

中小学特级教师专著  
首都师范大学基础教育研究丛书

SHUXUE JIAOXUE DE LUOJI  
JIYU SHUXUE BENZHI DE FENXI

数学教学的逻辑  
——基于数学本质的分析

张鹤著



首都师范大学出版社  
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

本套丛书得到北京市教委

“北京市中小学特级教师研修工作室”项目资助

SHUXUE JIAOXUE DE LUOJI

JIYU SHUXUE BENZHI DE FENXI

# 数学教学的逻辑

## ——基于数学本质的分析

张鹤著



首都师范大学出版社  
CAPITAL NORMAL UNIVERSITY PRESS

## 图书在版编目 (CIP) 数据

数学教学的逻辑：基于数学本质的分析 / 张鹤著. —北京：  
首都师范大学出版社，2016.10（2017.12 重印）

ISBN 978-7-5656-3180-1

I. ①数… II. ①张… III. ①中学数学课—教学研究  
IV. ①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2016) 第 219599 号

SHUXUE JIAOXUE DE LUOJI

### 数学教学的逻辑

——基于数学本质的分析

张鹤 著

---

责任编辑 来晓宇

首都师范大学出版社出版发行

地 址 北京西三环北路 105 号

邮 编 100048

电 话 68418523 (总编室) 68982468 (发行部)

网 址 [www.cnupn.com.cn](http://www.cnupn.com.cn)

印 刷 北京九州迅驰传媒文化有限公司

经 销 全国新华书店

版 次 2016 年 10 月第 1 版

印 次 2017 年 12 月第 4 次印刷

开 本 710mm×1000mm 1/16

印 张 12.5

字 数 235 千

定 价 28.00 元

---

版权所有 违者必究

如有质量问题 请与出版社联系退换

## 丛书编委会

主 编	孟繁华	张景斌			
编 委	张景斌	郑开义	张彬福	刘晓玫	
	续佩君	林培英	叶小兵	孙素英	
	苏尚峰	李延林	王尚志	杨朝晖	
	卢慕稚	杨 光	黄鸣春	李兵红	

## 序

习近平同志在2014年我国第三十个教师节前夕同北京师范大学师生代表座谈时谈道：“一个人遇到好老师是人生的幸运，一个学校拥有好老师是学校的光荣，一个民族源源不断涌现出一批又一批好老师则是民族的希望。”

“国家大计，教育为本；教育大计，教师为本”已成为尽人皆知的道理。因此，教师队伍建设始终是各级政府都十分重视的一项工作。北京市为适应基础教育改革与发展的需要，落实国家和北京市中长期教育发展规划纲要，在“十二五”期间实施了“首都名师、名校校长、教育家培养工程”和“农村教师素质提升计划”，加大对农村教师、中青年骨干教师、特级教师、市级学科教学带头人和基础教育名师名校校长及教育名家培养的力，全面提升教师专业发展水平，促进首都教育质量的全面提升。

特级教师作为基础教育教师队伍中具有特殊作用与地位的群体，其专业发展受到广泛关注。特级教师如何在现有基础上取得专业发展上的突破以带领更多的教师进步、成长，成为困扰许多人包括特级教师自身的问题。分析特级教师这个群体的一些特征：他们在教学实践中积累了丰富的学科教学经验；习惯于对学科课程问题和怎么教进行思考；在学科教学方面形成了一定的影响力；寻求在学科教学方面的进一步发展，但取得新的突破很难。我们不否认一部分特级教师中的佼佼者已经突破了发展的瓶颈，但多数特级教师缺乏对自身经验进行解释的意识和能力。可以说对特级教师而言，新的突破就在于对已有经验的超越！针对于此，2013年首都师范大学受北京市教委的委托，承担了“北京市中小学特级教师研修工作室”项目。该项目将“通过学习研修，使进站研修的特级教师深入理解学校教育及学科教学的本质，总结和提炼自身的教育思想与教学风格，形成理论自觉意识，获得作为特级教师的可持续发展能力，为成为北京市名师和教育名家奠定基础”作为项目的培养目标，将“提升理论自觉意识与理论素养，凝练教育教学思想”和“提升教育研究能力，坚实发展基础”作为培养特级教师的工作重点。

