

中学数学教材与课例分析

董 涛 黄炳锋 杨勤春 编著



科学出版社

中学数学教材与课例分析

董 涛 黄炳锋 杨勤春 编著

福建师范大学 2014 年教师教学能力提升项目

“数学教材与课例分析”项目建设研究成果

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书主要是指导职前教师如何对教材进行分析与解读, 如何对课例进行分析与研究, 如何积累 PCK(学科教学知识或教学内容知识)与训练教学推理. 本书的课例分析部分, 每个课例概括了主要问题或鲜明优点, 指导职前教师展开讨论, 帮助职前教师了解课堂教学的主要问题, 逐步掌握主要教学设计技能. 本书的教材分析部分, 涵盖了高中的函数、几何与数学应用等主要内容以及初中的数与式、图形变换、函数等主要内容, 能帮助职前教师透彻领会课程标准及教材意图. 本书一以贯之的做法是既教给职前教师 PCK, 也教给职前教师学会教学推理. 本书经三次试教才最终定稿, 具有可操作性. 课例描述详实, 教师在使用本书时, 也可以根据感兴趣的问题对课例进行二次开发.

本书可作为数学师范类本科生、数学教育类研究生教材, 也可作为在职教师继续教育、校本教研的参考书, 还可作为教师资格证考试、教师招考的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

中学数学教材与课例分析 / 董涛, 黄炳锋, 杨勤春编著. —北京: 科学出版社, 2016.9

ISBN 978-7-03-050026-7

I. ①中… II. ①董… ②黄… ③杨… III. ①中学数学课—教学研究 IV. ①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2016)第 231923 号

责任编辑: 胡海霞 / 责任校对: 张凤琴
责任印制: 徐晓晨 / 封面设计: 迷底书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京教图印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2016 年 9 月第 一 版 开本: 720×1000 1/16

2017 年 5 月第二次印刷 印张: 13 1/4

字数: 257 000

定价: 39.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前言

课程改革提倡“用教材教”“以学定教”，这是提高教学有效性的奥妙。读懂教材、看懂课堂成为师范生的必备素质与基本功。各师范院校大都开设了教材分析、课例分析等课程或实作训练。笔者在承担学校开设的学科教材与课例分析课程时发现，缺少适用的相关教材。师范生在进行教材分析时，没有思路，只能参考教师教学用书或从网上下载资料。而教师教学用书和网络资料只是教材分析的结果，没有教材分析的过程。缺少教材分析的过程示范、框架指引、系统训练与反馈体系，师范生经过短暂训练，还是没有分析教材的思路，很难读懂教材。师范生面对的一些课例，课堂描述简洁而集中，缺少课堂的复杂与真实，通过这些课例的学习，他们很难体会课堂的两难与复杂。师范生做课例分析时，缺少分析框架，只凭借自己的感觉，好比盲人摸象，抓不住要害，很难看懂课堂。课例分析是师范生读懂学生的主要手段之一。课例分析做不好，师范生就很难读懂学生。于是笔者就有了这样的想法：构建一种分析框架与训练体系，帮助师范生建立教材与课例分析的思路，训练师范生由模仿到熟练，进而掌握教材与课例分析。

本书的主要特色是构建了一个教材与课例分析的框架。目的是教给师范生分析教材与课例的思路。这一框架基于指导在职教师做课例研究的经验。课例分析的框架包括内容组织、学生理解、教学目标、效果评估、教学策略五种相互联系的成分。内容组织是从课程的逻辑视角来分析教学材料，梳理内容的来龙去脉、核心内容、序列与层级以及关键环节，从而把握教学重点。学生理解是从学生视角来分析教学材料，梳理学生学习该内容的起点、终点（目标）与过程。学生理解分析是选择教学内容、设计教学方法、提高教学有效性的前提。教学目标是课程标准的落实视角，基于内容分析与学生分析来确定教学活动的目的，选择对学生今后发展最有价值的知能。效果评估分析是从落实教学目标的视角来具体化学生的学业表现，提高教学针对性，减轻学生负担。教学策略分析是从教学途径方法视角分析教学总体途径的合理性、教学方法的有效性、教学活动的针对性及与教学目标的一致性。教材分析的框架与课例分析基本相同。差别有两点：一是内容组织中多了内容知识结构与替代体系，目的是帮助师范生梳理知识主干，了解替代的内容组织体系；二是教学策略主要是展示典型课题的教学设计，目的是为师范生学习

教学设计提供样例. 本书详细介绍了师范生学习课例分析的程序, 具有极强的可操作性.

