



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编 王梓坤

GAUSS'S HERITAGE
—FROM EQUALITY TO CONGRUENCE

Gauss 的遗产 ——从等式到同余式

冯贝叶 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



国家出版基金资助项目

现代数学中的著名定理纵横谈丛书
丛书主编 王梓坤

GAUSS'S HERITAGE
—FROM EQUALITY TO CONGRUENCE

Gauss 的遗产 ——从等式到同余式

冯贝叶 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书从数的起源谈起,逐步介绍数的发展和数的各种性质及其应用,其中包括了数学分析、实变函数论和高等代数的一些入门知识.

本书写法简明易懂,叙述尽量详细,适合高中以上文化程度的学生、教师、数学爱好者参考使用.

图书在版编目(CIP)数据

Gauss 的遗产:从等式到同余式/冯贝叶著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2018.1

(现代数学中的著名定理纵横谈丛书)

ISBN 978-7-5603-6546-6

I. ①G… II. ①冯… III. ①数论 IV. ①O156

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 073152 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 杜莹雪

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司

开 本 787mm×960mm 1/16 印张 40.75 字数 438 千字

版 次 2018 年 1 月第 1 版 2018 年 1 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-6546-6

定 价 108.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

◎
代
序

读书的乐趣

你最喜爱什么——书籍。

你经常去哪里——书店。

你最大的乐趣是什么——读书。

这是友人提出的问题和我的回答。真的，我这一辈子算是和书籍，特别是好书结下了不解之缘。有人说，读书要费那么大的劲，又发不了财，读它做什么？我却至今不悔，不仅不悔，反而情趣越来越浓。想当年，我也曾爱打球，也曾爱下棋，对操琴也有兴趣，还登台伴奏过。但后来却都一一断交，“终身不复鼓琴”。那原因便是怕花费时间，玩物丧志，误了我的大事——求学。这当然过激了一些。剩下来唯有读书一事，自幼至今，无日少废，谓之书痴也可，谓之书橱也可，管它呢，人各有志，不可相强。我的一生大志，便是教书，而当教师，不多读书是不行的。

读好书是一种乐趣，一种情操；一种向全世界古往今来的伟人和名人求

教的方法，一种和他们展开讨论的方式；一封出席各种活动、体验各种生活、结识各种人物的邀请信；一张迈进科学宫殿和未知世界的入场券；一股改造自己、丰富自己的强大力量。书籍是全人类有史以来共同创造的财富，是永不枯竭的智慧的源泉。失意时读书，可以使人重整旗鼓；得意时读书，可以使人头脑清醒；疑难时读书，可以得到解答或启示；年轻人读书，可明奋进之道；年老人读书，能知健神之理。浩浩乎！洋洋乎！如临大海，或波涛汹涌，或清风微拂，取之不尽，用之不竭。吾于读书，无疑义矣，三日不读，则头脑麻木，心摇摇无主。

潜能需要激发

我和书籍结缘，开始于一次非常偶然的機會。大概是八九岁吧，家里穷得揭不开锅，我每天从早到晚都要去田园里帮工。一天，偶然从旧木柜阴湿的角落里，找到一本蜡光纸的小书，自然很破了。屋内光线暗淡，又是黄昏时分，只好拿到大门外去看。封面已经脱落，扉页上写的是《薛仁贵征东》。管它呢，且往下看。第一回的标题已忘记，只是那首开卷诗不知为什么至今仍记忆犹新：

日出遥遥一点红，飘飘四海影无踪。

三岁孩童千两价，保主跨海去征东。

第一句指山东，二、三两句分别点出薛仁贵（雪、人贵）。那时识字很少，半看半猜，居然引起了极大的兴趣，同时也教我认识了许多生字。这是我有生以来独立看的第一本书。尝到甜头以后，我便千方百计去找书，向小朋友借，到亲友家找，居然断断续续看了《薛丁山征西》《彭公案》《二度梅》等，樊梨花便成了我心