特级教师可以从事的研究领域是宽广的，可以研究的问题也是多样

的。其中有一项研究是我们特别关注的，那就是特级教师指向自我的研究。“自己”是研究对象，也是研究者，还是一定意义上的研究工具。伴随着这样的研究，他们需要学习，需要“充电”，需要反思，需要“再成长”。在这一过程中，他们更多地思考了“是什么”与“为什么”的问题，更多地揭示了“自我经验”形成的“道理”，更清晰了对教育、教师、学生和自我的认识，从而也更清楚了自己的教育思想和教学风格。

这套丛书收录了部分特级教师指向自我的研究成果，希望丛书内容不断丰富、作者的队伍不断壮大。也衷心希望本套丛书的出版，能为中小学教师相互学习与交流搭建一个平台，以促进中小学教师的专业发展；能为读者深入理解优秀教师的成长、理解教育教学实践提供“食粮”。

张景斌

2016年2月2日

# 目 录

回归本质的数学教学 / 1

第一章 数学教学中知识逻辑的分析 / 10

1. 中学数学的知识逻辑分析 / 13
2. 义务教育阶段七~九年级部分章节的知识逻辑分析 / 27
3. 普通高中阶段部分章节的知识逻辑分析 / 45

第二章 数学教学中思维逻辑的分析 / 66

1. 数学概念是确立思维逻辑的依据 / 68
2. 以学科思想作为思维逻辑的主线 / 81
3. 数学素养是确立思维逻辑的目标 / 96

第三章 教学逻辑分析 / 108

1. 教学逻辑的味道与魅力 / 110
2. 理解问题与解决问题的教学逻辑 / 119
3. 研究方法的教学逻辑 / 132

第四章 让课堂教学赋有逻辑 / 153

1. 有效开展教研工作的实践与思考 / 153
2. 教学逻辑的专题研究 / 161
3. 课例分析 / 170

后 记 / 191

## 回归本质的数学教学

作为一名教师，我们都思考过类似的问题：什么样的课才是一节好课？要教给学生什么样的数学？学生学习数学的意义是什么呢？我是1986年走上教学工作岗位的。作为新教师的我，当时最大的顾虑是：面对既抽象又枯燥的数学，如何才能让学生爱听呢？性格内向的我能不能在讲台上站住脚呢？那个时候我对教学的理解还停留在“学生爱听的课就是好课”的认识上。我白天除了上课、听课，就是去学校的图书馆看各种各样的教学参考资料，晚上就在学校的宿舍里备课、写教案，在课堂教学的组织形式上我也下了很大的功夫。但是，在听课的过程中，我发现身边的那些有经验的教师们的课并不是我想象的那么“精彩”、“热闹”，甚至可以说他们的课很“平淡”、很“安静”，但为什么学生那么爱听呢？

我举在数学教学上造诣颇深的几位教师的例子，正是从他们的课上我找到了答案。

首先我要说的是常相舜老师。在我头一次教高一的那个学年，我坚持听了常老师的每一节课。他的课把知识的来龙去脉讲得一清二楚，娓娓道来、平易近人，这一点使我深深地折服，也成为我在今后的二十多年教学实践中不断追求的上课的一种境界。我们今天常说“教学上要讲知识形成的过程”，其实二十多年前的常老师的数学课已经是这样做了。

还有一位就是当时的四中数学组教研组长史连生老师。课堂上的45分钟，史老师从来都是掌握得恰到好处，一开口就能把学生的注意力牢牢地吸引住，学生的听课状态马上被调整到了最佳。由于讲课内容早已烂熟于胸，所以史老师上课很少用到教科书，那本翻得卷了边的课本随手揣在兜里，上课时掏出来放在讲台上却从不打开，充满自信的神态，不能不让学生们相信面对他们的老师是最好的，跟着这样的老师，一定能够学到最深刻、最透彻的数学。

这些80年代末90年代初的教师们对中国传统的数学教育的深刻理解和教学上所体现出来的深厚教学功底，使我对数学教学的认识和理解有了根本的转变。我在课堂教学中不再去追求形式层面上的“精彩”、“热闹”，转而更注重教学的内涵与价值。也就是从那时起，在课堂的教学实践中，我开始关注如何让学生能够在我的课堂上感受到数学思维活动的乐趣，让课堂教学赋有