本书的主要内容, 除了分析框架及学习程序外, 还有十个章节的中学数学的典型内容的教材分析与十一个典型课例. 这些内容作为师范生学习的典型样例. 课例几乎是课堂实录, 详细地描述了原生态的课堂. 每个课例概括了主要问题或鲜明优点. 使用时也可针对感兴趣的问题, 对课例进行二次开发.

本书提纲由董涛拟定. 各章编写的具体分工为: 第 1~3 章, 董涛; 第 4 章, 黄炳锋、董涛; 第 5 章, 杨勤春、董涛. 董涛统稿全书. 研究生严若眉修改了全书的格式、公式. 本书的分析框架与程序来源于全国教育科学规划领导小组办公室资助的全国教育科学“十二五”规划教育部重点课题: 基于 PCK 结构框架的数学课例分析模式研究 (DHA120241). 研究生林静、陈晓璐、张冬霞、苏雯雯提供了课例分析部分的基础材料——课堂实录, 董涛在此基础上撰写了教学过程. 研究生王倩倩也贡献了本书的几个图形. 福建师范大学数学与计算机学院、福建师范大学教师教学发展中心为本书的出版给予资助. 福建师范大学数学与计算机学院院长郭躬德、副院长苏维钢、科学出版社胡海霞编辑对本书的出版给予极大支持. 在此, 一并致谢!

董 涛

2016 年 8 月

目 录

前言

第 1 章 教材与课例分析框架	1
1.1 课例分析的框架与程序	1
1.2 教材分析框架	16
第 2 章 初中课例分析	18
2.1 利用作图法探究角平分线性质——“角平分线性质”课例分析	18
2.2 探究中要强调通法——“多边形内角和”课例分析	27
2.3 为什么要给单项式分类——“合并同类项”课例分析	30
2.4 合理控制运算难度——“二次根式加减”课例分析	37
2.5 重视知识的生成点——“因式分解”课例分析	44
2.6 几何定理如何教——“垂径定理”课例分析	49
第 3 章 高中课例分析	54
3.1 为什么选择这三个命题作公理——“平面”课例分析	54
3.2 衔接中把握好内容定位——“函数单调性”课例分析	60
3.3 借助类比构建思路——“函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi) + b$ 的图像与图像变换” 课例分析	64
3.4 整合函数与分布列——“离散型随机变量及其分布列”课例分析	72
3.5 如何设计“总—分—总”的课堂教学结构——“向量数乘运算及其几何 意义”课例分析	77
第 4 章 高中教材分析	83
4.1 “函数的概念与性质”教材分析	83
4.2 “指数函数、对数函数、幂函数”教材分析	96

4.3	“直线平面间的位置关系”教材分析	109
4.4	“解三角形”教材分析	126
4.5	“数列”教材分析	141
第5章	初中教材分析	156
5.1	“有理数”教材分析	156
5.2	“轴对称”教材分析	163
5.3	“整式的乘法与因式分解”教材分析	174
5.4	“勾股定理”教材分析	183
5.5	“反比例函数”教材分析	194
参考文献		204

第1章 教材与课例分析框架

1.1 课例分析的框架与程序

课例是关于一节课的教与学的案例,包括课堂中实际情况的记录、存留的疑惑、能够引发教师关注的问题、可作为讨论的材料。课例蕴含了特殊案例的知识以及运用适当教学原理于指定课例的策略知识。这些知识来源于教师的个人实践经验,具有情境性、条件性,是教师解决教学问题的知识基础。课例提供了多样观点与替代教学经验,帮助教师理解教学、学习教学。课例提供场景,激发教师发现分析课例中的问题,制定解决方案,尝试在课堂中解决问题,并评估解决方案。课例研究是一种行动研究,是传统公开课的创新,继承了公开课解决教学问题、示范引领教学的特征,消解了公开课的表演性与难以推广的弊病。课例分析与研究是职前教师与职后教师专业成长的主要方式之一。课例知识的主要成分是学科教学知识或教学内容知识(pedagogical content knowledge, 简记为 PCK)^①。这些策略知识是教学推理的知识基础。对于职前教师,课例分析是学习 PCK 与教学推理的主要载体。课例分析的关键在于使用课例分析的正确方法。

