国家科学技术学术著作出版基金
NFAPST

现代数学基础丛书 173

简明李群

孟道骥　史毅茜　著

科学出版社

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

现代数学基础丛书 173

简 明 李 群

孟道骥 史毅茜 著

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

李群是建立在分析、几何、拓扑、代数等基础上的重要数学分支，因而透彻讲述李群理论的书都是大部头的书．由于李群理论在诸多学科如物理、化学等都有重要应用，因而许多学者又都要具备李群理论的一定基础．简明版本的李群适合许多读者．大多数简明版本的李群讲述的多是典型李群，而对例外李群讲得很少，甚至不讲．但随着研究的深入，例外李群的应用愈显重要．

本书共六章，包括：李代数与微分几何、李群、紧李群的结构、紧李群的有限维表示、例外李群的实现和Riemann对称空间．本书力求深入浅出、循序渐进、简洁明了，利于读者掌握李群的要义．

本书可作为高等院校数学、物理等专业本科生、研究生李群课程教材，也可供有关科技人员及大专院校师生自学参考．

图书在版编目（CIP）数据

简明李群/孟道骥，史毅茜著．—北京：科学出版社，2017. 12
(现代数学基础丛书；173)
ISBN 978-7-03-054507-7

Ⅰ. ①简… Ⅱ. ①孟… ②史… Ⅲ. ①李群-研究 Ⅳ. ①O152.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2017) 第 226431 号

责任编辑：李静科／责任校对：邹慧卿
责任印制：张 伟／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京中石油彩色印刷有限责任公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 12 月第 一 版 开本：720 × 1000 1/16
2017 年 12 月第一次印刷 印张：15 1/2
字数：293 000

定价：98.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

序

李群、李代数产生于 19 世纪末, 经过几十年的发展, 到 20 世纪六七十年代已发展成为一个重要的数学分支, 其与几何、代数和数学分析这三个基础分支都有紧密的联系. 李群的基础不仅是数学分析, 还有由数学分析发展起来的 (近代的或抽象的) 微分几何. 提到微分几何就不得不想起高斯 (K. F. Gauss, 1777~1855) 和黎曼 (G. F. B. Riemann, 1826~1866). 李群的另一个基础是 "群", 其实抽象代数也是从群发展起来的. "群" 的概念首先是伽罗瓦 (Galois, 1811~1832) 在研究用根式求解代数方程时引进的. 将代数方程的解进行置换所引起的群的结构特点与求解代数方程的问题有着本质的联系, 揭示了群论的深刻意义和重大作用. 但是记载伽罗瓦伟大贡献的部分论文在他逝世 14 年之后的 1846 年才出版. 1870 年, 若尔当 (C. Jordan, 1838~1922) 全面介绍了伽罗瓦的思想, 并在群论方面做了许多研究工作. 他在置换群方面的工作成果收集在 1870 年出版的《置换论》中. 他对传播伽罗瓦的思想, 推动抽象代数的建立有重要贡献. 伽罗瓦的思想影响不仅体现在代数上, 而且还体现在几何上, 突出的代表是克莱因 (C. F. Klein, 1849~1925). 1872 年, 他说: "几何学就是 '给出一个流形和这个流形的一个变换群, 建立关于这个群的不变性理论'(埃尔朗根纲领)." 虽然这个思想是不全面的, 但是在数学发展中仍起了很大作用. 伽罗瓦思想在数学分析上的影响就是李群的产生.

李 (Marius Sophus Lie, 1842~1899), 挪威数学家, 李群、李代数理论的创始人. 1859 年, 李进入克里斯蒂安尼亚 (今奥斯陆) 大学, 并于 1865 年毕业. 1869 年, 李到柏林学习, 与克莱因一起工作并结为好友. 1870 年他和克莱因一起到巴黎, 与法国数学家若尔当等相识, 并受到法国学派的影响. 1871 年, 李回到挪威, 次年获博士学位并在克里斯蒂安尼亚大学任教. 1886 年, 李到莱比锡继任克莱因的职务 (克莱因回到了哥廷根, 成了哥廷根学派的前期领袖). 1889 年, 李患精神分裂症. 1898 年李回到奥斯陆执教, 直至逝世. 李的主要著作《变换群理论》(三卷) 是由他的学生恩格尔协助整理并于 1893 年出版的.

李想把伽罗瓦的思想用来解微分方程, 特别在研究微分方程解的分类时引进了连续变换群的概念, 这个群的每个变换以参数来描述, 两个变换的乘积 "解析地" 依赖于参数, 后来称为**局部李群**. 在连续变换群的单位元附近取导数就得到无穷小变换, 这些无穷小变换构成的代数就是**李代数**. 李还解决了李群与李代数之间的关系, 即李的基本定理. 确切地说, 李最初所研究的是局部李变换群及李代数. 在相当长的一个时期内李的研究仅与一些微分方程或偏微分方程的积分问题有关, 而与

数学的其他分支关系不大.

李的工作在其生前一直未得到足够的重视. 直到 20 世纪初, 他的研究成果由于在物理学和几何学中有了很好的应用才得以发扬. 在这其中有两位人物起了关键作用.

