北大燕园

2019年 李正元·范培华

考研数学②

数学

数学一

历年试题解析

主编 北京大学 李正元
北京大学 尤承业
北京大学 范培华

中国政法大学出版社

北大燕园
2019年李正元·范培华考研数学②

数学

数学一

历年试题解析

主编　北　京　大　学　李正元
北　京　大　学　尤承业
北　京　大　学　范培华

中国政法大学出版社
2018·北京

图书在版编目（CIP）数据

2019年李正元·范培华考研数学数学历年试题解析. 数学一/李正元，尤承业，范培华主编. —北京：中国政法大学出版社，2018. 1

ISBN 978-7-5620-7964-4

Ⅰ. ①2… Ⅱ. ①李… ②尤… ③范… Ⅲ. ①高等数学－研究生－入学考试－题解 Ⅳ. ①013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第324881号

出 版 者　中国政法大学出版社

地　　址　北京市海淀区西土城路25号

邮寄地址　北京100088信箱8034分箱　邮编100088

网　　址　http://www.cuplpress.com（网络实名：中国政法大学出版社）

电　　话　010-58908285(总编室)　58908433（编辑部）58908334(邮购部)

承　　印　三河市人民印务有限公司

开　　本　787mm×1092mm　1/16

印　　张　25

字　　数　600千字

版　　次　2018年1月第1版

印　　次　2018年1月第1次印刷

定　　价　65.80元

前　　言

（一）

对于数学考试而言，试卷本身就是一份量表，它是《数学考试大纲》规定的考试内容和考试要求的具体体现。全国硕士研究生数学招生考试统考试题是广大数学教师及参加命题的专家、教授智慧和劳动的结晶，是一份宝贵的资料。每一道试题，既反映了《数学考试大纲》对考生数学知识、能力和水平的要求，又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势，因此，对照《数学考试大纲》分析、研究这些试题不仅可以展示出统考以来数学考试的全貌，便于广大考生了解有关试题和信息，从中发现规律，归纳出每部分内容的重点、难点及常考的题型，进一步把握考试的特点及命题的思路和规律，而且通过反复做历年试题，发现问题，找出差距，以便广大考生能及时查漏补缺，通过研究历年试题，也便于广大考生明确复习方向，从而从容应考，轻取高分。

（二）

本书汇集了 2004 年～2018 年全国硕士研究生招生统考数学一试题，而且对所有试题均给出了详细解答，并尽量做到一题多解。有很多试题的解法是我们几位编者从事教学和考研辅导研究总结出来的，具有独到之处。其中有些试题的解法比标准答案的解法更简捷、更省时省力。本书在对历年考研数学试题逐题解答的基础上，每题都给出了分析或评注，不仅对每题所考知识点或难点进行了分析，而且对各种题型的解法进行了归纳总结，使考生能举一反三，触类旁通；同时通过具体试题，指出了考生在解题过程中出现的有关问题和典型错误，并点评错因，提醒考生引以为戒。

本书把历年考研数学一试题依据考试大纲的顺序，按试题考查内容分章，这样与考生复习数学的顺序保持一致，便于考生系统复习使用。每章按以下内容编写：

编者按——总体说明历年试题在本章所考查的重要知识点、常考题型及所占总分比例，便于考生在宏观上把握重点。

题型分类解析——将历年同一内容的试题归纳在一起，并进行详细解答。这样便于考生复习该部分内容时了解到：该内容考过什么样的题目，是从哪个角度来命制题的，并常与哪些知识点联系起来命题等等，从而能让广大考生掌握考研数学试题的广度和深度，并

在复习时能明确目标，做到心中有数。同时把历年同一内容的试题放在一起，能让广大考生抓住近几年考题与往年考题的某种特殊联系(类似或雷同)，并且能清楚地查出哪些知识点还未命题考查。另外，为了帮助考数学一的考生更全更好地了解相关内容的命题情况，**本书精选了数学二、三以及原数学四相关内容的典型考题(含解答)，同时也精选了2001年(含)以前数学一相关内容的典型考题(含解答)**，供将要备考数学一的考生参考并复习之用。因此本书这种独特编排体例有助于广大考生科学备考。