中的女英雄。我真入迷了。从此，放牛也罢，车水也罢，我总要带一本书，还练出了边走田间小路边读书的本领，读得津津有味，不知人间别有他事。

当我们安静下来回想往事时，往往会发现一些偶然的小事却影响了自己的一生。如果不是找到那本《薛仁贵征东》，我的好学心也许激发不起来。我这一生，也许会走另一条路。人的潜能，好比一座汽油库，星星之火，可以使它雷声隆隆、光照天地；但若少了这粒火星，它便会成为一潭死水，永归沉寂。

抄，总抄得起

好不容易上了中学，做完功课还有点时间，便常光顾图书馆。好书借了实在舍不得还，但买不到也买不起，便下决心动手抄书。抄，总抄得起。我抄过林语堂写的《高级英文法》，抄过英文的《英文典大全》，还抄过《孙子兵法》，这本书实在爱得狠了，竟一口气抄了两份。人们虽知抄书之苦，未知抄书之益，抄完毫末俱见，一览无余，胜读十遍。

始于精于一，返于精于博

关于康有为的教学法，他的弟子梁启超说：“康先生之教，专标专精、涉猎二条，无专精则不能成，无涉猎则不能通也。”可见康有为强烈要求学生把专精和广博（即“涉猎”）相结合。

在先后次序上，我认为要从精于一开始。首先应集中精力学好专业，并在专业的科研中做出成绩，然后逐步扩大领域，力求多方面的精。年轻时，我曾精读杜布（J. L. Doob）的《随机过程论》，哈尔莫斯（P. R. Halmos）的《测度论》等世界数学名著，使我终身受益。简言之，即“始于精于一，返于精于博”。正如中国革命一

样,必须先有一块根据地,站稳后再开创几块,最后连成一片。

丰富我文采,澡雪我精神

辛苦了一周,人相当疲劳了,每到星期六,我便到旧书店走走,这已成为生活中的一部分,多年如此。一次,偶然看到一套《纲鉴易知录》,编者之一便是选编《古文观止》的吴楚材。这部书提纲挈领地讲中国历史,上自盘古氏,直到明末,记事简明,文字古雅,又富于故事性,便把这部书从头到尾读了一遍。从此启发了我读史书的兴趣。

我爱读中国的古典小说,例如《三国演义》和《东周列国志》。我常对人说,这两部书简直是世界上政治阴谋诡计大全。即以近年来极时髦的人质问题(伊朗人质、劫机人质等),这些书中早就有了,秦始皇的父亲便是受害者,堪称“人质之父”。

《庄子》超尘绝俗,不屑于名利。其中“秋水”“解牛”诸篇,诚绝唱也。《论语》束身严谨,勇于面世,“己所不欲,勿施于人”,有长者之风。司马迁的《报任少卿书》,读之我心两伤,既伤少卿,又伤司马;我不知道少卿是否收到这封信,希望有人做点研究。我也爱读鲁迅的杂文,果戈理、梅里美的小说。我非常敬重文天祥、秋瑾的人品,常记他们的诗句:“人生自古谁无死,留取丹心照汗青”“休言女子非英物,夜夜龙泉壁上鸣”。唐诗、宋词、《西厢记》《牡丹亭》,丰富我文采,澡雪我精神,其中精粹,实是人间神品。

读了邓拓的《燕山夜话》,既叹服其广博,也使我动了写《科学发现纵横谈》的心。不料这本小册子竟给我招来了上千封鼓励信。以后人们便写出了许许多多

的“纵横谈”。

从学生时代起,我就喜读方法论方面的论著。我想,做什么事情都要讲究方法,追求效率、效果和效益,方法好能事半功倍。我很留心一些著名科学家、文学家写的心得体会和经验。我曾惊讶为什么巴尔扎克在51年短短的一生中能写出上百本书,并从他的传记中去寻找答案。文史哲和科学的海洋无边无际,先哲们的明智之光沐浴着人们的心灵,我衷心感谢他们的恩惠。