逻辑。

二十多年一线教学的实践，让我越来越喜欢上课，喜欢在课堂上和学生进行思维的交流。我的体会是，课堂教学的意义不在于教给学生一些结论性的知识去考试，而在于这些结论得出的过程。课堂教学是以提高学生的思维能力为主要目的的，忽视思维过程的课堂教学是没有价值的。数学课可能是学生中学阶段花费精力最多的学科之一，也可能是学生在学习受到挫折最多的一门学科。如何帮助学生理解数学、学会数学的思维方法、感受数学的逻辑的魅力，喜欢学习数学呢？很多时候我们总是埋怨学生不好好学习数学，我们是不是反思过自己是否将数学课真正上得很好呢？我们曾经怪罪过学生不爱学习数学，但有没有想过为什么数学课没有引起学生的兴趣？我们常教导学生要掌握科学的学习方法，但是否自问过我们教给学生的方法是否符合数学的逻辑？作为数学教师的我们，要勇于面对数学教育中的问题，要敢于担当我们在数学教育中的责任。

## 1. 数学教育的本质是什么？

我在教学中，追求的是课堂上高质量的数学思维活动。我相信，在一个比较宽松的、思维交流比较充分的教学氛围下，能够让我的学生更加喜欢数学，特别是能够自觉地学习数学。我不欣赏那种给学生布置大量作业的做法，靠加重学生的学习负担提高成绩哪怕暂时是有效的，我也不会屈从。

记得在一线教学的日子里，有那么一段时间，我对自己的教学工作突然产生了一种无奈的情绪，甚至对自己的教学能力产生了怀疑，自己一直坚守的数学教学理念发生了动摇。在某个学年高二的下半学期，我教的一个学生因为户口的问题要回到老家去参加高考，临行前主动约我谈话。这是一个普普通通的女孩，她给我印象最深的是告诉我，她听了我一年的数学课，感觉我都是在教给她一种思考、研究数学问题的方法。也许这个女学生并没有意识到，她分享的这个学习数学的感悟不仅给当时的我以极大的鼓舞，而且坚定了我的教学理念和信心。

实际上很多时候，作为教师的我们正是从学生的成长中才能真正地理解我们所从事的教育工作的价值。一句发自内心的问候，一张学生毕业后寄来的明信片，哪怕就是简单的几句话，也能让我们对数学教育的思考增加几分厚重。

2004年的暑期，我接到了一封2003年高考后因为成绩不理想又在郊区的一所学校复读一年的一位女学生的明信片，这位学生写道：

我已经是北京大学外国语学院东语系波斯语专业的学生了，现在我急于把这个好消息和您一同分享，感谢三年来您的谆谆教诲。也许您还不知道您的帮助对我来说是多么大的鼓励。初三时我曾一度有很坏的数学成绩，当时

我们的数学老师，也认为我没有多大的希望，以至于上了高中我对数学也缺少信心。但是自从我荣幸地成为您的学生，每日沉浸在您创造出的自由、开放的课堂氛围中，我也忍不住想要展示自己，于是数学课成了我每天最快乐的时光。在那里我可以学到丰富的知识，获得开阔的思路，更重要的是我找回了信心，这样的信心使我相信对其他理科我也可以学得很好。真的太感谢您了！不知道现在是谁有我当日的幸福可以成为您的学生，但我相信这一定会成为他们高中最美好的、最快乐的回忆。

作为数学教育的工作者，我们要清醒地认识到数学教育的本质。数学知识本身非常重要，但数学知识所承载的思维方法更重要，研究数学问题所需要的科学精神更有价值。数学教育一定要引导学生领悟数学教育的本质，而要如此，唯有思维。让学生真正从内心喜欢思考、学会思考，让学生的思维具有逻辑性才是我们数学教师的价值所在，才是数学教育的本质！

## 2. 数学教育的追求是什么？

我在一线做数学教师的时候，对数学教育教学的追求非常简单，就是要上好每一节课，让我的学生能够喜欢学习数学。那个时候，我每天晚上都要花上一到两个小时的时间认真备课，工工整整地写出第二天的教案。尽管上课的时候，这份教案我并不怎么看，但它摆在讲台上，就代表了我对工作的那份责任心，表明我对这节课想明白了。

多年的教学实践让我深深懂得：要上好一节课，需要下很大的功夫，需要教师长期的教学实践和教学研究的积累，要对所教学科的每一门课程的思维特点、整体的知识脉络及结构有自己的思考和理解。作为教师既要能以学生的角度去认识、理解所教授的知识，感受学生可能遇到的问题，又要能站在比较高的角度认识、理解教材，挖掘出教学内容真正的教育意义。教学中，要和学生分享的是：你是怎样学习的，你是怎样提出问题、思考问题、解决问题的，也就是你是怎样做学问的。当把数学教学放到一个学术的高度去看待的时候，我们教给学生的数学就能够更接近其本质，学生才能从你的数学教育中受益。