外尔 (H. Weyl, 1885~1955) 研究了群、李群在物理学中的应用, 以及群和李群的表示理论. 随着放射现象的发现, 研究微观物理是 20 世纪物理学的重大转折与发展, 而微观物理的基础是量子力学. 最早的原子模型是所谓壳模型, 电子围绕原子核转动, 因而转动群 ($SO(3,\mathbf{R})$) 的表示就有了用武之地. 外尔在其名著《群论与量子力学》一书中第一次将李群表示论用于量子力学, 主要用转动群的线性表示. 现在理论物理学家广泛地应用李群、李代数理论. 反过来, 他们的工作又促进了群、李群表示理论的建立和发展. $SO(3,\mathbf{R})$ 是紧致的单李群, 其表示既是半单李群、李代数表示的基础, 也是犀利的工具, 有人称之为 "解牛尖刀".

嘉当 (É. Cartan, 1869~1951) 将李群用于几何学, 建立了黎曼对称空间理论.

随着李群在物理学、几何学上应用的巨大成功, 李群、李代数理论也成长起来了. 20 世纪的上半叶, 李群、李代数理论, 发展得最充分的是紧李群及其李代数、复与实半单李群及其李代数. 所谓最充分, 是指这些李群和李代数结构、分类、实现以及它们的有限维表示等都有非常优美的方法和结果. 李群、李代数成为数学中一个重要领域, 对数学、物理的影响与日俱增. 从 20 世纪后半叶开始, 除李群李代数理论本身有很大发展外, 还产生了下面的一些分支.

李群的拓扑 自外尔和嘉当奠基以来, 人们对李群和它的齐性空间的拓扑结构的研究十分活跃, 并产生了各种不同的方法和理论, 如同调代数、韦伊代数以及莫尔斯理论等.

非交换调和分析 外尔和嘉当关于紧李群的表示论的工作指出, 古典傅里叶分析和球调和函数应该与李群论的概念相联系, 由此产生了非交换调和分析.

李群的无限维表示 非交换调和分析与李群的无限维表示密切相关. 李群的无限维表示论可以从分析的观点研究, 也可以从代数的观点研究.

代数群 代数群和谢瓦莱群理论是从半单李群理论启发而发展起来的新分支. 代数群和谢瓦莱群是将代数簇与群结合起来, 因而所考虑的域由实数域和复数域扩展到一般的域. 博雷尔 (Berel, 1871~1956) 用代数几何的工具将紧半单李群的许多性质推广到更一般的情形即线性代数群上.

我国数学家段学复院士与法国著名数学家谢瓦莱 (Chevalley, 1909~1984) 建立了代数群的基本定理.

华东师范大学曹锡华教授生前翻译了许多有关李群、李代数的书, 对李群、李代数在中国的传播有重要作用. "文革" 后, 他在华东师范大学主持了代数群的研究, 并培养了许多人才.

李型单群 有限域上的谢瓦莱群是有限单群, 这类群就是李型单群. 20 世纪代数学的一个重要成果 (也可以说是数学的一个重要成果) 是完成了有限单群的分类: 素数阶的循环群; $n \geqslant 5, n \neq 6$ 的交错群 A_n; 李型单群以及 26 个散在单群.

无限维李代数 如 Kac-Moody 代数、Toroid 代数、Witt 代数、Virasoro 代数等无限维李代数的结构、表示理论都与理论物理、组合数学等学科密切相关.

万哲先院士在 20 世纪 80 年代举办的 Kac-Moody 代数讨论班对我国李代数特别是无限维李代数研究的发展及现代化起了重要作用, 培养了如苏育才、赵开明、张贺春等优秀人才.

模李代数 模李代数即特征非零的域上的李代数, 现在只对单李代数有重要的结果.

我国著名数学家沈光宇在极其艰苦的条件下, 坚持研究单模李代数、模李代数的表示等, 均取得国际瞩目的成果.

李超代数 李超代数是与李代数紧密联系的非李代数. 由于物理学中对超对称性研究的活跃, 与之密切相关的李超代数的研究也日趋活跃.

量子群 随着理论物理中规范场论的发展, 出现了 Yang-Baxter 方程. 研究此方程的解时, 如果将一个李代数 "变形" 所得的代数称为量子群, 这是数学和物理学者都很关心的问题, 是一个研究热点.

顶点算子代数 这是一种原本较为复杂的、综合了多种代数的代数体系, 现在日益成熟, 与几何、有限群等都有密切联系. 对此领域的研究充满了机会. 华裔数学家董崇英、黄一知、李海生等都是此领域的优秀人才.

当然还有许多分支, 不是本书作者能完全介绍的. 总而言之, 现在用 "李群李代数理论" 已不能概括这些丰富多彩的内容, 于是 "李理论" 一词应运而生.

20 世纪在西南联合大学举办了我国的第一个李群讨论班, 由陈省身、华罗庚和王竹溪主持, 参加者有王宪钟、严志达等. 王宪钟后到美国任教, 他在两点齐性空间、秩为 1 的 Riemann 对称空间的研究负有盛名.