综述——每种题型后部归纳总结该题型解题思路、方法和技巧，并举例说明。

(三)

本书给准备报考研究生的考生提供了锻炼自己解题能力和测验自己数学水平的机会。编者建议准备报考研究生的考生在阅读本书时，应先看《数学考试大纲》，以便明确考试的有关要求，接着去认真阅读有关教材和参考书(推荐考生认真阅读由中国政法大学出版社出版的《**考研数学复习全书(数学一)**》，该书对考试大纲中所要求的基本概念、基本公式、基本定理讲解详细，各类题型的解题思路、方法和技巧归纳到位，与考研命题思路较吻合)，复习完后，再来看本书的试题，以检验自己的水平。在看本书试题时，应该先自己动手做题，然后将自己所得的结果与本书的解法加以比较，看哪些自己做对了，哪些自己做错了，为什么会做错，可以与你的同学、同事和老师研讨。建议考生把本书中的全部试题做2~3遍，直到对所有的题目一见到就能够熟练地、正确地解答出来的程度。

本书在编写、编辑和出版过程中，尽管我们抱着对广大考生认真负责的精神，高质量、严要求，但由于时间紧、任务重，加上我们水平有限，难免有许多不足、不尽人意之处。敬请广大读者和专家同行不吝赐教、批评指正。

祝广大考生复习顺利，考研成功!

编者

2018年1月

目　录

第一篇　2018 年考研数学一试题及答案与解析

第二篇　2004 ~ 2017 年考研数学一试题

第三篇　2004 ~ 2017 年考研数学一试题分类解析

第一篇　2018 年考研数学一试题及答案与解析

2018 年考研数学一试题

一、选择题：1 ~ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

(1) 下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是

(A) $f(x)=|x|\sin|x|$.　　(B) $f(x)=|x|\sin\sqrt{|x|}$.

(C) $f(x)=\cos|x|$.　　(D) $f(x)=\cos\sqrt{|x|}$.　【　】

(2) 过点 $(1,0,0)$，$(0,1,0)$，且与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切的平面为

(A) $z=0$ 与 $x+y-z=1$.　　(B) $z=0$ 与 $2x+2y-z=2$.

(C) $x=y$ 与 $x+y-z=1$.　　(D) $x=y$ 与 $2x+2y-z=2$.　【　】

(3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2n+3}{(2n+1)!}=$

(A) $\sin1+\cos1$.　　(B) $2\sin1+\cos1$.

(C) $2\sin1+2\cos1$.　　(D) $2\sin1+3\cos1$.　【　】

(4) 设 $M=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}\mathrm{d}x$，$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$，$K=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sqrt{\cos x})\mathrm{d}x$，则

(A) $M>N>K$.　　(B) $M>K>N$.

(C) $K>M>N$.　　(D) $K>N>M$.　【　】

(5) 下列矩阵中与矩阵 $\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ 相似的为

(A) $\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$.　　(B) $\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$.

(C) $\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.　　(D) $\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.　【　】

(6) 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，记 $\mathrm{r}(\boldsymbol{X})$ 为矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的秩，$(\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y})$ 表示分块矩阵，则

(A) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.　　(B) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{BA})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

(C) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\max\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\}$.　　(D) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})$.　【　】

(7) 设随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 满足 $f(1+x)=f(1-x)$，且 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0.6$，则 $P\{X<0\}=$

(A) 0.2.　　(B) 0.3.　　(C) 0.4.　　(D) 0.5.　【　】

(8) 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，据此样本检测：

假设：$H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$，则

(A) 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 H_0.

(B) 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下拒绝 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必接受 H_0.