我们所要追求的数学教育的乐趣是什么呢？我认为：数学教育的乐趣在于能够带给学生思维的挑战，数学教育的魅力在于它的思维的创造性。数学是思维的科学，数学教学就是要让学生在数学问题的解决过程中培养自己的数学思维能力，磨炼自己的思维品质。作为教师的教学工作，其乐趣也就在此。只有让自己的学生学会了思考问题，会运用逻辑关系对事物做出独立的判断，在数学的学习过程中领悟到了数学的本质、学生才能够从数学的学习中感受到思维的快乐，作为教师的我们也才能够真正享受作为数学教师的幸福。

2008年9月，我从工作了22年的教学一线来到北京市海淀区教师进修学校，成为了一名专职教研员。不断走向深入的教育教学实践和研究让我分享到了教育改革带给数学教育的生机和活力；让我对数学教育的意义和价值的理解和思考更加深入；也使我对研究数学知识的本质、探索课堂教学规律，让更多的数学教师分享到数学教育的智慧充满信心。

同事和老师们常常评价我是“喜欢分享的人”。其实，我把分享当成是一种很自然的事，它已经变成我的一种自觉，一种习惯，一种需要了。

2009年9月，我在海淀教研网开通了教研博客。截至2016年9月，我在教研博客中发表了203篇文章，阅读总数26万余次。在博客的公告中，我是这样写的：“在这里我愿和老师们分享数学教学的感受，体会数学教学的乐趣，领略数学逻辑的魅力！”一位《北京教育》的记者在问我为什么要写教研博客这个问题的时候，我是这样回答的：“我喜欢思维的碰撞，喜欢把自己想清楚的问题分享出来，为因其困惑的人打开一扇窗。”一位语文教师在评价我的博文时写道：“经常拜读张鹤老师的博客，博客内容紧紧围绕着数学课堂教学这一主线，小到某个教学环节或知识点的思维路径，大到如何树立学生的数学观。点点滴滴无不渗透着教师的教育理想、态度、价值观，不仅仅是在为数学学科寻根，更为重要的是在身体力行为同行教师教育教学的思想解惑。”

在这203篇博文中，我和教师们分享我对数学教育的思考，分享我对课堂教学的观察和感悟，分享我对数学知识的理解和教学的体会。在我写作博客的过程中，我也从教师们的回复中分享到教育的智慧，分享到数学教学的乐趣。这种分享也督促自己不断地关注课堂教学，思考数学教学问题。

2011年的国庆节期间，我曾经写下题为《从茶艺想到教学艺术》的博文：

有一位研究茶艺的女作家，写了这样一段文字，让我有一些感触。她写道：茶艺是茶文化一层美丽的外衣……真正的茶艺应该不拘泥形迹。它更多的，是一种内在的自由与随和。喝什么茶并不重要，关键的是喝得舒心、喝得畅快……我至今也无法记住武夷岩茶冲泡的十八个工序是什么。因为这十八个工序对我来说，只是生产一杯标准武夷岩茶的流水线而已。什么事情一旦上升到流水线的程度，就消失了人情，淡漠了人心……在这一点上，我更希望每一泡茶都是手工制作，这种手工制作是真正的“手工制作”，而不是被程序化了的手工。真正的茶艺就是那个更符合人心的手工制作的过程。也许是每天早上工作开始前冲泡一杯茉莉，也许是寒冬的夜晚，家人在你案头摆放的一盏清茗，或者干脆就是草原上和着凛冽奶香的奶茶……这些用最简单的方式来到我们面前的茶，背后都有一种温暖而让人愉悦的茶艺。

细细品味这段文字，茶艺的精髓又何尝不是教学艺术的追求呢？在每个优秀、成熟的数学教师的教学生涯中，一般都经历过从照本宣科、亦步亦趋到教无定法、游刃有余的过程。这个过程中最重要的是教师自己对教学意义

