丛书主编：陈兰荪

20

生物数学丛书

孙树林　著

恒化器动力学模型的数学研究方法

科学出版社

恒化器动力学模型的数学研究方法

孙树林　著

科　学　出　版　社
北　京

内 容 简 介

本书首先给出了恒化器模型研究中所用到的非线性微分方程基本理论，然后分脉冲恒化器模型、时滞恒化器模型和随机恒化器模型三部分，分别介绍了恒化器模型的基本建模思想、研究方法和数值模拟. 本书系统地分析了固定时刻脉冲的模型和状态脉冲的模型，得到了系统周期解存在和稳定的充分条件，以及系统持久的条件. 讨论了时滞恒化器模型，得到了不同时滞对系统平衡点稳定性的影响以及分支周期解存在的条件. 最后讨论了随机恒化器模型，分析了环境噪声对系统解的性质的影响. 当噪声强度较小时，随机模型的解的性质与确定性模型的解的性质基本类似；当噪声强度较大时，随机模型的结果与确定性模型的结果是截然相反的.

本书可作为高等院校高年级本科生的选修教材和生物数学方向研究生的辅导教材，也可供高等院校教师和应用数学工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

恒化器动力学模型的数学研究方法/孙树林著. —北京：科学出版社，2017. 9
(生物数学丛书；20)
ISBN 978-7-03-054646-3

Ⅰ. ①恒… Ⅱ. ①孙… Ⅲ. ①微生物培养-连续培养-动力学模型-数学方法-研究方法 Ⅳ. ①Q93-335

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 238291 号

责任编辑：陈玉琢 / 责任校对：邹慧卿
责任印制：张　伟 / 封面设计：王　浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 9 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2017 年 9 月第一次印刷 印张：14
字数：265 000

定价：79.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《生物数学丛书》序

传统的概念：数学、物理、化学、生物学，人们都认定是独立的学科，然而在 20 世纪后半叶开始，这些学科间的相互渗透、许多边缘性学科的产生，各学科之间的分界已渐渐变得模糊了，学科的交叉更有利于各学科的发展，正是在这个时候数学与计算机科学逐渐地形成生物现象建模，模式识别，特别是在分析人类基因组项目等这类拥有大量数据的研究中，数学与计算机科学成为必不可少的工具．到今天，生命科学领域中的每一项重要进展，几乎都离不开严密的数学方法和计算机的利用，数学对生命科学的渗透使生物系统的刻画越来越精细，生物系统的数学建模正在演变成生物实验中必不可少的组成部分．

生物数学是生命科学与数学之间的边缘学科，早在 1974 年就被联合国教科文组织的学科分类目录中作为与“生物化学”“生物物理”等并列的一级学科．“生物数学”是应用数学理论与计算机技术研究生命科学中数量性质、空间结构形式，分析复杂的生物系统的内在特性，揭示在大量生物实验数据中所隐含的生物信息．在众多的生命科学领域，从“系统生态学”“种群生物学”“分子生物学”到“人类基因组与蛋白质组即系统生物学”的研究中，生物数学正在发挥巨大的作用，2004 年*Science* 杂志在线出了一期特辑，刊登了题为“科学下一个浪潮——生物数学”的特辑，其中英国皇家学会院士 Lan Stewart 教授预测，21 世纪最令人兴奋、最有进展的科学领域之一必将是“生物数学”．

回顾“生物数学”我们知道已有近百年的历史：从 1798 年 Malthus 人口增长模型，1908 年遗传学的 Hardy-Weinberg“平衡原理”，1925 年 Voltera 捕食模型，1927 年 Kermack-Mckendrick 传染病模型到今天令人注目的“生物信息论”，“生物数学”经历了百年迅速的发展，特别是 20 世纪后半叶，从那时期连续出版的杂志和书籍就足以反映出这个兴旺景象；1973 年左右，国际上许多著名的生物数学杂志相继创刊，其中包括 Math Biosci, J. Math Biol 和 Bull Math Biol; 1974 年左右，由 Springer-Verlag 出版社开始出版两套生物数学丛书：*Lecture Notes in Biomathermatics*（二十多年共出书 100 部）和*Biomathematics*（共出书 20 册）；新加坡世界科学出版社正在出版*Book Series in Mathematical Biology and Medicine* 丛书．