(C) 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必拒绝 H_0.

(D) 如果在检验水平 $\alpha=0.05$ 下接受 H_0，那么在检验水平 $\alpha=0.01$ 下必接受 H_0.【　　】

二、填空题：9 ~ 14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

(9) 若 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=e$，则 $k=$ ________.

(10) 设函数 $f(x)$ 具有 2 阶连续导数，若曲线 $y=f(x)$ 过点 $(0,0)$ 且与曲线 $y=2^x$ 在点 $(1,2)$ 处相切，则 $\int_0^1 xf''(x)\,dx=$ ________.

(11) 设 $F(x,y,z)=xyi-yzj+zxk$，则 $\mathrm{rot}F(1,1,0)=$ ________.

(12) 设 L 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，则 $\oint_L xy\,ds=$ ________.

(13) 设 2 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有两个不同特征值，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量，且满足 $\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，则 $|\boldsymbol{A}|=$ ________.

(14) 设随机事件 A 与 B 相互独立，A 与 C 相互独立，$BC=\varnothing$，若

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{2},\quad P(AC\mid AB\cup C)=\frac{1}{4},$$

则 $P(C)=$ ________.

三、解答题：15 ~ 23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

(15)（**本题满分 10 分**）

求不定积分 $\int e^{2x}\arctan\sqrt{e^x-1}\,dx$.

(16)（**本题满分 10 分**）

将长为 2m 的铁丝分成三段，依次围成圆、正方形与正三角形，三个图形的面积之和是否存在最小值？若存在，求出最小值.

(17)（**本题满分 10 分**）

设 Σ 是曲面 $x=\sqrt{1-3y^2-3z^2}$ 的前侧，计算曲面积分

$$I=\iint_\Sigma x\,dy\,dz+(y^3+2)\,dz\,dx+z^3\,dx\,dy.$$

(18)（**本题满分 10 分**）

已知微分方程 $y'+y=f(x)$，其中 $f(x)$ 是 R 上的连续函数.

（Ⅰ）若 $f(x)=x$，求方程的通解；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 是周期为 T 的函数，证明：方程存在唯一的以 T 为周期的解.

(19)（**本题满分 10 分**）

设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1>0$，$x_ne^{x_{n+1}}=e^{x_n}-1\ (n=1,2,\cdots)$，证明 $\{x_n\}$ 收敛，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

(20)(**本题满分 11 分**)

设实二次型$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1-x_2+x_3)^2+(x_2+x_3)^2+(x_1+ax_3)^2$,其中 a 是参数.

(Ⅰ)求$f(x_1,x_2,x_3)=0$ 的解;

(Ⅱ)求$f(x_1,x_2,x_3)$ 的规范形.

(21)(**本题满分 11 分**)

已知 a 是常数,且矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{bmatrix}$可经初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}$.

(Ⅰ)求 a;

(Ⅱ)求满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

(22)(**本题满分 11 分**)

设随机变量 X 与 Y 相互独立,X 的概率分布为 $P\{X=1\}=P\{x=-1\}=\dfrac{1}{2}$,$Y$ 服从参数为 λ 的泊松分布.令 $Z=XY$.

(Ⅰ)求 $\operatorname{cov}(X,Z)$;

(Ⅱ)求 Z 的概率分布.

(23)(**本题满分 11 分**)

设总体的概率密度为

$$f(x,\sigma)=\frac{1}{2\sigma}e^{\frac{|x|}{\sigma}},\ -\infty<x<+\infty,$$

其中 $\sigma\in(0,+\infty)$ 为未知参数,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.记 σ 的最大似然估计量为 $\hat{\sigma}$.

(Ⅰ)求 $\hat{\sigma}$;

(Ⅱ)求 $E\hat{\sigma}$ 和 $D\hat{\sigma}$.