严志达院士 (1917~1999) 在例外 (特殊) 单李群的 Betti 数方面的工作被誉为 "李群拓扑的里程碑". 他在研究一般对称空间时, 给出的实半单李代数的分类方法 (严志达图) 也享有盛誉. 他在微分几何、积分几何、齿轮啮合理论等方面都有突出成就. 除西南联合大学外, 他在南开大学开设的李群、李代数课是国内最早、持续时间最长的. 他著有《李群和微分几何》《半单纯李群李代数表示论》《实半单李代数》《李群及其李代数》(与许以超合作).

许以超教授解决了 Cartan 在 Hermite 对称空间中一个未曾解决的问题, 此研究是值得称赞的.

直到 20 世纪 80 年代, 我国在李理论的科研与教学都是薄弱的. 随着我国改革开放方针的实施, 国门打开, 陈省身先生等许多科学家从美国回到阔别多年的祖

国. 陈先生提出了要实现中国数学的“独立和平等”, 并提出了深思熟虑、切实可行的建议. 其中一个措施就是, 从 1984 年开始举办“全国数学研究生暑期教学中心”, 就是后来的“全国数学研究生暑期学校”, 开设的课程针对重要而国内又薄弱的领域. 李群是首届六门课程之一, 由著名教授项武义主讲. 李群被多次列入暑期学校的课程. 经过 20 多年的努力, 我国李群及李理论学科的发展已有长足进步.

随着李群理论与越来越多的领域的联系被发现, 需要了解李群的群体也越来越大, 他们不一定专门研究李群, 但要应用它. 科学出版社希望我们写一本适合这些读者的书, 并鼓动和帮助我们申请科技部学术著作出版基金. 我们就以《简明李群》这本小书作为对国家科学技术学术著作出版基金委员会和科学出版社, 特别是李静科编辑的鼓励和帮助的感谢! 感谢南开大学、中国科学技术大学、南京大学、四川大学、北京大学、东北师范大学等院校和全国数学研究生暑期学校给予我们讲学的机会和帮助. 我们还要感谢南开大学数学科学学院的宋琼、邓旭等老师的支持与帮助.

本书内容包括: 李代数与微分几何、李群、紧李群的结构、紧李群的有限维表示、例外李群的实现、Riemann 对称空间. 第 1 章是为了本书尽量能自圆其说而添加的李代数和微分几何的基本知识. 第 2 章到第 4 章则是李群理论最基础的内容. 第 4 章的重要性还在于这是将李群理论用于物理学的发源地, 是促进李群理论得以发展的关键之一. 第 5 章例外李群是许多书都避而不谈的内容, 其原因是较为困难. 但随着发现例外李群的应用越来越多、越来越重要, 不能总规避. 第 6 章则是李群在几何上的应用, 也就是 Riemann 对称空间的理论, 这是促进李群理论发展的另一关键.

由于作者水平所限, 难免有不当之处, 衷心希望读者批评指正.

作　者

2015 年 12 月, 2017 年 5 月修改

目　录

第 1 章　李代数与微分几何

本章主要介绍与李群理论联系最紧密的李代数和微分几何的一些基本事实. 在李代数 (例如, 文献 [4], [10])、微分几何 (例如, 文献 [1],[19]) 的教材中是很容易找到的, 因此我们略去许多证明.

我们约定以下符号:

$\mathbf{F}$ 表示一个域, 在本书中假定其特征不为 2; $\mathbf{R}$ 表示实数域; $\mathbf{C}$ 表示复数域; $\mathbf{F}^{m\times n}$ 表示元素在 $\mathbf{F}$ 中的 m 行、n 列的矩阵的集合; I_n 表示 n 阶单位矩阵; $I_{p,q}$ 表示矩阵 $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$.

对于 $A\in\mathbf{F}^{m\times n}$, A' 表示 A 的转置; $\mathrm{row}_i A$ 表示 A 的第 i 行, $\mathrm{col}_j A$ 表示 A 的第 j 列; $\mathrm{ent}_{ij} A$ 表示 A 的第 i 行、第 j 列处的元素; 对于 $A\in\mathbf{F}^{n\times n}$, $\mathrm{tr}A$ 表示方阵 A 的迹; $\det A$ 表示方阵 A 的行列式.

1.1　李代数的定义

定义 1.1.1　域 $\mathbf{F}$ 上线性空间 $\mathfrak{g}$ 有二元运算 $(x,\, y)\to[x,\, y]$ (通常称为**换位运算**或**括积**), 满足:

1) 此二元运算是双线性的;

2) 此二元运算是反对称的: $[x,\, x]=0,\ \forall x\in\mathfrak{g}$;

3) **Jacobi 恒等式**成立, 即 $[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0,\ \forall x,y,z\in\mathfrak{g}$,

则称 $\mathfrak{g}$ 为 $\mathbf{F}$ 上的**李代数 (Lie 代数)**.

如果域 $\mathbf{F}$ 的特征不为 2, 则条件 2) 等价于 $[x,\, y]=-[y,\, x],\ \forall x\in\mathfrak{g}$.

例 1.1.1　设 $\mathfrak{g}$ 是域 $\mathbf{F}$ 上的线性空间, 在其中定义: $[x,y]=0,\ \forall x,y\in\mathfrak{g}$, 则 $\mathfrak{g}$ 是李代数, 称为**交换李代数**或 **Abel 李代数**.