的不断思考与摸索。就像最优秀的学生不是老师能教出来的一样，最好的教师也绝对不是能够由谁带出来的，更不可能是由某一套固定的模式培养出来的。

数学的教学活动由于参与的是人，是教师与学生之间的思维的活动，因而是一个最有活力的思维过程，这个过程如果被模式化、被各种各样的条文所限定、所约束(如教师上课只能讲15分钟之类的)，那么它将失去思维活动的魅力！失去了教学活动要关注学生思维的意义！就像生产一杯标准武夷岩茶的十八道工序那样，在模式化的教学方式下也许能够产生一节符合这样或那样“理念”的课堂，但想通过这样的课堂诞生出一位优秀的数学教师，通过这样的课堂培养出具有良好思维品质的学生，就只能是一种奢望了。

从女作家对茶艺的感悟来反观我们的教学活动，课堂教学何尝不是一门艺术？教师的教学工作绝对不能是刻板的、僵化的。真正的教学是要教给学生最自然的、最真实的数学，要让学生能够学会用数学的思维思考问题的方法，让学生感受思维的乐趣；作为教师要对自己的工作充满敬畏，在课堂上要能够始终把学生放在你的心上，全身心地投入到和学生思维的沟通之中，让师生的思维融为一体。

在这里谈教学的艺术也许我还没有资格，但是，我们每个老师的内心深处，又有哪一个不是在自己的教学实践中苦苦追求着课堂教学的最高境界呢？就像一杯能够沁人心脾的好茶，需要用心去泡；一节能够带给学生思维乐趣的数学课，需要作为教师的我们用心去创造。

通过这篇博文，我表达出对课堂教学中忽视对教学本质的研究而热衷形式化的教学“改革”这种现象的担忧，也抒发了我对数学教学本质的理解和对教学艺术的向往与追求。教育现实的现实中确实存在这样的现象：在功利化、浮躁化的“改革”风气中，对学科知识本质的思考与研究被淡化，教学方式的形式化愈演愈烈，在这样的状态下谈教学艺术真的是一种奢望了。

### 3. 关于教学逻辑的思考

2013年的夏天，我有幸参加了北京市委委托首都师范大学首都基础教育发展研究院承办的为期三年的“北京市中小学特级教师研修工作室”项目。这次研修带给我的收获既是全面的也是深刻的，三年学习的收获积淀转化为我继续前进的动力，让我越来越坚定不做课堂教学改革的旁观者、抱怨者，而是要做追求课堂教学本质的研究者，要能够尽自己最大的努力影响周围的教师们，带领他们积极投入到课堂教学研究中去，探寻课堂教学的规律，把握所教授知识的本质。

在这次培训过程中，我有机会聆听东北师范大学数学系高夯教授讲中学数学。他在上课前的一次闲谈中，讲了一件他二十多年前的往事。在一次学

术活动中，他向北京师范大学数学系的严士健教授请教如何才能成为一名优秀的中学数学教师，严教授只回答了两句话：“一是要真会，二是要有教的意思。”高奋教授说，二十多年过去了，他就记住了严先生的这两句话。高教授转述的严士健先生的一席话，的确值得作为数学教师的我们去深思。

什么叫作真会？会不难，难的是“真”！“真”体现出来的是作为数学教师能够在自己的课堂教学实践中，真正把握数学学科的本质。如要做到这一点，就不是仅仅把课上好那么简单了。他要具备研究数学教学意识和能力；要能够站在学科的制高点上来看待所教授的数学知识；他对数学教学的价值及意义的理解有着准确的阐述。

“真”会的数学教师不会在课堂教学中炫耀解题的技巧，也不会教给学生非数学的知识或结论。也许他的课会平淡、不热闹，但是如果你能静下心来细细地品味“真”会的教师所上的课，一定能够品出其独特的味道！即使是在“分数至上”的浮躁氛围下，“真”会的数学教师也能够从容、淡定！因为他坚信自己把握住了数学学科的本质，他教的数学是“真”的数学，是能够让学生受益终身的数学！

怎样成为“真”会的教师，成为有“教的意思”的教师呢？在这次培训项目中担任我导师的首都师范大学首都基础教育发展研究院常务副院长张景斌教授在一次《如何做教育研究》的报告中谈到“研究的本质是科学的态度和精神”。这句话唤起我内心深处的对数学教学本质认识的探寻和理性思考，让我从对课堂上所看到的违背教学规律、缺乏教学逻辑的数学教学几乎快要麻木的状态中警醒过来。观察课堂，思考教学中的问题，提出自己的教学观点成为我在教学研究中一个主要的内容。