2018 年考研数学一试题答案与解析

一、选择题

(1)【**分析**】 按定义考察$f(x)$ 在 $x=0$ 的可导性,即考察$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$是否存在.

方法一 考察(D).

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos\sqrt{|x|}-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}|x|}{x}\text{不}\exists$$

因为 $\lim\limits_{x\to0+}\dfrac{-\frac{1}{2}|x|}{x}=-\dfrac{1}{2}$,$\lim\limits_{x\to0-}\dfrac{-\frac{1}{2}|x|}{x}=\dfrac{1}{2}$,$f'_+(0)\neq f'_-(0)$.$f'(0)$ 不 $\exists$.

因此选(D).

方法二 考察(A),(B),(C).

(A):$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{|x|\sin|x|}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{x}=0$

(B)：$f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x| \sin\sqrt{|x|}}{x} = \lim\limits_{x \to 0}\left(\dfrac{|x|}{x} \cdot \sin\sqrt{|x|}\right) = 0$

(C)：$f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos|x| - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x} = 0$

因此选(D).

---

(2)【分析一】 先求出旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 上 $\forall$ 点(x_0, y_0, z_0)处的切平面方程，由该切平面过两个定点，定出切点$(x_0, y_0, z_0)(z_0 = x_0^2 + y_0^2)$，就得到相应的切平面方程.

曲面 $z = x^2 + y^2$ 上 $\forall$ 点$(x_0, y_0, z_0)(z_0 = x_0^2 + y_0^2)$处的切平面方程是

$$z = z_0 + \frac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(x_0, y_0)}(x - x_0) + \frac{\partial z}{\partial y}\bigg|_{(x_0, y_0)}(y - y_0)$$

即 $$z = z_0 + 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0)$$

化简得 $$z = 2x_0x + 2y_0y - (x_0^2 + y_0^2)$$

分别令$(x, y, z) = (1, 0, 0), (0, 1, 0)$得

$$\begin{cases} 0 = 2x_0 - x_0^2 - y_0^2 \\ 0 = 2y_0 - x_0^2 - y_0^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_0 = y_0 \\ x_0(1 - x_0) = 0 \end{cases}$$

于是得切点 $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0), (1, 1, 2)$

相应的切平面方程是

$$z = 0 \quad 与 \quad 2x + 2y - z = 2$$

因此选(B).

【分析二】 旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$ 在原点与切平面相切即 $z = 0$ 是 $z = x^2 + y^2$ 的切平面，且过点$(1, 0, 0), (0, 1, 0)$. 于是排除(C)与(D)，只能在(A)与(B)中选择.

现考察 $$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

后式代入前式得 $x + y - x^2 - y^2 = 1$，即 $-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$，该方程无解，因此平面 $x + y - z = 1$ 与 $z = x^2 + y^2$ 不相交，不可能是切平面，选(B).

或考察 $$\begin{cases} 2x + 2y - z = 2 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

后式代入前式得 $2x + 2y - x^2 - y^2 = 2$，即 $-(x - 1)^2 - (y - 1)^2 = 0$，得$(x, y) = (1, 1)$.

因此 $2x + 2y - z = 2$ 与 $z = x^2 + y^2$ 有唯一交点$(1, 1, 2)$它是 $z = x^2 + y^2$ 的切平面.

---

(3)【分析】 这是数值级数的求和，按该级数的特点与题目设置的选项，提示我们要用分解法并用 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的幂级数展开式求得该数值级数的和.

已知 $$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} (|x| < +\infty),$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} (|x| < +\infty)$$

现将原级数分解成

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)+2}{(2n+1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} = \cos 1 + 2\sin 1.$$

因此选(B).

评注 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的幂级数展开式中,记住一个就可得另一个.

若已记住 $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

逐项求导得 $(\sin x)' = \cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

反之,若记住了 $\cos x$ 的上述展式,逐项积分得

$$\sin x = \int_0^x \cos t \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^x t^{2n} \mathrm{d}t$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{1}{2n+1} t^{2n+1} \Big|_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

(4)【分析】 这是同一区间$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上比较三个定积分,其被积函数均连续,这只须比较被积函数.