例 1.1.2　设 $\mathfrak{g}$ 是域 $\mathbf{F}$ 上的线性空间 V 的所有线性变换构成的线性空间 (结合代数), 在其中定义: $[x,y]=xy-yx,\ \forall x,y\in\mathfrak{g}$, 则 $\mathfrak{g}$ 是李代数, 称为**一般线性李代数**, 记为 $gl(V)$.

作为有限维线性空间的线性变换, 可以用矩阵形式表示. 于是上面的例子也可以表现为下面的形式.

例 1.1.3　设 $\mathfrak{g}$ 是域 $\mathbf{F}$ 上的所有 n 阶方阵构成的线性空间 (结合代数), 在其中定义: $[A,B]=AB-BA,\ \forall A,B\in\mathfrak{g}$, 则 $\mathfrak{g}$ 是李代数, 也称为**一般线性李代数**, 记

为 $gl(n,\mathbf{F})$.

例 1.1.4　设 $\mathcal{F}$ 是实数域上某个区间上的任意次连续可微的一元函数的集合. 在 $\mathfrak{g}=\left\{f(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\middle| f(x)\in\mathcal{F}\right\}$ 中定义加法与数的乘法及括积为 $f(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+g(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}=(f(x)+g(x))\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$; $a\left(f(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)=af(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, a 为常数; $\left[f(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},g(x)\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]=(f(x)g'(x)-f'(x)g(x))\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, 则 $\mathfrak{g}$ 是一个无限维李代数.

定义 1.1.2　设 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 是域 $\mathbf{F}$ 上李代数 $\mathfrak{g}$ 的一组基, $[x_i,x_j]=\sum\limits_{k=1}^{n}C_{ij}^{k}x_k$, $1\leqslant i,j\leqslant n$. 称数组 $\{C_{ij}^{k}|1\leqslant i,j,k\leqslant n\}$ 为 $\mathfrak{g}$ 对于基 x_1, x_2, $\cdots$, x_n 的**结构常数**.

例 1.1.5　若 $\mathfrak{g}$ 是 n 维交换李代数, 则对任何基, 结构常数均为 0.

例 1.1.6　$gl(n,\mathbf{F})$ 的元素 E_{ij} 满足 $\mathrm{ent}_{kl}E_{ij}=\delta_{ki}\delta_{lj}$, $1\leqslant k,l\leqslant n$, 则 $\{E_{ij}|1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\}$ 是 $gl(n,\mathbf{F})$ 的基. 此时 $[E_{ij},E_{kl}]=\delta_{jk}E_{il}-\delta_{il}E_{kj},1\leqslant i,j,k,l\leqslant n$. 于是, 对于此基的结构常数为 $C_{(ij)\ (kl)}^{(st)}=\delta_{jk}\delta_{si}\delta_{tl}-\delta_{il}\delta_{sk}\delta_{tj},1\leqslant i,j,k,l\leqslant n$.

命题 1.1.1　域 $\mathbf{F}$ 中数组 $\{C_{ij}^{k}|1\leqslant i,j,k\leqslant n\}$ 能成为 $\mathbf{F}$ 上 n 维李代数的结构常数当且仅当下列条件成立:

1) $C_{ii}^{k}=0$, $1\leqslant i,k\leqslant n$;

2) $C_{ij}^{k}=-C_{ji}^{k}$, $1\leqslant i,j,k\leqslant n$;

3) $\sum\limits_{l=1}^{n}(C_{ij}^{l}C_{lk}^{m}+C_{ki}^{l}C_{lj}^{m}+C_{jk}^{l}C_{li}^{m})=0$, $1\leqslant i,j,k,m\leqslant n$.

$\mathbf{F}$ 的特征不为 2 时, 条件 1) 可去掉. 建议读者将这个命题的证明当作一个练习.

设 $\mathfrak{m}_i$ $(i=1,2)$ 为李代数 $\mathfrak{g}$ 的非空子集, 分别以 $\mathfrak{m}_1+\mathfrak{m}_2$, $[\mathfrak{m}_1,\mathfrak{m}_2]$ 表示由 $\{m_1+m_2|m_i\in\mathfrak{m}_i\}$, $\{[m_1,m_2]|m_i\in\mathfrak{m}_i\}$ 生成的子空间.

定义 1.1.3　李代数 $\mathfrak{g}$ 的子空间 $\mathfrak{h}$ 满足 $[\mathfrak{h},\mathfrak{h}]\subseteq\mathfrak{h}$, 则称为 $\mathfrak{g}$ 的**子代数**. 若满足 $[\mathfrak{g},\mathfrak{h}]\subseteq\mathfrak{h}$, 则称为 $\mathfrak{g}$ 的**理想**.

显然, 理想一定是子代数.

例 1.1.7　若 $\mathfrak{g}$ 是 n 维交换李代数, 则任何子空间都是理想.

例 1.1.8　$gl(n,\mathbf{F})$ 中所有上三角矩阵构成的子空间记为 $\mathfrak{t}(n,\mathbf{F})$, 所有上三角的且对角元素都是 0 的矩阵构成的子空间记为 $\mathfrak{n}(n,\mathbf{F})$, 所有反对称矩阵构成的子空间记为 $so(n,\mathbf{F})$, 所有迹为 0 的矩阵构成的子空间记为 $sl(n,\mathbf{F})$. 则这些子空间都是子代数, 而且 $sl(n,\mathbf{F})$ 是理想.