“丛书”的出版，既反映了当时“生物数学”发展的兴旺，又促进了“生物数学”的发展，加强了同行间的交流，加强了数学家与生物学家的交流，加强了生物数学学科内部不同分支间的交流，方便了对年轻工作者的培养．

从 20 世纪 80 年代初开始, 国内对 “生物数学” 发生兴趣的人越来越多, 他 (她) 们有来自数学、生物学、医学、农学等多方面的科研工作者和高校教师, 并且从这时开始, 关于 “生物数学” 的硕士生、博士生不断培养出来, 从事这方面研究、学习的人数之多已居世界之首. 为了加强交流, 为了提高我国生物数学的研究水平, 我们十分需要有计划、有目的地出版一套 “生物数学丛书”, 其内容应该包括专著、教材、科普以及译丛, 例如: ① 生物数学、生物统计教材; ② 数学在生物学中的应用方法; ③ 生物建模; ④ 生物数学的研究生教材; ⑤ 生态学中数学模型的研究与使用等.

中国数学会生物数学学会与科学出版社经过很长时间的商讨, 促成了 “生物数学丛书” 的问世, 同时也希望得到各界的支持, 出好这套丛书, 为发展 “生物数学” 研究, 为培养人才作出贡献.

陈兰荪

2008 年 2 月

前 言

恒化器 (chemostat) 作为一种基本的实验室装置, 在数学生态学中有着非常重要的地位. 主要原因是恒化器动力学模型可以用来模拟湖泊种群对资源的利用, 可以模拟生物废水处理以及发酵工程的实际微生物生长过程. 另一个重要原因是, 作为生物学模型之一, 恒化器动力学模型的参数是可控的, 而且实验证明数学结论和生物学现象基本上是一致的. 因此, 恒化器模型为我们提供了一类重要的非线性微分方程系统, 那么研究这类系统的数学性质就非常有意义. 本书主要是基于恒化器介绍一些微生物培养动力学模型的数学研究方法以供参考. 为了从数学的角度来理解恒化器动力学模型的重要性, 有必要对非线性微分方程理论作大概的介绍. 本书第 1 章简要地介绍了常微分方程、时滞微分方程、脉冲微分方程以及随机微分方程的一些基本理论结果, 这些理论结果也正是本书后面几章研究微生物培养动力学模型所需要的. 另外, 研究种群生态学、传染病动力学等生物数学模型也会用到这些非线性微分方程的基本理论结果. 当然本书主要是介绍恒化器模型的数学研究方法, 因此在 1.5 节简要地介绍了基本恒化器模型的推导思想及研究方向.

全书共分四章, 第 1 章介绍非线性微分方程基本理论和恒化器模型. 第 2~4 章的每一节均按照: 模型的建立 — 模型求解分析 — 数值模拟的步骤对各类模型进行分析研究, 力求让读者对微生物培养的研究思想和研究方法从数学的角度有一个简单的认识, 进一步了解数学在研究恒化器模型中的一些基本思路. 第 2~4 章所选内容均为编者近几年的研究成果. 第 2 章介绍脉冲恒化器模型, 分别给出了固定时刻脉冲的模型和状态脉冲的模型, 分析了不同形式的脉冲作用对恒化器模型动力学行为的影响. 第 3 章介绍时滞恒化器模型, 所给模型均具有两个不同的确定时滞, 相对于具有一个确定时滞的模型, 这里建立的模型更接近实际问题, 而且所得结论更加丰富, 从而也能更好地说明一些实际生物现象. 第 4 章介绍随机恒化器模型, 主要研究环境噪声 (白噪声) 对恒化器模型动力学行为的影响, 所得结论与实际问题更加相符. 比如噪声强度较小, 而其他条件相同时, 随机模型解的动力学性质与确定模型解的动力学性质基本类似, 但是噪声强度较大, 其他条件相同时, 随机模型的结果与确定模型的结果会截然相反. 另外, 随机微分方程种群模型是近几年来研究的热点问题, 已经引起很多学者的关注, 因此, 随机恒化器模型的研究也将是未来的一个重要研究课题.