读书的另一面

以上我谈了读书的好处,现在要回过头来说说事情的另一面。

读书要选择。世上有各种各样的书:有的不值一看,有的只值看20分钟,有的可看5年,有的可保存一辈子,有的将永远不朽。即使是不朽的超级名著,由于我们的精力与时间有限,也必须加以选择。决不要看坏书,对一般书,要学会速读。

读书要多思考。应该想想,作者说得对吗?完全吗?适合今天的情况吗?从书本中迅速获得效果的好办法是有的放矢地读书,带着问题去读,或偏重某一方面去读。这时我们的思维处于主动寻找的地位,就像猎人追找猎物一样主动,很快就能找到答案,或者发现书中的问题。

有的书浏览即止,有的要读出声来,有的要心头记住,有的要笔头记录。对重要的专业书或名著,要勤做笔记,“不动笔墨不读书”。动脑加动手,手脑并用,既可加深理解,又可避忘备查,特别是自己的灵感,更要及时抓住。清代章学诚在《文史通义》中说:“札记之功必不可少,如不札记,则无穷妙绪如雨珠落大海矣。”

许多大事业、大作品，都是长期积累和短期突击相结合的产物。涓涓不息，将成江河；无此涓涓，何来江河？

爱好读书是许多伟人的共同特性，不仅学者专家如此，一些大政治家、大军事家也如此。曹操、康熙、拿破仑、毛泽东都是手不释卷，嗜书如命的人。他们的巨大成就与毕生刻苦自学密切相关。

王梓坤

前言

作者从年轻时就对整数的奇妙性质和有关整数的各种有趣问题十分感兴趣,后来随着数学知识的增加,才知道整数又可发展成为有理数、实数和复数,而各种数之间既存在着相互的联系,又有很大差别.而有关整数的问題,有时其解法不由得令人拍案称奇.如此积累一多,发现如果不加整理和保存,很多精彩的想法就会擦肩而过,遂决定遇到有关的问题和材料就随时做一点笔记,到退休之时,竟积累了不少.这些笔记在多年的教学和辅导中,曾反复起了不少作用,因此觉得如果把它们整理出来,对那些像作者当年那样也对整数问题感兴趣的年轻人和初学者多少会有些帮助,于是就产生了这本书.

目前和本书内容及题材、体裁类似的书已有不少,其中也不乏广为人知的精彩作品.作者之所以还愿意写一本这样的书,是因为一方面,这些书有一些已难于买到和借到,另一方面是感到本书和已有的书相比,在以下几方面还是有一些新意和特色,所以才敢不揣冒昧,班门弄斧.

(1) 一次不定方程是我国古代已研究的比较成熟和成就较多的一个课题,其中如孙子问题和孙子定理(又称中国剩余定理)已是世界数学界公认的成果.

以往介绍这方面内容的书不在少数,但是往往有的书把古代的算法讲得很清楚,其中的数学原理则让人不太明了;有的书把现代的理论讲得很清楚,如何解释古代的算法则一笔带过.当作者看到这些书时,对此总感到遗憾.本书将古代的算法和现代的理论一一加以对照,使读者可以很清楚地看出古代的算法其每一步的意义和依据是什么,尤其是秦九韶、黄宗宪等人创立的算法的最后一步,本书给予了严格的证明.

(2) 在复数得到了广泛的应用后,古代的数学家如哈密尔顿以及现代的初学者都曾思考过是否可以把复数推广为三元数.关于创立三元数的问题,许多科普读物都明确无误地告诉读者,这是不可能的,但是为什么不可能就语焉不详了.本书以比较浅显的方法对此做了论证.

(3) 费马大定理一直是几百年来数学家们和科普读物中的热门话题,虽然这一问题现在已经获得解决,但是人们对一些初等的证明还是十分感兴趣,其中比较难的一个是 $n=3$ 时的费马大定理的证明.一般的数论书籍通常只介绍 $n=4$ 时的费马大定理的证明,即使