定理 1.1.1　设 $\mathfrak{h}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想. 在商空间 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}=\{\bar{x}=x+\mathfrak{h}|x\in\mathfrak{g}\}$ 中定义括积为 $[\bar{x},\bar{y}]=\overline{[x,y]}$, $\forall x,y\in\mathfrak{g}$, 则 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 也是李代数, 称为 $\mathfrak{g}$ 对 $\mathfrak{h}$ 的**商代数**.

证 首先, 证明商空间中括积的定义的合理性. 设 $\overline{x_1}=\bar{x}$, $\overline{y_1}=\bar{y}$, 即 $x-x_1=u, y-y_1=v\in\mathfrak{h}$. 于是 $[x,y]-[x_1,y_1]=[x_1+u,y_1+v]-[x_1,y_1]=[x_1,v]+[u,y_1]+[u,v]\in\mathfrak{h}$. 故 $\overline{[x_1,\,y_1]}=\overline{[x,\,y]}$.

其次, 证明所定义的括积满足所要求的条件. $[\bar{x},\bar{x}]=\overline{[x,\,x]}=\bar{0}$; $[\overline{x_1+x_2},\bar{y}]=\overline{[x_1+x_2,y]}=\overline{[x_1,y]+[x_2,y]}=[\overline{x_1},\bar{y}]+[\overline{x_2},\bar{y}]$; $[\overline{ax},\bar{y}]=\overline{[ax,y]}=a[\bar{x},\bar{y}]$; Jacobi 恒等式: $[\bar{x},[\bar{y},\bar{z}]]+[\bar{y},[\bar{z},\bar{x}]]+[\bar{z},[\bar{x},\bar{y}]]=\overline{[x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]}=\bar{0}$. 所以 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 是李代数. □

定义 1.1.4 $\mathbf{F}$ 上李代数 $\mathfrak{g}_1$ 到 $\mathbf{F}$ 上李代数 $\mathfrak{g}_2$ 的线性映射 (线性同构) φ 若满足 $\varphi([x,\,y])=[\varphi(x),\,\varphi(y)]$, $\forall x,y\in\mathfrak{g}_1$, 则称 φ 是 $\mathfrak{g}_1$ 到 $\mathfrak{g}_2$ 的**同态** (**同构**).

$\mathfrak{g}_1$ 与 $\mathfrak{g}_2$ 同构, 记为 $\mathfrak{g}_1\cong\mathfrak{g}_2$.

设 $\mathfrak{h}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想. $\mathfrak{g}$ 到 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 的自然映射 π 也是李代数的同态.

定理 1.1.2 李代数 $\mathfrak{g}_1$ 到李代数 $\mathfrak{g}_2$ 上的同态 φ 的核 $\ker\varphi$ 是 $\mathfrak{g}_1$ 的理想, 且 $\mathfrak{g}_1/\ker\varphi\cong\mathfrak{g}_2$.

证 从线性代数理论知 $\ker\varphi$ 是 $\mathfrak{g}_1$ 的子空间, 又设 π 是从 $\mathfrak{g}_1$ 到 $\mathfrak{g}_1/\ker\varphi$ 自然 (线性) 同态, 则由 $\bar{\varphi}\pi=\varphi$ 确定的 $\bar{\varphi}$ 是 $\mathfrak{g}_1/\ker\varphi$ 到 $\mathfrak{g}_2$ 的线性同构.

注意 $\bar{\varphi}([\pi(x),\pi(y)])=\bar{\varphi}\pi([x,y])=\varphi([x,y])=[\varphi(x),\varphi(y)]=[\bar{\varphi}(\pi(x)),\bar{\varphi}(\pi(y))]$. 所以 $\bar{\varphi}$ 是李代数的同构. □

例 1.1.9 设域 $\mathbf{F}$ 的特征为 0. 则作为线性空间有直和分解: $gl(n,\mathbf{F})=sl(n,\mathbf{F})\dotplus\{aI_n|a\in\mathbf{F}\}$. 易知 $sl(n,\mathbf{F})$, $\{aI_n|a\in\mathbf{F}\}$ 都是理想, 而且 $gl(n,\mathbf{F})/sl(n,\mathbf{F})\cong\{aI_n|a\in\mathbf{F}\}$, $gl(n,\mathbf{F})/\{aI_n|a\in\mathbf{F}\}\cong sl(n,\mathbf{F})$.