以下同学十分认真、仔细地阅读了全书的初稿, 提出了宝贵的修改意见, 为本书的完成付出了辛勤的劳动, 在此一并表示感谢, 他们是张瑞娟、尹辉、段晓祥、刘

星、晋丹慧、孙亚茹、张晓峰、张晓露. 衷心感谢科学出版社数理分社的编辑陈玉琢同志以及为本书出版付出辛勤劳动的其他同志, 他们为本书的编审和出版投入了很多的时间和精力.

虽然作者在编写过程中力求叙述准确、完善, 但由于作者水平有限, 书中难免有疏漏和不妥之处, 希望广大读者和同行批评指正, 在此表示诚挚的感谢.

作　者

2017 年 4 月于山西师范大学

目录

第 1 章 基本理论

本章主要介绍几类微分动力系统的相关基本理论, 为以后章节的研究作准备.

1.1 节介绍常微分方程动力系统基础知识. 主要是常微分方程定性理论和稳定性理论以及分支理论的一些重要结论.

1.2 节介绍时滞微分方程动力系统基础知识.

1.3 节介绍脉冲微分方程动力系统基础知识.

1.4 节介绍随机微分方程动力系统基础知识.

1.5 节介绍恒化器模型的推导.

1.1 常微分方程基础知识

系统介绍常微分方程理论的书籍比较多, 主要是介绍定性理论和稳定性理论以及分支理论. 定性理论的主要参考书目有马知恩和周义仓的《常微分方程定性与稳定性方法》以及文献 [66], [71], [101]; 稳定性理论的主要参考书目有黄琳的《稳定性理论》以及文献 [41], [58], [66], [71]; 分支理论可以参考文献 [35], [66], [71], [101]. 本节主要是不加证明地给出一些理论结果以备后面的应用, 主要内容来自以上所列文献.

1.1.1 基本定理

定理 1.1.1 (解的存在唯一性定理) *考虑初值问题:*

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.1.1}$$

其中 x 为 $\mathbb{R}^n$ 中的向量, f 是实变量 t 和 n 维向量 x 的 n 维向量值函数, 若 $f(t,x)$ 在开区域 $G \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 中满足下列条件:

(1) f 在 G 内连续, 记为 $f \in C(G)$;

(2) f 关于 x 满足局部 Lipschitz 条件, 即对于点 $P_0(t_0, x_0) \in G$, 存在

$$G_0 = \{(t,x) \| t - t_0| \leqslant a, \|x - x_0\| \leqslant b\} \subset G$$

和依赖于点 P_0 的常数 L_{P_0}, 使得 $\forall (t,x^1), (t,x^2) \in G_0$, 有不等式

$$\|f(t,x^1) - f(t,x^2)\| \leqslant L_{P_0} \|x^1 - x^2\| \tag{1.1.2}$$

成立, 其中 $\|\cdot\|$ 表示欧氏范数,

则初值问题 (1.1.1) 在区间 $|t-t_0|\leqslant h^*$ 上存在唯一的解. 其中

$$0<h^*<\min\left\{h,\frac{1}{L_{P_0}}\right\},\quad h=\min\left\{a,\frac{b}{M}\right\},\ M=\max_{(t,x)\in G_0}\|f(t,x)\|. \tag{1.1.3}$$