关于数学教学逻辑这个课题的研究与思考，也正是源于我所观察到的课堂上一些早已习以为常的现象。如在我听课的过程中常常能看到这样的一种教学的状态：教师为了引入课题，向学生提出的一些问题非常不自然，让学生摸不着头脑。但学生似乎已经习惯了老师这样直愣愣的问题，为了配合老师的教学，也努力地思考着并给出他们的解释或回答；还有一种教学现象也是常常能看到的，就是学生们在老师的指令下做一些操作性的学习活动（也常常美言为探究活动），但是为什么这样做，学生们似乎也不是很关心，只要按照老师的要求去做就是了，并且能够在很短的时间内完成；每当在出现的过程中出现一些思维难点的时候，本来正是需要学生们静静思考的时候，教师却耐不住这份寂寞，容不得静悄悄的课堂，总要“鼓动”学生们进行小组交流，展开合作学习。这种喧闹下的学习也总是能够产生奇效，对再难的问题在合作学习下也无坚不摧。如果按照时下流行的教学理念去对照课堂中出现的这些现象，似乎都能够看到教育教学改革的“成效”：在问题解决中培养学生的思维能力；在探究学习中培养学生解决问题的能力；在小组合作学习中培养

学生合作精神和自主学习能力。

实事求是地评价教学中出现的这些现象，不能不说这样的课堂总是让人感到缺少一点东西，失去了一些味道，看不到能够贯穿课堂教学始终的一条主线。即使是这样上课的教师自己来评价也是不满意的居多，但是又说不出问题产生在哪里。一些教师对课堂教学工作产生职业倦怠，主要的原因也是在课堂上享受不到教学活动的乐趣了。

我认为上述教学现象产生的最根本的原因在于教学逻辑的缺失。教学逻辑是课堂教学的灵魂。一个让授课教师能够享受到工作乐趣的课堂、让听课的学生们能够体会到学习的快乐并能够从中感悟到学习意义的课堂，一定是把握住了课堂教学规律的课堂。这样的教师一定是认识到了教学的价值和意义，能够引导学生通过知识的学习，去感受、体验它所承载的本质的东西，在这样的课堂中总是充满着教学逻辑。

什么叫作教学逻辑呢？对“逻辑”的解释很多，本书中采用的逻辑含义是指人的思维及其规律。数学教学与逻辑密切相关，在数学教学中并存着教师的教授知识的过程，知识的发生发展过程以及学生的思维过程，这些过程实际上都是教学中客观存在的逻辑过程。本书中所谈的教学逻辑是指教学过程中教师与学生之间“教”与“学”活动的思维及其规律。

对教师而言，对教学本质的不同理解、对数学教育价值认识的深刻与否，将直接影响到教师的教的逻辑。因此，教学活动中教学逻辑所面临的最大问题是对教学本质的溯源和对数学教育价值的追求，而这又涉及教师的数学观是怎样的问题。可以说，一名教师的数学观在某种程度上决定其教学逻辑。

所谓数学观，就是对数学的基本看法。静态数学观认为数学是形式的、精确的、逻辑的科学，是概念、定理、法则、公式的集合。持静态数学观的教师常常认为“数学就是解题；数学就是解题技巧的掌握和应用；数学就是知道一大套法则公式，去解题；数学是思考和解决问题的方法和过程……”而动态数学观理解的数学是在解决数学内部与外部问题的过程中产生与发展的，是可以发明的、可误的，数学与其他学科以及社会和生活有着广泛的联系。动态数学观下，人们常常认为“数学是思考和解决问题的方法和过程……”

理解作为科学的数学的真实面目；理解数学的发展是依靠猜想、证明、批判、反驳，不断地改进结论和推理的过程；理解数学及其思维，在其内部发展的过程中需要猜想、证明、批判、反驳等机制；理解数学不是一开始就是正确、精确、严谨的，在尝试、探究、前进的过程中，充满了错误、曲折、回旋。如此，有助于我们数学教师建立合理的数学观，进而建立先进的数学教育观，更好地依教学逻辑实践我们的数学教学。

作为教育的数学首先要继承作为科学的数学所蕴含的理性精神。数学学习也应看作一个过程，而不只是一个结果。数学学习、数学思维，就是一个

反复尝试、探究的过程，不断修正、改进、完善的过程。教学仅展示正确的过程是不够的，也应暴露其中的曲折。当然，数学的教育形态和科学形态是有区别的。数学的科学性体现在得到的命题必须使用演绎方法在系统内证明，但是作为教育的数学，其严格性是相对的，特别是应根据学生的水平和能力来决定。在数学的教学中，因为难度有些命题作为公理不要求证明，但是要让学生知道这是需要证明的，证明是有的。