例 1.1.10 设域 $\mathbf{F}$ 的特征为 0. 令 $\mathfrak{g}=\left\{\begin{pmatrix}A&\alpha\\0&0\end{pmatrix}\in gl(n,\mathbf{F})\,\middle|\,A\in gl(n-1,\mathbf{F}),\ \alpha\in\mathbf{F}^{(n-1)\times1}\right\}$. 再令 $\mathfrak{s}=\left\{\begin{pmatrix}A&0\\0&0\end{pmatrix}\in gl(n,\mathbf{F})\,\middle|\,A\in gl(n-1,\mathbf{F}),\ \mathrm{tr}A=0\right\}$, $\mathfrak{n}=\left\{\begin{pmatrix}0&\alpha\\0&0\end{pmatrix}\in gl(n,\mathbf{F})\,\middle|\,\alpha\in\mathbf{F}^{(n-1)\times1}\right\}$, $\mathfrak{r}=\mathfrak{n}+\left\{\begin{pmatrix}aI_{n-1}&0\\0&0\end{pmatrix}\in gl(n,\mathbf{F})\,\middle|\,a\in\mathbf{F})\right\}$. 由于 $\left[\begin{pmatrix}A&\alpha\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}B&\beta\\0&0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}[A,B]&A(\beta)-B(\alpha)\\0&0\end{pmatrix}$, 所以 $\mathfrak{g}$ 是 $gl(n,\mathbf{F})$ 的子代数, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{r}$ 都是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 而且 $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}\cong gl(n-1,\mathbf{F})$, $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}\cong sl(n-1,\mathbf{F})$.

习 题

1. 设 $\mathbf{R}^3$ 是 3 维实向量空间. 证明其对向量积

$$\vec{\alpha}\times\vec{\beta},\quad \vec{\alpha},\vec{\beta}\in\mathbf{R}^3,$$

构成李代数, 并与 $so(3,\mathbf{R})$ 同构.

2. 证明命题 1.1.1.

3. 李代数的两个子代数的交、和是否仍是子代数?

4. 李代数的两个理想的交、和是否仍是理想?

5. 设 $\mathfrak{h}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想. 证明 $\mathfrak{g}$ 的包含 $\mathfrak{h}$ 的子代数与 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 的子代数之间有一一对应关系, 而且此对应将理想对应到理想.

6. 设 $\mathfrak{h},\mathfrak{k}$ 都是李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想, 且 $\mathfrak{h}\subseteq\mathfrak{k}$. 证明 $\mathfrak{g}/\mathfrak{k}$ 同构于 $(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})/(\mathfrak{k}/\mathfrak{h})$.

7. 设 $\mathfrak{h},\mathfrak{k}$ 都是李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想. 证明 $[\mathfrak{h},\mathfrak{k}]$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想.

1.2　线性李代数与表示

定义 1.2.1　$gl(n,\mathbf{F})(gl(V))$ 及其子代数均称为**线性李代数**.

除 $gl(n,\mathbf{F})$ 外, 重要的线性李代数有:

1) **特殊线性李代数**　$sl(n,\ \mathbf{F})=\{X\in gl(n,\ \mathbf{F})|\mathrm{tr}\,X=0\}$.

2) **正交李代数**　$so(n,\ \mathbf{F})=\{X\in gl(n,\ \mathbf{F})|X'+X=0\}$.

3) **辛李代数**　$sp(n,\ \mathbf{F})=\{X\in gl(2n,\ \mathbf{F})|X'J+JX=0\}$, 其中 $J=\begin{pmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{pmatrix}$.

4) **Lorentz 李代数**　$o(p,\ q,\ \mathbf{R})=\{X\in gl(p+q,\ \mathbf{R})|X'I_{p,q}+I_{p,q}X=0\}$, 这里 $p,\ q$ 为非负整数, $I_{p,q}=\mathrm{diag}(-I_p,\ I_q)$.

当 $p=0,\ q=n$ 或 $p=n,\ q=0$ 时, $o(p,\ q,\ \mathbf{R})$ 为实正交李代数.

5) **酉李代数**　$u(n)=\{X\in gl(n,\ \mathbf{C})|\bar{X}'+X=0\}$. 它是 $gl(n,\ \mathbf{C})$ 的 n^2 维实子代数.

6) **特殊酉李代数**　$su(n)=u(n)\cap sl(n,\ \mathbf{C})$.

7) **$(p,\ q)$ 型酉李代数**　$u(p,\ q)=\{X\in gl(p+q,\ \mathbf{C})|\bar{X}'I_{p,q}+I_{p,q}X=0\}$.

8) **特殊 $(p,\ q)$ 型酉李代数**　$su(p,\ q)=u(p,\ q)\cap sl(p+q,\ \mathbf{C})$.

9) **$(p,\ q)$ 型辛李代数**　$sp(p,\ q)=\{X\in gl(2(p+q),\ \mathbf{C})|X'J+JX=0,\bar{X}'K_{p,q}+K_{p,q}X=0\}$, 其中 $K_{p,q}=\mathrm{diag}(I_{p,q},\ I_{p,q})$.

当 $p=0,\ q=n$ 或 $p=n,\ q=0$ 时, 为 $sp(n)=sp(n,\ \mathbf{C})\cap u(2n)$.

10) **特殊正交星李代数**　$so^*(2n)=\{X\in gl(2n,\ \mathbf{C})|\bar{X}'J+JX=0,\ X'+X=0\}$ 是 $2n^2-n$ 维实李代数.

11) **酉星李代数**　$u^*(2n)=\{X\in GL(2n,\ \mathbf{C})|\bar{X}J=JX\}$.

12) **特殊酉星李代数**　$su^*(2n)=u^*(2n)\cap sl(2n,\ \mathbf{C})$.