引理 1.1.2 (Gronwall 不等式)　如果函数 $g(t)$ 在 $[t_0,t_1]$ 上连续, 而且满足不等式

$$0\leqslant g(t)\leqslant K+L\int_{t_0}^{t}g(s)\mathrm{d}s,\quad K\geqslant 0, L\geqslant 0,$$

则在 $[t_0,t_1]$ 上成立不等式

$$0\leqslant g(t)\leqslant K\exp\{L(t-t_0)\}.$$

为了研究微分方程解的渐近性态, 我们需要解的存在区间无穷大, 即时间 t 向右可以延拓到无穷.

定理 1.1.3 (解的延拓定理)　设 f 在域 $G=\mathbb{R}\times D, D\subseteq\mathbb{R}^n$ 内连续, 有界且关于 x 满足局部 Lipschitz 条件. 若初值问题 (1.1.1) 的解的几何长度无限, 则此解的存在区间为 $(-\infty,\infty)$.

在介绍微分不等式之前, 先引进微分不等式的解和微分方程最大解、最小解的概念.

令 $f(t,x)$ 是区域 $\mathcal{D}=(a,b)\times\mathbb{R}$ 上的一个连续函数. 称 $x(t)$ 是微分不等式

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}>f(t,x) \tag{1.1.4}$$

的一个定义在 $J=[t_0,t_0+\omega)\subset(a,b)$ 上的解, 如果对所有的 $t\in J$, $x'(t)$ 存在, 点 $(t,x(t))\in\mathcal{D}$, 而且不等式 (1.1.4) 成立.

显然, 可以类似地定义不等式 $x'(t)\geqslant f(t,x)$, $x'(t)<f(t,x)$ 以及 $x'(t)\leqslant f(t,x)$ 的解.

考虑一个初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=f(t,x),\\ x(t_0)=x_0,\end{cases} \tag{1.1.5}$$

其中 $f(t,x)$ 是 $\mathcal{D}=(a,b)\times\mathbb{R}$ 上的实值连续函数, $(t_0,x_0)\in\mathcal{D}$. 下面定义初值问题 (1.1.5) 的最大解和最小解.

定义 1.1.4 (最大解、最小解)　初值问题 (1.1.5) 的解 $r(t)(\rho(t))$ 称为该问题在区间 J 上的最大解 (最小解), 是指如果对初值问题 (1.1.5) 的任意解 $x(t), t\in J$, 成立不等式

$$x(t)\leqslant r(t)\quad(x(t)\geqslant\rho(t)),\quad t\in J.$$

定理 1.1.5 (微分不等式) 令 $f(t,x)$ 在 $\mathcal{D}$ 上连续, $r(t)$ 是初值问题 (1.1.5) 在 J 上的最大解, $x(t)$ 是微分不等式

$$x'(t) \leqslant f(t,x), \quad t \in J$$

的一个解. 那么, 当 $x(t_0) \leqslant x_0$ 时, 必有 $x(t) \leqslant r(t)$.

1.1.2 动力系统

设有微分方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t,x), \quad f \in C(G = I \times D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \tag{1.1.6}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x), \quad f \in C(D \subseteq \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n). \tag{1.1.7}$$

若将 x 看作是运动质点 M 在时间 t 的坐标, f 看作是速度向量, 则 (1.1.6) 与 (1.1.7) 就是质点 M 的运动方程. 它们的解 $x = x(t)$ 就是 M 点的运动轨迹. 标志动点 M 位置的空间 $\mathbb{R}^n$ 称为**相空间**, 空间 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 称为**增广相空间**, 它是解所表示的曲线 (简称解曲线) 所在的空间. 解 $x = x(t)$ 在相空间的图形, 即运动轨迹称为方程的**轨线**. 轨线也就是把时间 t 看作是参数, 解 $x = x(t)$ 在相空间 $\mathbb{R}^n$ 的图形, 它显然就是 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ 内的解曲线在相空间 $\mathbb{R}^n$ 的投影.