对学生而言，学习逻辑确立的意义在于对学习意义的准确认识和对知识本质探索过程中所应具有理性精神。确立学习逻辑的关键在于教师，其数学观将直接影响学生的数学观。因此，从这个意义上说，数学教育的目的就是让学生们的思维具有数学的逻辑，要让学生越来越聪明；数学教师所采用的教学方法是为学生理解数学内容、研究数学问题服务的；数学教学的本质在课堂上是不会被掩盖于表面化的教学形式、意义不当的训练和枝节性的步骤之中的。

教学逻辑的实施需要教师具有理性的精神。数学教师要能够真正理解数学思维是理性思维的实质，在教学过程中引导学生去感受数学是能够用数量关系来刻画的，而且这种数量关系可以深刻到定性；数学教师在教学研究中要认识到数学的严谨性不仅仅是数学的结论是一步步推导出来的，对于直观的结果也是能够深刻到符号化水平的；同时我们还要把握好度，要知道我们所进行的数学是教育的，与科学的数学有区别，过分的理性是不恰当的。

从教学逻辑的角度看我们的数学教学过程，就不能是机械的、操作性的活动，而应是认识数学知识本质的思维活动过程。在这个过程中并存着教师教的过程，数学知识发生、发展的过程以及学生的思维过程。为了让学生能够通过数学知识这一载体提高逻辑思维能力，增强理性精神，教师对知识教学的态度起着非常重要的作用。如果教师认为知识的学习是为了让学生尽快地掌握结论型的知识，并通过熟练运用知识取得好的成绩的话，在教学中忽视思维过程、强化数学结论就成为必然。在一些课堂教学中，教师甚至把大量的时间、精力放在数学结论在解题中的应用、题型分类及解法，以及如何有效记忆上。这种非理性的、缺乏逻辑的教学行为背离了我们进行数学教学的根本，忽视了学生学习数学的真正目的。

美国著名数学家、数学教育家 M. 克莱因在《西方文化中的数学》一书的第三章《数学精神的诞生》中写了这样的一段话，也许能够让我们警醒，他写道：“……希腊人坚持演绎推理是数学证明中唯一的方法，这却是最为重要的贡献。它使得数学从木匠的工具盒、农民的小棚和测量员的背包中解放出来，使得数学成了人们头脑中的一个思想体系。在这以后，人们开始靠理性，而不是凭感官去判断什么是正确的。正是依靠这种判断，理性才为西方文明开辟了道路。因此，希腊人以一种比其他方法更为高超的方法，清楚地揭示了

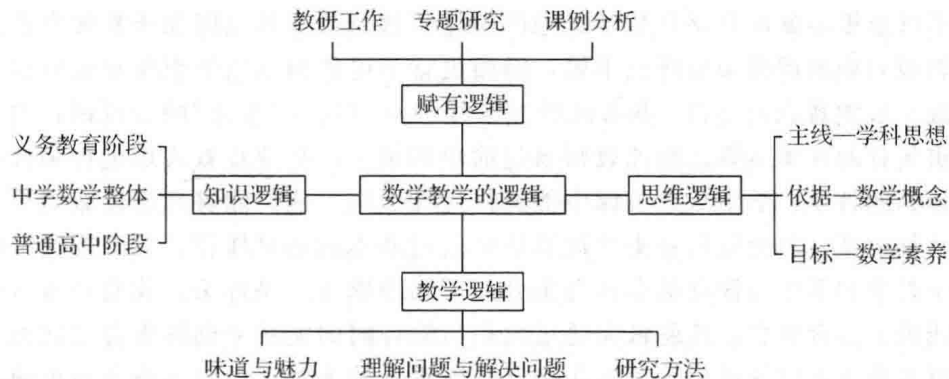
他们赋予了人的理性力量以至高无上的重要性。”<sup>①</sup>在本章的最后，M. 克莱因感慨道：“希腊人最大限度地决定着今天文明本质的贡献，则是他们的数学……他们改变了这门学科的性质，这是为人类奉献的最好的礼物。”<sup>②</sup>M. 克莱因这段话阐述的是数学的理性精神对人类文明的影响，实际上这种理性的精神在作为教育的数学中同样也是具有崇高地位的。