定义 1.2.2 设 $\mathfrak{g}, V$ 分别是域上的李代数、线性空间, 若 ρ 是 $\mathfrak{g}$ 到 $gl(V)$ 中的一个同态, 则称 ρ (或 (ρ, V)) 是 $\mathfrak{g}$ 的一个以 V 为表示空间的**线性表示**, 简称**表示**, $\dim V$ 称为**表示的维数**, $\ker\rho$ 称为**表示的核**.

定理 1.2.1 设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathbf{F}$ 域上的李代数, 则对任一 $x \in \mathfrak{g}$, 可以定义 $gl(\mathfrak{g})$ 中的一个元素 $\mathrm{ad}x$ 为 $\mathrm{ad}x(y) = [x, y], \forall y \in \mathfrak{g}$, 则 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示, 称为 $\mathfrak{g}$ 的**伴随表示**.

证 很明显, $x \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{ad}\, x$ 是 $\mathfrak{g}$ 的线性变换. 又 $x \to \mathrm{ad}\, x$ 是线性空间 $\mathfrak{g}$ 到线性空间 $gl(\mathfrak{g})$ 的线性映射. 又 $x, y, z \in \mathfrak{g}$, 有 $\mathrm{ad}([x, y])z = [[x, y], z] = [[x, z], y] + [x, [y, z]] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]] = (\mathrm{ad}x\mathrm{ad}y - \mathrm{ad}y\mathrm{ad}x)z$, 即 $\mathrm{ad}([x, y]) = [\mathrm{ad}x, \mathrm{ad}y]$, $\forall x, y \in \mathfrak{g}$. 所以 $(\mathrm{ad}, \mathfrak{g})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的一个表示. □

定义 1.2.3 李代数 $\mathfrak{g}$ 的伴随表示的核, 称为此李代数的**中心**, 记为 $C(\mathfrak{g})$.

从上面的定义可知: $C(\mathfrak{g}) = \{x \in \mathfrak{g} | \mathrm{ad}x = 0\} = \{x \in \mathfrak{g} | [x, y] = 0, \forall y \in \mathfrak{g}\}$.

定理 1.2.2 设 $\mathfrak{g}$ 是 $\mathbf{F}$ 域上的有限维李代数. 则 $\mathfrak{g}$ 上的二元函数 $B(x, y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}x\mathrm{ad}y)$, $\forall x,\ y \in \mathfrak{g}$, 是 $\mathfrak{g}$ 上对称双线性函数, 满足 $B([x,\ y],\ z) + B(y,\ [x,\ z]) = 0$, $\forall x, y, z \in \mathfrak{g}$, 称 $B(x, y)$ 为 $\mathfrak{g}$ 的 **Killing 型**.

证 由线性变换迹的运算容易验证 $B(x, y)$ 是对称双线性的. 又

$$\begin{aligned}
B([x,\ y],\ z) &= \mathrm{tr}((\mathrm{ad}([x, y])\mathrm{ad}z)) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}x\mathrm{ad}y - \mathrm{ad}y\mathrm{ad}x)\mathrm{ad}z) \\
&= \mathrm{tr}(\mathrm{ad}x\mathrm{ad}y\mathrm{ad}z) - \mathrm{tr}(\mathrm{ad}y\mathrm{ad}x\mathrm{ad}z) \\
&= \mathrm{tr}(\mathrm{ad}y\mathrm{ad}z\mathrm{ad}x) - \mathrm{tr}(\mathrm{ad}y\mathrm{ad}x\mathrm{ad}z) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}y\mathrm{ad}([z, x]) = -B(y, [x, z]),
\end{aligned}$$

知定理成立. □

例 1.2.1 设 $X, Y \in gl(n, \mathbf{F})$, 于是有 $(\mathrm{ad}X)^2Y = X^2Y - 2XYX + YX^2$. 因为 $gl(n, \mathbf{F})$ 有基 $\{E_{ij} | 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$, $X \in gl(n, \mathbf{F})$, 有 $X = \sum\limits_{i,j=1}^{n} (\mathrm{ent}_{ij}X)E_{ij}$, 因此

$$\begin{aligned}
\mathrm{ent}_{ij}((\mathrm{ad}X)^2E_{ij}) &= \mathrm{ent}_{ij}(X^2E_{ij} - 2XE_{ij}X + E_{ij}X^2) \\
&= \mathrm{ent}_{ii}X^2 - 2(\mathrm{ent}_{ii}X)(\mathrm{ent}_{jj}X) + \mathrm{ent}_{jj}X^2.
\end{aligned}$$

因而 $B(X, X) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \mathrm{ent}_{ij}((\mathrm{ad}X)^2E_{ij}) = 2n\mathrm{tr}X^2 - 2(\mathrm{tr}X)^2$. 于是

$$\begin{aligned}
B(X, Y) &= \frac{1}{2}(B(X + Y, X + Y) - B(X, X) - B(Y, Y)) \\
&= n\mathrm{tr}(X + Y)^2 - (\mathrm{tr}(X + Y))^2 - n\mathrm{tr}X^2 + (\mathrm{tr}X)^2 - n\mathrm{tr}Y^2 + (\mathrm{tr}Y)^2 \\
&= 2n\mathrm{tr}(XY) - 2(\mathrm{tr}X)(\mathrm{tr}Y).
\end{aligned}$$

由此可见, $B(I_n, X) = 0$, $\forall X \in gl(n, \mathbf{F})$.