给定了微分方程 (1.1.6) 或 (1.1.7), 就相当于在相空间 $\mathbb{R}^n$ 的区域 D 内分别给定了向量场 $f(t,x)$ 或 $f(x)$. 但是, 这两个向量场却有本质的区别. $f(x)$ 所确定的向量场与时间无关仅取决于点 M 的位置, 称为定常场或自治场, 过域 D 内任一点 x 确定唯一的方向, 称方程 (1.1.7) 为**自治系统**. $f(t,x)$ 所确定的向量场不仅与点 M 的位置有关还与时间 t 有关, 称为时变场或非自治场, 过 D 内同一点可能有多个 (甚至无穷多个) 方向, 它们将随 t 的不同而不同, 称方程 (1.1.6) 为**非自治系统**.

如前所述, 自治系统 (1.1.7) 是域 D 内质点运动规律的描述, 它过点 $P \in D$ 的解记作 $\phi(P,t)$, 它是过点 P 的运动的方程, 也称为过点 P 的一个运动, 设它的存在区间为 $(-\infty, +\infty)$. 固定 P 让 t 变化, $\phi(P,t)$ 在相空间中表示一条轨线, 在增广相空间中表示一条解曲线. 若固定 t, 则 $\phi_t(P) = \phi(P,t)$ 可以看成是由 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的映射或变换, 它把 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 映射成自身. 再让参数 t 变动, 则 $\phi_t(P)$ 可看成是 D 内的点沿着其轨线方向流动, 称 $\phi_t(P)$ $(P \in D, t \in \mathbb{R})$ 为系统 (1.1.7) 的**流**.

对每一 $t \in \mathbb{R}$, $\phi_t(P)$ 是 $D \to D$ 的变换, 这些变换的全体所构成的集合为

$$\{\phi_t(P) = \phi(P,t) | -\infty < t < +\infty\}.$$

定义 1.1.6 (动力系统)　D 上的一个动力系统是一个 C^1-映射

$$\phi: D \times \mathbb{R} \to D,$$

其中 $D \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个开子集, 而且, 如果 $\phi_t(P) = \phi(P,t)$, 那么 $\phi_t(P)$ 满足:

(i) $\phi_0(P) = P,\ P \in D$;

(ii) $\phi_t(P) \circ \phi_s(P) = \phi(\phi(P,t),s) = \phi_{t+s}(P),\ t,s \in \mathbb{R},\ P \in D$.

显然, 从定义 1.1.6 可以看出, 对每一个 $t \in \mathbb{R}$, D 到 D 上的 C^1-映射 ϕ_t 存在 C^1-逆映射 ϕ_{-t}. 因此, ϕ_t $(t \in \mathbb{R})$ 是 D 上的一族单参数微分同胚, 形成了一个连续交换群.

1.1.3　极限集

对于自治系统 (1.1.7), 若点 $\bar{x} \in D$, 使得 $f(\bar{x}) \neq 0$, 则称 $\bar{x}$ 为系统 (1.1.7) 的**常点**; 若点 $x^* \in D$, 使得 $f(x^*) = 0$, 则称 x^* 为系统 (1.1.7) 的**奇点**(**或平衡点**).

对 $t_0 \in \mathbb{R}$, 称轨线 $\phi(P,t)$ $(t_0 \leqslant t < +\infty)$ 为自治系统 (1.1.7) 的**正半轨**, 记作 L_P^+ 或 $\phi(P,l^+)$; 称轨线 $\phi(P,t)$ $(-\infty < t \leqslant t_0)$ 为自治系统 (1.1.7) 的**负半轨**, 记作 L_P^- 或 $\phi(P,l^-)$; 将它的轨线 $\phi(P,t)$ $(-\infty < t < +\infty)$ 记作 L_P 或 $\phi(P,l)$.