先利用奇偶函数在对称区间上定积分性质,简化

$$M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1+x)^2}{1+x^2} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \mathrm{d}x + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2x}{1+x^2} \mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \mathrm{d}x$$

现只须在$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上比较三个函数

$$1,\ 1+\sqrt{\cos x},\ \frac{1+x}{e^x}$$

易知 $1 < 1+\sqrt{\cos x} \left(x \in \left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

$\Rightarrow$ $$M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \mathrm{d}x < \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\sqrt{\cos x}) \mathrm{d}x = K$$

下面证明:$\dfrac{1+x}{e^x} < 1 \left(x \in \left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right], x \neq 0\right)$.

$$\Leftrightarrow e^x > 1+x \Leftrightarrow f(x) = e^x - x - 1 > 0$$

方法一 令$f(x) = e^x - x - 1 \Rightarrow f'(x) = e^x - 1 \Rightarrow f''(x) = e^x > 0 \Rightarrow f'(x)\begin{cases} < 0(x<0) \\ = 0(x=0) \\ > 0(x>0) \end{cases} \Rightarrow f(x)$
$> f(0) = 0\ (x \neq 0)$.

方法二 令 $f(x) = e^x - x - 1$,用泰勒公式

$\Rightarrow$ $$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(\xi)x^2, \text{(}\xi\text{ 在 0 与 }x\text{ 之间)}$$

$$= \frac{1}{2}e^{\xi} > 0$$

方法三 直接考察 $g(x) = \dfrac{1+x}{e^x}$ 的单调性.

$$g'(x)=\frac{e^x-(1+x)e^x}{e^{2x}}=\frac{-x}{e^x}\begin{cases}>0 & (x<0)\\ =0 & (x=0)\\ <0 & (x>0)\end{cases}$$

$\Rightarrow\quad g(x)<g(0)=1\ (x\neq 0)$.

由于$\frac{1+x}{e^x}<1\left(x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],x\neq 0\right)$.

$\Rightarrow$ $$N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+x}{e^x}dx<\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1dx=M$$

因此 $K>M>N$

选(C).

---

(5)【分析】 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$. $\boldsymbol{A}$和各选项中的矩阵都不相似于对角矩阵. 对这样的两个矩阵,要判定它们相似没有有效的方法,而判定它们不相似是有办法的. 因此本题采用排除法较好.

工具:相似的矩阵秩相等. 若$\boldsymbol{A}$相似于$\boldsymbol{B}$,则$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$相似于$\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}$,从而$r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})$.

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix},\ r(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=2.$$

而当$\boldsymbol{B}$取(B),(C),(D)中的任一矩阵时$r(\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})=1$. 从而(B),(C),(D)都排除,故选(A).

---

(6)【分析】 **方法一** 一方面,$\boldsymbol{A}$是$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})$的子矩阵,因此$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})\geqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

另一方面,$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})$是$\boldsymbol{A}$,$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$的乘积:$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{B})$

因此$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})\leqslant\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$,得$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

方法二 矩阵的秩就是其列向量组的秩. 设

$$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n),\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n),\boldsymbol{AB}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n).$$

则 $$\boldsymbol{\gamma}_i=\boldsymbol{A\beta}_i=b_{1i}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{2i}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{ni}\boldsymbol{\alpha}_n$$

从而$\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n$可以用$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$线性表示,

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{AB})=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{\gamma}_1,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n)=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}).$$

选(A).

评注 本题也可用排除法.

设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}$,$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$

若$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$,则$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$,

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{BA})=\mathrm{r}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}=2>\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\text{排除(B)}.$$

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=2,\max\{\mathrm{r}(\boldsymbol{A}),\mathrm{r}(\boldsymbol{B})\}=1,\text{排除(C)}.$$

若$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$,则$\mathrm{r}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1,\mathrm{r}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})=0$.