介绍 $n=3$ 时费马大定理的证明,也大都把它放在 $n=4$ 时的费马大定理的证明之后,这就足以说明 $n=3$ 时费马大定理的初等证明是有一定难度的.对这一比较难的问题,为使读者看懂,本应证明得更加详细,然而一些书在谈到这一问题时往往一开始就让读者看不下去了,其中最明显的一个地方是一开始就设 z 是偶数,很多人问过作者这个问题,后来经过作者反复钻研才发现通常的 $x>0, y>0, z>0$ 的条件下是不能做这一假设的,只有在允许 x, y, z 可以是任意整数(即允许它们为负数)的条件下,才可以做这一假设.这一点在潘承洞、潘承彪先生的《初等数论》一书中交代得最清楚.本书对这一问题的证明力求详尽易懂,因此虽然篇幅长了一些,但是相信读者看起来会感到思路顺畅.

(4) 无理数小数部分的分布性质是无理数和有理数的一大本质差别,本书对此介绍得比较详细,并介绍了华东师范大学王金龙先生近年来获得的最新成果.

(5) 混沌理论是近年来的热门话题,本书用初等的方法证明了逻辑斯梯映射周期三窗口的出现参数和稳定的周期三轨道的消失参数.

(6) 关于多项式理论的应用,本书收集并重新证明了关于多项式系统的胡尔维茨判据和霍普夫(Hopf)分支的代数判据.这些材料在一般的书中已不多见.

(7) 作者在本书还给出了关于四次函数的根的完全判据和正定性条件,这些结果是有一定实用意义的可操作的判据,需要时应用这些结果还是比较方便的.

(8) 在整数的函数这一部分共分 3 节,即整数的函数(I),整数的函数(II)和整数的函数(III),介绍了

欧拉求和公式、伯努利数和戴德金和等概念,并证明了它们的相关性质,在整数的函数(II)中介绍了 Möbius (莫比乌斯)变换和反变换,Dirichlet(迪利克雷)卷积及其应用等内容,这些材料一般都分散在各种文献中,本书将它们收集在一起,对读者阅读本书和今后查找都是比较方便的.在这一部分,还给出了一个数论中经常使用的不等式 $d_n < 3^n$ 的初等证明,其中 d_n 表示前 n 个自然数的最小公倍数.

本书在写法上尽量追求易懂性,为此,甚至不惜多费篇幅.这是因为当年作者在看某些书时,曾经因为有些地方被“卡住”而深感苦恼,所以作者特别能理解那种因各种原因而找不到人问以致心中的疑问长期不能获得解答的苦恼.为了避免本书再给读者造成这种苦恼,本书在讲解和证明时特别注意了这个问题,宁可显得啰唆,也不愿语焉不详.本书部分章节后配有习题,从这个意义上来说,本书比较适合自学.

由于在讲解上不惜笔墨和追求材料的封闭性,所以目前本书的篇幅已不少.为了不再增加篇幅,有些材料就坚决舍去.例如,本书完全不包含有关素数以及素数分布方面的结果.关于特征和把一个整数表为平方和的方法的数目也都舍去了.在作者看来,这些材料太过专业,并不适合初学者阅读.当然有些作者认为从本书的体系看应该包含的材料也因为篇幅的原因不得不割爱了.例如,本书专有一章说明有理数性质和无理数性质之间的差别,而这种差别也可以从遍历论的观点得到反映,而不变测度等内容由于和连分数有关,因此适当介绍一些遍历论方面的基础知识似乎也是顺理成章的;然而,最终出于篇幅方面的考虑,作者还是不得

不舍去了这方面的材料. 这样一来, 可以说, 本书只包含了有关学科的最初等的材料, 就数论方面来说, 可以说是真正的初等数论了.

虽然本书舍去了不少材料, 但是只要讲到的问题都争取讲透, 因此, 每一个问题几乎都会讲到最后完全解决, 而不会使读者有虎头蛇尾的感觉. 如果由于内容所限实在不能再讲下去, 文中会特别声明.

本书包含了大量的习题, 作者选取习题的用意是认为这些结果都是有一定趣味的和值得注意的, 因此即使不知道答案也至少应该知道这些结果.