定义 1.1.7 ($\omega(\alpha)$ 极限点)　若存在时间序列 $\{t_n\}$, 当 $n \to \infty$ 时 $t_n \to +\infty$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} \phi(P,t_n) = P^*,$$

则点 P^* 称为自治系统 (1.1.7) 过 P 点的轨线 $\phi(P,t)$ 的 ω-极限点.

类似地, 当 $n \to \infty$ 时 $t_n \to -\infty$, 使得

$$\lim_{n\to\infty} \phi(P,t_n) = q^*,$$

则点 q^* 称为自治系统 (1.1.7) 过 P 点的轨线 $\phi(P,t)$ 的 α-极限点.

轨线 $\phi(P,t)$ 的所有 ω-极限点形成的集合称为**ω-极限集**, 记作 Ω_P; 所有 α-极限点形成的集合称为**α-极限集**, 记作 $\mathcal{A}_P$; 所有极限点形成的集合 $\Omega_P \cup \mathcal{A}_P$ 称为轨线 $\phi(P,t)$ 的**极限集**.

定义 1.1.8 (不变集)　设有集合 B, 若对任意的 $P \in B$, 有系统 (1.1.7) 过 P 点的整条轨线 $L_P \in B$, 则称 B 是系统 (1.1.7) 的一个不变集.

显然, 自治系统 (1.1.7) 的任一条轨线都是系统 (1.1.7) 的一个不变集. 系统 (1.1.7) 的任一不变集都是由此系统的一些整条轨线所构成的.

下面给出平面极限集的相关内容. 设有平面自治系统

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = P(x,y), \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Q(x,y), \end{cases} \tag{1.1.8}$$

其中 $P,Q\in C(D\subseteq\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ 且适合 Lipschitz 条件.

定义 1.1.9 (无切线段) 设有直线段 $\overline{N_1N_2}\subset D$, 若其上 (包括两端点) 没有系统 (1.1.8) 的奇点和与轨线相切的切点, 则称 $\overline{N_1N_2}$ 为系统 (1.1.8) 的无切线段, 也称截线.

显然, 凡与无切线段相交的轨线只能从此无切线段的同一侧穿向另一侧.

定理 1.1.10 (Poincaré-Bendixson) 若平面自治系统 (1.1.8) 的正半轨 L_P^+ 有界且 Ω_P 中不含奇点, 则或者 $L_P^+=\Omega_P$ 为闭轨; 或者 Ω_P 为闭轨而 L_P^+ 正向盘旋逼近于 Ω_P.

为了彻底了解平面有界极限集可能具有的结构, 我们以 Ω_P 为例, $\mathcal{A}_P$ 类似. 把有界的 Ω_P 中的奇点和常点分成两个集合, 即设

$$\Omega_P=\Omega_P^{(1)}\bigcup\Omega_P^{(2)},$$

其中 $\Omega_P^{(1)}$ 表示 Ω_P 中所有常点的集合, 由于 Ω_P 为不变集, 故 $\Omega_P^{(1)}$ 是由一些整条轨线构成的; $\Omega_P^{(2)}$ 表示 Ω_P 中所有奇点的集合, 它是一个闭集. 且设

$$\Omega_P^{(2)}=\bigcup_{\alpha_i}C_{\alpha_i},\quad C_{\alpha_i}\bigcap C_{\alpha_j}=\varnothing\quad(i\neq j),$$

其中 C_{α_i} 是由 Ω_P 内某些奇点构成的连通分支.

定义 1.1.11 (奇异闭集合) 若 $\Omega_P=\Omega_P^{(1)}\bigcup\Omega_P^{(2)}$, 且 $\Omega_P^{(i)}$ $(i=1,2)$ 非空时, 称 Ω_P 为自治系统 (1.1.8) 的一个奇异闭集合.