注意, $sl(n,\mathbf{F})$ 是 $gl(n,\mathbf{F})$ 的理想, 于是 $\mathrm{trad}X = \mathrm{trad}X|_{sl(n,\mathbf{F})}$, $\forall X \in sl(n,\mathbf{F})$. 由此可见, $sl(n,\mathbf{F})$ 的 Killing 型是 $B(X,Y) = 2n\mathrm{tr}(XY)$, $\forall X,Y \in sl(n,\mathbf{F})$. 如果 $\mathbf{F} = \mathbf{C}\,(\mathbf{R})$, 则由 $X \in sl(n,\mathbf{F})$ 知 $\overline{X'} \in sl(n,\mathbf{F})$, 且 $X \neq 0$ 时, 有 $B(X,\overline{X'}) = 2n\mathrm{tr}(X\overline{X'}) = \sum\limits_{i,j=1}^{n}(\mathrm{ent}_{ij}X)(\overline{\mathrm{ent}_{ij}X}) > 0$. 因此, $B(X,Y)$ 是非退化的.

例 1.2.2 因为 $\mathfrak{n}(n,\mathbf{F})$ 有基 $\{E_{ij}|1 \leqslant i < j \leqslant n\}$, 而

$$\begin{aligned}&(\mathrm{ad}E_{ij}\mathrm{ad}E_{kl})E_{st}\\=&\delta_{ls}\delta_{jk}E_{it} - \delta_{ls}\delta_{ti}E_{kj} - \delta_{kt}\delta_{js}E_{il} - \delta_{kt}\delta_{it}E_{sj}, \quad i<j,\ k<l,\ s<t.\end{aligned}$$

由此可知, $\mathrm{ent}_{st}((\mathrm{ad}E_{ij}\mathrm{ad}E_{kl})E_{st}) = 0$, $\forall 1 \leqslant s < t \leqslant n$. 因此 $B(E_{ij},E_{kl}) = 0$, 进而 $B(X,Y) = 0$, $\forall X,Y \in \mathfrak{n}(n,\mathbf{F})$.

习 题

1. 设 $\mathfrak{h}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的理想, 证明 $\mathfrak{h}$ 的中心 $C(\mathfrak{h})$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想.
2. 设 $B(x,y)$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的 Killing 型. 证明:
   1) $\ker B = \{x \in \mathfrak{g}|B(x,y) = 0, \forall y \in \mathfrak{g}\}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 且 $\ker B \supseteq C(\mathfrak{g})$;
   2) 若 $\mathfrak{g}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 则 $B(x,y)$ 在 $\mathfrak{g}_1$ 上的限制是 $\mathfrak{g}_1$ 的 Killing 型;
   3) 若 $\mathfrak{g}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 则 $\mathfrak{g}_2 = \{x \in \mathfrak{g}|B(x,y) = 0, \forall y \in \mathfrak{g}_1\}$ 也是 $\mathfrak{g}$ 的理想;
   4) 若 $B(x,y)$ 非退化, 又 $\mathfrak{g}_1$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想, $\mathfrak{g}_2 = \{x \in \mathfrak{g}|B(x,y) = 0, \forall y \in \mathfrak{g}_1\}$, 则 $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \dot{+} \mathfrak{g}_2$. 以后两个理想的直和, 常以 "$\oplus$" 代替 "$\dot{+}$".
3. 证明: $so(n,\mathbf{C})$ 的 Killing 型 $B(X,Y) = (n-2)\mathrm{tr}(XY)$.
4. 证明: $sp(n,\mathbf{C})$ 的 Killing 型 $B(X,Y) = 2(n+1)\mathrm{tr}(XY)$.

1.3 可解李代数与幂零李代数

定理 1.3.1 设 $\mathfrak{g}$ 是域 $\mathbf{F}$ 上的李代数. $\mathfrak{g}$ 中序列 $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \cdots, \mathfrak{g}^{(k+1)} = [\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(k)}], \cdots$ 与 $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}, \cdots, \mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k], \cdots$ 的每一项都是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 它们分别称为 $\mathfrak{g}$ 的**导代数序列**、**降中心序列**.

证 以导代数序列为例. 对 k 作归纳证明, $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$ 自然是 $\mathfrak{g}$ 的理想. 设 $\mathfrak{g}^{(k)}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想, 于是 $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{(k+1)}] = [\mathfrak{g},[\mathfrak{g}^{(k)},\mathfrak{g}^{(k)}]] = [[\mathfrak{g},\mathfrak{g}^{(k)}],\mathfrak{g}^{(k)}] \subseteq [\mathfrak{g}^{(k)},\mathfrak{g}^{(k)}] = \mathfrak{g}^{(k+1)}$. 因而定理成立. □

定义 1.3.1 设 $\mathfrak{g}$ 是域 $\mathbf{F}$ 上的李代数. 若有 k 使得 $\mathfrak{g}^k = 0$, 则称 $\mathfrak{g}$ 为**幂零李代数**; 若有 k 使得 $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$, 则称 $\mathfrak{g}$ 为**可解李代数**.