排除(D).

---

(7)【分析】 由 $f(1+x)=f(1-x)$，可知函数 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称.

故 $$P\{X<0\}=P\{X>2\}.$$

又 $$\begin{aligned}1&=P\{-\infty<X<+\infty\}=P\{X<0\}+P\{0<X<2\}+P\{X>2\}\\&=2P\{X<0\}+0.6\end{aligned}$$

所以 $P\{X<0\}=0.2$.

故选(A).

---

(8)【分析】 已知方差 σ^2 关于 μ 的检验所用统计量服从正态分布，未知方差 σ^2 关于 μ 的检验所用统计量服从 t 分布，无论正态分布还是 t 分布，拒绝域都随着检验水平 α 的减小而减小. 相反，接受域随着 α 的减小而增大，也就是说 $\alpha=0.01$ 的接受域包含了 $\alpha=0.05$ 的接受域，若 $\alpha=0.05$ 被接受了，则 $\alpha=0.01$ 必被接受，故选(D).

> **评注** 若用图形法更直观，画一个正态(或 t)的密度函数图，标出拒绝域与接受域，根据区间的包含关系，问题便一目了然了.

二、填空题

(9)【分析】
$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}&=\lim_{x\to0}\left(1-\frac{2\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}\\&=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{\sin kx}\ln\left(1-\frac{2\tan x}{1+\tan x}\right)}=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{\sin kx}\left(-\frac{2\tan x}{1+\tan x}\right)}\\&=\lim_{x\to0}e^{\frac{-2x}{kx}}=e^{-\frac{2}{k}}=e\end{aligned}$$

$\Rightarrow\quad k=-2$.

---

(10)【分析】
$$\begin{aligned}\int_0^1 xf''(x)\,dx&=\int_0^1 x\,df'(x)=xf'(x)\Big|_0^1-\int_0^1 f'(x)\,dx\\&=f'(1)-f(x)\Big|_0^1=f'(1)-f(1)+f(0)\end{aligned}$$

由题设 $f(0)=0,\ f(1)=2^1=2,\ f'(1)=(2^x)'\big|_{x=1}=2\ln2$.

因此 $$\int_0^1 xf''(x)\,dx=2\ln2-2=2(\ln2-1).$$

---

(11)【分析】 三元向量函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)=(P,Q,R)$，则
$$\operatorname{rot}\boldsymbol{F}(x,y,z)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix}.$$

这里 $P=xy,Q=-yz,R=zx$，于是
$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\boldsymbol{F}(1,1,0)&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\xy&-yz&zx\end{vmatrix}_{(1,1,0)}=(y\boldsymbol{i}-z\boldsymbol{j}-x\boldsymbol{k})\Big|_{(1,1,0)}\\&=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}=(1,0,-1).\end{aligned}$$

---

(12)【分析】 由变量的轮换对称性
$$\oint_L xy\,ds=\oint_L yz\,ds=\oint_L zx\,ds$$

$\Rightarrow \qquad \oint_L xy\mathrm{d}s = \frac{1}{3}\oint_L (xy + yz + xz)\mathrm{d}s$

在 L 上 x,y,z 满足

$$\begin{cases}(x+y+z)^2 = 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1\end{cases} \Rightarrow \quad xy + yz + zx = -\frac{1}{2}$$

于是 $\qquad \oint_L xy\mathrm{d}s = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\int_L \mathrm{d}s = -\frac{1}{6}\times L\text{ 的周长} = -\frac{\pi}{3}.$

其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线是半径为 1 的圆周,周长为 2π.

---

(13)【分析】 用 $|\boldsymbol{A}| = \boldsymbol{A}$ 的各特征值的乘积.