如何确立教学逻辑呢？首先，要用理性的精神对待数学教学，不仅要通过研究揭示出知识逻辑，还要能透过知识逻辑看清数学教育、教学的价值，让理性的精神在我们与学生共同的教学活动中发出耀眼的光辉，让数学教育真正成为促进学生全面发展的教育。在我们的教学实践中，要深刻认识到知识逻辑所承载的思维逻辑的价值。不要把理解问题、思考问题的过程看成是浪费时间，理解问题是思维活动最有效的形式，教学活动中大部分时间都是教师在引导学生理解各种各样的问题，这种理解问题的过程就是在运用理性的思维去试图解释问题，探寻解决问题的方法。我们要珍惜学生动脑想问题的情景，思考问题在任何时候都是有价值的。

其次，教学逻辑要倡导数学的理性精神，不仅是教师要坚持按知识逻辑的主线展示思维逻辑，也要让我们的学生有独立的思维习惯，不接受任何形式的结论。教师不要教“相信”，而是要教“质疑”、教“思考”！要让学生们具有思维逻辑，就要让学生学会用最基本的概念去理解问题和思考问题；要让教学逻辑呈现在我们的课堂，就要让教师和学生共同参与的课堂教学活动在知识逻辑的基础上赋有思维逻辑！

在这本书中，我将结合本人的数学教育教学实践及研究过程中积累的素材，就我所能，阐述我所理解的基于数学本质的知识逻辑、思维逻辑以及在此基础上的教学逻辑，并结合在近几年教研员工作中积累的教学案例对教学逻辑在课堂教学的实施做一阐述。

全书结构图如下：



① M. 克莱因著，张祖贵译：《西方文化中的数学》，上海：复旦大学出版社，2013年，第29页。

② M. 克莱因著，张祖贵译：《西方文化中的数学》，上海：复旦大学出版社，2013年，第38页。



## 第一章 数学教学中知识逻辑的分析

“知识逻辑回答教学‘教什么’的问题，它是教学系统中最实质性的要素。”<sup>①</sup>

数学教学逻辑首先是知识逻辑。数学教学的展开都是以知识为载体的，而知识是有逻辑关系的。但是知识逻辑是具有隐蔽性的，它无时无刻不在，可是如果不去研究就看不到它。这种隐蔽性源于教学过程中为了满足课堂教学的需要，相互联系具有逻辑关系的知识被分解成知识点或以章节为载体的知识块，原有的逻辑关系被人为地割裂开了。我们不可能一下子让学生掌握知识的所有联系或它们的逻辑关系，但是教师在教学的过程中，随着知识教学的逐步深入，必须要有机会和学生一道通过课堂教学活动把这些知识之间的逻辑关系梳理出来。也就是说，既要让学生对每个知识点或知识块有准确的理解，又要让学生明确不同的知识点或知识块在整个知识系统中的位置以及它们之间的逻辑关系。这种逻辑关系一方面体现在本节课的知识与其所处的学科知识中的地位和作用，另一方面体现在本节课的知识与本节课前所学知识的逻辑关系和本节课之后将要学习的知识之间的逻辑关系。作为教师在进行这节课的教学前，就要能够明确这些知识的逻辑关系，并依据对知识逻辑的理解和认识，进行教学的设计。

如果不研究知识逻辑，课堂教学陷入单纯的知识教学就不可避免，缺乏逻辑的教学也就“应运而生”了。我们常常能够看到缺乏知识逻辑的教学，其教学目标总是定位在让学生记住结论、会应用数学公式，并通过大量的练习让学生熟练掌握。缺乏知识逻辑的课堂教学常常表现为对数学知识本质的挖掘不够或根本就没有，对数学思维的阐述不够到位。其原因在于教师自己对所教授知识的逻辑关系研究不够，因而也就不可能揭示出知识所承载的数学思维、数学观点或思想。我曾经听过这样的一节高一“集合”的新授课，内容是讲集合的补集运算。授课教师通过简单的例子，平铺直叙式地进行集合补集运算的教学。学生从这节课中能够得到什么呢？他们能够知道什么叫集合的补集运算，并会运用补集的运算法则进行基本的运算操作，但经历这样的数学教学的学生却没有机会体会集合知识的逻辑主线是什么。我们知道这条主线源于集合概念，其逻辑为通过元素与集合间的关系来刻画集合之间的关系以及集合之间的运算。学生在缺乏知识逻辑的课堂教学中可能会熟练地进

<sup>①</sup> 朱德全，张家琼：《论教学逻辑》，《教育研究》，2007年第11期，第49页。