定理 1.1.12 若平面自治系统 (1.1.8) 的正半轨 L_P^+ 有界, 则它的 ω-极限集 Ω_P 只能是以下三种类型之一:

(1) 奇点构成的连通闭集;

(2) 闭轨线;

(3) 奇异闭集合.

定理 1.1.13 平面自治系统 (1.1.8) 的任一闭轨线的内部至少包含此系统的一个奇点.

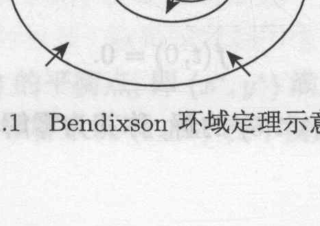

图 1.1 Bendixson 环域定理示意图

定理 1.1.14 (Bendixson 环域定理) 设有由闭曲线 L_1 与 L_2 $(L_1 \supset L_2)$ 所构成如图 1.1 所示的环域 $\mathbb{D}$, 若平面自治系统 (1.1.8) 凡与 L_1, L_2 相交的正半轨线均穿入 (出) 环域 $\mathbb{D}$, 且 $\mathbb{D}$ 内不含奇点, 则在 $\mathbb{D}$ 内至少存在此系统的一条闭轨线 Γ, 而且 Γ 必将 $\mathbb{D}$ 的内境界线 L_2 包含在其内部.

定义 1.1.15 (极限环) 设系统 (1.1.8) 有闭轨线 Γ, 若存在 $\delta > 0$, 使系统 (1.1.8) 在 Γ 的两侧邻域 $S(\Gamma, \delta)$ 内的一切轨线均以 Γ 为其 ω-极限集或 α-极限集, 则称 Γ 为系统 (1.1.8) 的一个极限环.

显然, 这样定义的极限环实际上是一条孤立的闭轨线. 定理 1.1.10 和定理 1.1.14 给出了平面系统 (1.1.8) 极限环存在性的判定方法, 下面给出极限环不存在的判定方法.

定理 1.1.16 (Poincaré切性曲线法) 设 G 为单连通区域, 若存在函数 $F(x,y) \in C^1(G)$, 使

$$\left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right|_{(1.1.8)} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = P(x,y)\frac{\partial F}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial F}{\partial y} \geqslant 0 (\leqslant 0),$$

且集合 $\left\{(x,y) \,\middle|\, P(x,y)\dfrac{\partial F}{\partial x} + Q(x,y)\dfrac{\partial F}{\partial y} = 0\right\}$ 内不含系统 (1.1.8) 的整条轨线, 则系统 (1.1.8) 不存在全部位于 G 内的闭轨线与只含一个奇点的奇异闭轨线.

定理 1.1.17 (Bendixson-Dulac 判别法) 若在单连通区域 G 内存在函数 $B(x,y) \in C^1(G)$, 使

$$\frac{\partial(BP)}{\partial x} + \frac{\partial(BQ)}{\partial y} \geqslant 0 (\leqslant 0),$$

且不在 G 的任一子区域内恒为零, 则系统 (1.1.8) 不存在全部位于 G 内的闭轨线和具有有限个奇点的奇异闭轨线. 函数 $B(x,y)$ 称为 Dulac 函数.

1.1.4 稳定性理论

稳定性理论是研究时间趋于无穷时微分方程解的性态, 它在自然科学、环境生态等诸多领域有广泛应用. 我们主要介绍时间趋于无穷时初值的扰动对系统的解的性态的影响, 也即 Lyapunov 意义下的稳定性理论. 下面将给出稳定性的严格定义以及一些常用的判定定理.

设非自治系统 (1.1.6) 满足定理 1.1.1 的条件, 其解 $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ 的存在区间是 $(-\infty, +\infty)$, $f(t,x)$ 还满足条件

$$f(t, 0) = 0. \tag{1.1.9}$$

(1.1.9) 保证 $x(t) = 0$ 是系统 (1.1.6) 的解, 称其为零解.