$x_k^{(0)}=\varphi_k(x_1^{(0)},x_1,x_2,\cdots,x_n)\quad(k=2,\cdots,n)\tag{27'}$$

假定说，我们要在初始条件(20) 下解柯西问题. 我们必须按照上面所说在初始条件

$$x_k\mid_{x_1=x_1^{(0)}}=x_k^{(0)}\quad(k=2,\cdots,n)$$
$$u\mid_{x_1=x_1^{(0)}}=\varphi(x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$$

之下积分出方程(25) 和(26)，其中任意值 $x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)}$ 起 $t_1,\cdots,t_{n-1}$ 的作用. 将(27) 代入(26)，积分所得方程

$$u=\mathrm{e}^{\omega}\left[\varphi(x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})+\int_{x_1^{(0)}}^{x_1}c(x_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)\mathrm{e}^{-\omega}\mathrm{d}x_1\right]\tag{28}$$

其中

$$\omega=\int_{x_1^{(0)}}^{x_1}b(x_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)\mathrm{d}x_1$$

且 $b$ 和 $c$ 中有 $\varphi_k(x_1,x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$ 作为它们的自变量. 代(27′) 到(28) 的右边，得到所求柯西问题的解 $u(x_1,\cdots,x_n)$. 它在全区间 $\alpha\leqslant x_1\leqslant\beta$ 及对任何 $x_2,\cdots,x_n$ 存在. 这与方程的线性以及我们对于 $a_k,b$ 及 $c$ 所做的假设有关.

对于准线性方程(16)，关于 $a_k$ 及 $c$ 做某些假定后，能够指出解的存在区域. 我们来推导相应的结果.

设 $a_1=1,a_k$ 及 $c$ 在

$$|x_1-x_1^{(0)}|\leqslant a\tag{29}$$

$$b_k<x_k<c_k\quad(k=2,\cdots,n)\tag{30}$$

和任意实数 $u$ 的条件下连续、有界且有连续导数，这些导数的绝对值不超过某一常数 $A$. 设 $\varphi(x_2,\cdots,x_n)$ 在条件(30) 之下连续、有界且有连续一阶导数，其绝对值不超过某常数 $B$；此时方程(16)$(a_1\equiv 1)$ 在条件(20) 之下在由不等式

$$|x_1-x_1^{(0)}|<a,\ |x_1-x_1^{(0)}|<\frac{1}{nA}\ln\left[1+\frac{n}{(n-1)(B+1)}\right]$$

和不等式(30) 所确定的区域中有解[康姆凯(Kamke)，《实函数的微分方程》(“Differentialgleichungen reeller Funktionen”)，335 页].

现在考虑在流形(19) 上 $\Delta=0$ 的情形. 将假设行列式 $\Delta$ 的第一列元素余因子当中有一个异于零. 等式 $\Delta=0$ 表明第一列的元素是其他各列中相当元素的线性组合，就是说，成立关系式

$$a_k=\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j\frac{\partial x_k}{\partial t_j}\tag{31}$$

其中 $\lambda_j$ 是参数$(t_1,\cdots,t_{n-1})$ 的确定函数. 若在流形(19) 上函数 $c$ 也表示为公式

$$c=\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j\frac{\partial u}{\partial t_j}\tag{32}$$

则在这种情形下，流形(19) 称为我们方程的特征流形. 假定在流形(19) 上 $\Delta=$

0,并且存在含有这流形的积分曲面 $u=u(x_1,\cdots,x_n)$. 在 $u(x_1,\cdots,x_n)$ 中将 $x_k$ 用它的关于 $t_1,\cdots,t_{n-1}$ 的表达式代替,我们得到当 $s=0$ 时(21) 中最后一个函数. 把这个函数关于 $t_j$ 求导,并且考虑到公式(31) 和函数 $u$ 满足方程(16) 的事实,我们就有

$$\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j \frac{\partial u}{\partial t_j}=\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial t_j}=\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k}\sum_{j=1}^{n-1}\lambda_j \frac{\partial x_k}{\partial t_j}=\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k}a_k=c$$