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的特征值分别为 λ_1,λ_2,则 $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

$$\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2) = \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}_2 = \lambda_1^2\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2^2\boldsymbol{\alpha}_2,$$

于是 $\quad \lambda_1^2\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2^2\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2.$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关,得 $\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = 1$. 于是 λ_1,λ_2 一定为一个取 1,另一个 -1, $|\boldsymbol{A}| = -1$.

---

(14)【分析】 $\frac{1}{4} = P(AC \mid AB\cup C) = \frac{P[AC(AB\cup C)]}{P(AB\cup C)}$

$$= \frac{P(ABC)+P(AC)-P(ABC)}{P(AB)+P(C)-P(ABC)} = \frac{P(AC)}{P(AB)+P(C)}$$

$$= \frac{P(A)P(C)}{P(A)P(B)+P(C)} = \frac{\frac{1}{2}P(C)}{\frac{1}{4}+P(C)}$$

得 $\quad P(C) = \frac{1}{4}$

三、解答题

(15)【分析与求解一】 用分部积分法

$$I = \int \mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{2x}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1} - \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+(\sqrt{\mathrm{e}^x-1})^2}\mathrm{d}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^x\sqrt{\mathrm{e}^x-1} + \frac{1}{2}\int(\mathrm{e}^x-1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}(\mathrm{e}^x-1)$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^x\sqrt{\mathrm{e}^x-1} + \frac{1}{3}\sqrt{\mathrm{e}^x-1}^3 + c$$

【分析与求解二】 先作变量替换再分部积分.

令 $t = \sqrt{\mathrm{e}^x-1} \quad\Rightarrow\quad x = \ln(t^2+1)$

$$I = \int\mathrm{e}^{2x}\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\,dx = \int(t^2+1)^2\arctan t\,\frac{2t}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \int(1+t^2)2t\arctan t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int\arctan t\,\mathrm{d}(1+t^2)^2$$

$$= \frac{1}{2}(1+t^2)^2\arctan t - \frac{1}{2}\int(1+t^2)^2\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2}(1+t^2)^2 \arctan t - \frac{1}{2}t - \frac{1}{6}t^3 + c$$

代入 $t = \sqrt{e^x - 1}$ 得

$$I = \frac{1}{2}e^{2x}\arctan\sqrt{e^x - 1} - \frac{1}{2}\sqrt{e^x - 1} - \frac{1}{6}(\sqrt{e^x - 1})^3 + c$$

---

(16)【分析与求解】 设圆的半径为 x,正方形边长为 y,正三角形边长为 $z\left(高为\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)$. 按题意,

$$2\pi x + 4y + 3z = 2(\mathrm{m})$$

这三个图形的面积和为 $\pi x^2 + y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}z^2$.

问题变成了:求 $f(x,y,z) = \pi x^2 + y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}z^2$ 在 $2\pi x + 4y + 3z = 2$ 条件下的最小值.

用拉格朗日乘子法,令

$$F(x,y,z,\lambda) = \pi x^2 + y^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}z^2 + \lambda(2\pi x + 4y + 3z - 2)$$

解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2\pi x + 2\pi\lambda = 0 & ① \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y + 4\lambda = 0 & ② \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}z + 3\lambda = 0 & ③ \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 2\pi x + 4y + 3z - 2 = 0 & ④ \end{cases}$$

② 式乘$\frac{\pi}{2}$与 ① 比较得 $2x = y$,③ 式乘$\frac{2}{3}\pi$ 与 ① 比较得 $2\sqrt{3}x = z$,代入 ④ 式得

$$2\pi x + 8x + 6\sqrt{3}x = 2,\ x = \frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$$

$$y = \frac{2}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}},\quad z = \frac{2\sqrt{3}}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$$

相应的
$$f(x,y,z) = \frac{\pi}{(\pi + 4 + 3\sqrt{3})^2} + \frac{4}{(\pi + 4 + 3\sqrt{3})^2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{4\times 3}{(\pi + 4 + 3\sqrt{3})^2}$$
$$= \frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$$

由实际问题可知,最小值一定存在,且最小值为$\frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}$.