本书没有给出习题解答. 一方面是为了使读者永远有一种未知感以保持积极的思考, 另一方面也在于本书的很多习题都取自书末的参考资料, 特别是潘承洞、潘承彪先生的《初等数论》, 杜德利的《基础数论》和北京大学数学力学系几何与代数教研室代数小组编写的《高等代数讲义》等书, 而这些书中都有答案, 当然有些习题是取自近期的《美国数学月刊》和作者的笔记, 因而在其他参考文献中并没有现成的答案.

大部分习题的解答方法和所需的数学知识都与它所在的章节有关. 然而, 请读者不要受这一点说明的约束. 这只是作者当初安排习题的动机之一, 但是等全书写完之后, 作者发现, 有一些题目完全可以用另外的方法解出. 所以, 如果读者发现, 有些解题的方法似乎与这一题目所在的章节无关, 请不要奇怪. 这反而说明这位读者的思维是很灵活的.

至于最终是否会出一本该书的习题解答, 还要看读者的反映.

最后, 作者特别借此机会对教导过我的已过世的

颜同照先生、闵嗣鹤教授、方企勤教授表示怀念,对孙增彪先生、叶予同先生、周民强教授、钱敏教授和朱照宣教授表示感谢,因为他们各位在做人、做事和做学问等方面给予我的教诲,都使我终身受益.

作者对同事朱尧辰教授和同学王国义先生在讨论各种数学问题时给予的帮助表示感谢.

最后作者对妻张清真在生活方面的照顾,女冯南南在写作及计算机方面的帮助,弟冯方回在计算机方面的帮助,以及他们对作者写作的理解和支持表示感谢.没有这些帮助,作者的写作将增加许多额外的困难,也不会有愉快的写作心境.

作者不是数论方面的专家,只是一个感兴趣者,因此殷切期望读者将本书的缺陷和不足之处反映给作者.有任何意见和建议请发电子邮件至 fby@amss.ac.cn.

冯贝叶

◎
目
录

第 1 章 数是什么以及它是如何产生的? //1

第 2 章 集合和对应 //20

- 2.1 集合及其运算 //20
- 2.2 有限集合的势 //26
- 2.3 无限集合的势 //45
- 2.4 不可数的集合 //58
- 2.5 无限集的势的比较 //61

第 3 章 整数的性质 //74

- 3.1 整数的顺序 //74
- 3.2 整数的整除性 //77
- 3.3 最大公因数和最小公倍数 //83
- 3.4 素数和算数基本定理 //99
- 3.5 方程式的整数解 //106
- 3.6 同余式 //134
- 3.7 欧拉定理和费马小定理 //160
- 3.8 整数的函数(I) //175
- 3.9 整数的函数(II) //231
- 3.10 同余式的方程 //243
- 3.11 二次同余式 //288
- 3.12 原根和指数 //312

第4章 有理数的性质 // 351

- 4.1 用小数表示有理数 // 351
- 4.2 有理数的10进小数表示的特性 // 362
- 4.3 循环小数的一个应用 // 371
- 4.4 实数和极限 // 376
- 4.5 开集和闭集 // 389
- 4.6 隔离性和稠密性 // 415

第5章 无理数 // 431

- 5.1 无理数引起的震动和挑战 // 431
- 5.2 一些初等函数值的无理性 // 436
- 5.3 对称多项式 // 443
- 5.4 代数数和超越数 // 456

第6章 连分数 // 464

- 6.1 什么是连分数 // 464
- 6.2 用连分数表示数 // 472
- 6.3 二次无理数和循环连分数 // 482
- 6.4 连分数的应用 I: 集合论中的一个定理 // 499
- 6.5 连分数的应用 II: 不定方程 $ax \pm by = c$ 的特解 // 501
- 6.6 连分数的应用 III: Pell 方程 // 502
- 6.7 连分数的应用 IV: 把整数表为平方和 // 523

第7章 用有理数逼近实数 // 538

第8章 实数的光谱: 小数部分的性质 // 577

- 8.1 小数部分的分布 // 579
- 8.2 殊途同归——有理数和无理数小数部分的一个共同性质 // 600

参考文献 // 621

冯贝叶发表论文专著一览 // 630