就是说,在所考虑的情况下,对在 $s=0$ 时(21) 中末一函数必须有关系式(32). 换句话说,我们的流形应当是特征流形. 因此,若要在 $\Delta=0$ 的条件下,存在含有流形(19) 的积分曲面,这流形必须是特征流形. 相反的,现在假定流形(19) 是特征流形,即满足条件(31) 和(32). 由微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}t_j}{\mathrm{d}s}=\lambda_j(t_1,\cdots,t_{n-1}) \quad (j=1,2,\cdots,n-1) \tag{33}$$

确定参数 $t_j$ 为辅助变数 $s$ 的函数.

积分这个方程组,通过 $s$ 和$(n-2)$ 个任意参数(任意常数) 表示出 $t_j$. 当作 $s$ 的附加项而出现的一个任意常数不起主要作用. 把 $t_j$ 的表达式代入(19),$x_k$ 及 $u$ 就通过 $s$ 和所说的$(n-2)$ 个参数表出,这时,不难验证,$x_k$ 及 $u$ 看作 $s$ 的函数满足方程组(17),就是说,是方程(16) 的特征. 实际上,由于(33)

$$\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s}=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial x_k}{\partial t_j}\lambda_j,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=\sum_{j=1}^{n-1}\frac{\partial u}{\partial t_j}\lambda_j$$

或者,由于(31) 及(32)

$$\frac{\mathrm{d}x_k}{\mathrm{d}s}=a_k,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=c$$

上面的议论表明,方程(16) 的任何特征流形可由这个方程的特征组成.

现设特征流形(19) 与某一别的$(n-1)$ 维流形 $M_{n-1}$ 相交,沿着 $M_{n-1}$,$\Delta\neq 0$. 从这流形 $M_{n-1}$ 上各点引特征,我们便得到方程(16) 的积分曲面. 另一方面由以上的证明推知从特征流形(19) 与流形 $M_{n-1}$ 的交截上各点出发的特征,构成特征流形(19). 因此,所作的积分曲面确实含有我们的特征流形. 由于辅助流形 $M_{n-1}$ 选取的任意性,存在无穷多个积分曲面包含给定的特征流形,这就是所要证明的.

如果求方程(16) 的隐式的解

$$\varphi(x_1,\cdots,x_n,u)=C$$

其中 $C$ 是任意常数,就完全像在两个自变量的情形一样,可以化准线性非齐次方程(16) 为纯线性齐次方程. 对于函数 $\varphi$ 得到方程

$$a_1\varphi_{x_1}+\cdots+a_n\varphi_{x_n}+c\varphi_u=0$$

对应的常微分方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{a_1}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{a_n}=\frac{\mathrm{d}u}{c}$$

若

$$\varphi_1(x_1,\cdots,x_n,u)=C_1,\cdots,\varphi_n(x_1,\cdots,x_n,u)=C_n \tag{34}$$

是它的独立的积分,那么方程

$$F(\varphi_1,\cdots,\varphi_n)=0$$

给出方程(16) 的隐式的解,其中 $F$ 是它的变量的任何函数. 在最后等式的右边,我们写零来替代任意常数,就因为 $F$ 是它的变量的任何函数的缘故. 为了作出含给定流形(19) 的积分曲面,我们将式(19) 代入积分(34) 的左边. 从这样得到的 $n$ 个方程消去$(n-1)$ 个参数 $t_1,\cdots,t_{n-1}$,我们就有任意常数之间的关系式

$$F(C_1,\cdots,C_n)=0$$

该关系式的左边使我们得以确定函数 $F$ 的形状. 简单些说,就是以函数 $\varphi_k(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)$ 来代最后方程中的 $C_k$,我们就得到所求积分曲面的方程.