评注 若只围成圆,则圆半径为$\frac{1}{\pi}$,面积为$\frac{1}{\pi}$,若只围成正方形,边长为$\frac{1}{2}$,面积为$\frac{1}{4}$,若只围成三角形,边长为$\frac{2}{3}$,面积为$\frac{1}{3\sqrt{3}}$.

$$\frac{1}{\pi} > \frac{1}{4} > \frac{1}{3\sqrt{3}} > \frac{1}{\pi + 4 + 3\sqrt{3}}.$$

(17)【分析与求解】 Σ是椭球面:$x^2+3y^2+3z^2=1$的前半部分,取前侧.曲面不封闭,取辅助面Σ_1为yz平面上椭球面所截部分,即$x=0(y^2+z^2\leqslant\frac{1}{3})$,取后侧.$\Sigma$与$\Sigma_1$围成区域$\Omega$(前半椭球体),边界取外侧.在$\Omega$上可用高斯公式.

记 $$I=\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中$P=x,Q=y^3+2,R=z^3$.

Σ_1垂直zx平面与xy平面,故$\iint_{\Sigma_1}Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\iint_{\Sigma_1}R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.又在$\Sigma_1$上$P=0$,故$\iint_{\Sigma_1}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$.于是

$$\iint_{\Sigma_1}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

现用高斯公式得

$$\begin{aligned}I&=\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_1\cup\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega}(1+3y^2+3z^2)\mathrm{d}V\\&=\iiint_{\Omega}1\mathrm{d}V+3\iiint_{\Omega}(y^2+z^2)\mathrm{d}V\xlongequal{记}I_1+I_2.\end{aligned}$$

先求 $$\begin{aligned}I_1&=\iiint_{\Omega}1\mathrm{d}V=\int_0^1\mathrm{d}x\iint_{D(x)}1\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ \left(D(x):y^2+z^2\leqslant\frac{1}{3}(1-x^2)\right)\\&=\int_0^1\frac{\pi}{3}(1-x^2)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}\pi\end{aligned}$$

再求I_2:

方法一 $$\begin{aligned}I_2&=3\iiint_{\Omega}(y^2+z^2)\mathrm{d}V=3\iint_{D_{yz}}\left(\int_0^{\sqrt{1-3(y^2+z^2)}}(y^2+z^2)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\&=3\iint_{D_{yz}}(y^2+z^2)\sqrt{1-3(y^2+z^2)}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ \left(D_{yz}:y^2+z^2\leqslant\frac{1}{3}\right)\\&\xlongequal[变换]{极坐标}3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}}r^2\sqrt{1-3r^2}r\mathrm{d}r\\&\xlongequal{r=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta}6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{3}\sin^2\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\theta\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta\mathrm{d}\theta\\&=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta(1-\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^3\theta-\sin^5\theta)\mathrm{d}\theta\\&=\frac{2\pi}{3}\left(\frac{2}{3\cdot1}-\frac{4\cdot2}{5\cdot3\cdot1}\right)=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{2}{15}=\frac{4}{45}\pi\end{aligned}$$

方法二 $$\begin{aligned}I_2&=3\int_0^1\mathrm{d}x\iint_{D(x)}(y^2+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ \left(D(x):(y^2+z^2)\leqslant\frac{1}{3}(1-x^2)\right)\\&\xlongequal[变换]{极坐标}3\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-x^2}}r^2\cdot r\mathrm{d}r=6\pi\int_0^1\frac{1}{4}r^4\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{6}\pi\int_0^1(1-x^2)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\pi\int_0^1(1-2x^2+x^4)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{6}\pi\left(1-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}\right)=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{8}{15}=\frac{4\pi}{45}\end{aligned}$$