**102. 例**

1. 考虑方程

$$3(u-y)^2p-q=0 \tag{35}$$

方程组(4) 有形状

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=3(u-y)^2,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=-1,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}=0 \tag{36}$$

于是它的解用变量$(x,y,u)$ 的初始值表示为

$$x=(u_0-y_0+s)^3+x_0-(u_0-y_0)^3,y=-s+y_0,u=u_0 \tag{37}$$

假定说,所求积分曲面所必须经过的曲线 $l$ 的方程(7) 具形状

$$x=0,y=t,u=t \tag{38}$$

以 $x_0=0,y_0=u_0=t$ 代入(37) 得

$$x=s^3,y=-s+t,u=t$$

行列式

$$\Delta=x_sy_t-x_ty_s=3s^2$$

当 $s=0$(即沿 $l$) 时为零. 曲线(38) 不是方程(35) 的特征,因为根据方程(36) 的最后一式,$u$ 沿着特征必须是常数. 方程(35) 却有通过曲线(38) 的积分曲面,就是

$$u=\sqrt[3]{x}+y$$

在这种情形 $p=u_x=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$,并且这个偏导数沿曲线(38) 成为无穷大.

2. 考虑三个自变量的函数 $u$ 的方程

$$p_1+p_2+p_3=u$$

作方程组(17) 并对它求积分,得到以下的由变量的初始值 $x_k^0$ 及 $u_0$ 表出的

解

$$x_k = s + x_k^0, u = u_0 e^s \quad (k=1,2,3) \tag{39}$$

设需要求出积分曲面而包含流形

$$x_1 = t_1 + t_2, x_2 = t_1 - t_2, x_3 = 1, u = t_1 t_2$$

以这些式子代替方程(39)中的初始值,得到

$$x_1 = s + t_1 + t_2, x_2 = s + t_1 - t_2, x_3 = s + 1, u = t_1 t_2 e^s \tag{40}$$

由前面三个方程解出 $s, t_1$ 及 $t_2$($\Delta \neq 0$ 的情形)

$$s = x_3 - 1, t_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2 - 2x_3 + 2), t_2 = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$$

将这些式子代到方程(40)的最后一个,得到所求积分曲面的方程

$$u = \frac{1}{4}(x_1 + x_2 - 2x_3 + 2)(x_1 - x_2)e^{x_3 - 1}$$

3. 要求方程

$$u_x - u_y = f(x+y)$$

的连同一阶导数为连续且满足条件当 $x=0$ 时 $u=0$ 的解. 我们可以作变数变换

$$x = x_1, x + y = y_1$$

利用它们我们不难得到下面的解答

$$u(x,y) = xf(x+y)$$

只要函数 $f(t)$ 有连续导数,这公式实际上就给出所列问题的解. 若 $f(t)$ 没有连续导数,则所列问题决不能有解. 可以证明,处处无导数而连续的函数 $f(t)$ 是存在的. 所举的例子显出,方程(2)中关于 $c$ 的导数存在和连续这一假设的重要性.[彼戎(Perron),Math. Zeitschr. Bd. 27, Heft 4, 1928]

**103. 辅助定理**

本段推导在[100]中所叙述的定理的证明. 首先要证明一个辅助命题. 假定说,方程组

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x, y_1, \cdots, y_n, \lambda) \quad (k=1,2,\cdots,n) \tag{41}$$

的右边含参数 $\lambda$,并且假设当

$$|x - a| \leqslant A, \ |y_k - b_k| \leqslant B \quad (k=1,2,\cdots,n) \tag{42}$$

以及 $\lambda$ 在某一区间 $\alpha \leqslant \lambda \leqslant \beta$ 变动时,右方这些函数是连续函数,关于所有变数 $y_k$ 有连续导数,而 $a$ 与 $b_k$ 是给定的数.

设 $M$ 是绝对值

$$|f_k(x, y_1, \cdots, y_n, \lambda)| \quad (k=1,2,\cdots,n)$$

对所指的变数值的最大值. 此时方程组(41)有唯一的解满足初始条件

$$y_k|_{x=a} = b_k \quad (k=1,2,\cdots,n) \tag{43}$$

这个解在区间 $|x-a| \leqslant h$ 上存在,其中 $h$ 是两数 $A$ 及 $\frac{B}{M}$ 中较小的一个,并且