研究发现,PCK 结构框架是一种课例分析的有效方法^②。它能帮助教师发现与提出课堂教学问题,激活教师的相关经验,支持教师分析、渐进解决这些问题。用 PCK 结构框架分析与研究数学课例,能够提高教学的有效性,改变教师的教学信念。职前教师采用 PCK 结构框架来进行课例分析,更有利于学习与积累 PCK,培养数学教学推理能力,提高教学素养。本课程把 PCK 结构框架作为课例与教材分析的主要框架。

1.1.1 课例分析的 PCK 结构框架

该框架包括内容组织、学生理解、教学目标、效果评估、教学策略五种相互联系的要素。内容组织是从课程的逻辑视角来分析教学材料,梳理内容的来龙去脉、核心内容、序列与层级以及关键环节。内容分析是把握教学重点的主要手段。

^① Shulman L S. Those who understand knowledge growth in teaching[J]. Educational Researcher, 1986, (2): 4—14.

^② 董涛. 基于 PCK 结构框架的数学课例分析程序与特征[J]. 课程·教材·教法, 2015, (11): 75—79.

学生理解是从学生视角来分析教学材料,梳理学生学习该内容的起点、终点(目标)与过程.学生理解分析是选择教学内容、设计教学方法、提高教学有效性的前提.教学目标是从课程标准的落实视角,基于内容分析与学生分析来确定教学活动的目的,主要比较课程标准的教学要求与学生已有知识能力的差距,选择对学生今后发展最有价值的知能.效果评估分析从落实教学目标的视角来具体化学生的学业表现.效果评估分析的作用在于提高教学针对性,减轻学生负担.教学策略分析是从教学途径、方法视角分析教学总体途径的合理性、教学方法的有效性、教学活动的针对性及与教学目标的一致性.

1. 内容组织

内容组织是从课程的逻辑视角来分析教学材料,包括三个视点:①内容的来龙去脉,即相关内容的联系与比较;②内容的序列、主要内容的层次与水平;③核心内容与关键环节.

内容的来龙去脉是指该节内容属于一个什么主题,从哪里来,用在什么地方,又发展出了什么,与先前相关内容的相同点与不同点.比如,因式分解来自于分解因数,是整式乘法的逆运算,在初中主要用于解二次方程、分式方程,将来可进一步发展,形成多项式环中的因式分解定理.内容序列是指内容的前后顺序.比如,要先讲有理数的运算才能讲整式的加、减、乘等运算,因为整式的运算中系数运算就是有理数的运算.讲了整式的运算,才能讲解一元一次方程.因为一元一次方程的解法要用到整式的运算.当然,有的内容没有逻辑上的顺序,序列安排是从学生学习的难易程度来考虑的,比如三角形全等的四个判定定理的顺序.内容序列的主要安排方式有两种.一种是先讲上位知识,再讲下位知识,体现上位知识的先行组织者作用.比如,初中“四边形”一章,先讲平行四边形,再依次展开讲授矩形、菱形、正方形.这样的顺序安排,用基本概念作支撑,重点突出,体系简约,使知识容易领会、记忆和迁移.另一种是先学下位知识,把下位知识作为特例,进一步一般化推出上位知识.比如,由分解因数到分解因式,由分数到分式.这样的顺序安排,由浅到深,由易到难,先简后繁,便于学生理解.

为了分散难点,需要将内容按照难易程度有序递进,先讲最简单版本,再逐次增加难度,这就是内容的层次.比如,最简单的一元一次方程是 $ax=b$,这是一元一次方程的最低层次, $ax+b=c$ 就是更高一级的层次.内容的水平是从不同视角来研究内容,水平高的视角更接近内容的本质.当然,水平低的视角更容易被学生理解接受.比如,初中函数的“变量说”定义与高中函数的“对应说”定义.内

容不同水平的转换,需要厘清其转换的逻辑.内容定位指以这个内容为载体,实现什么目标.比如,三角形全等的四个判定定理.如果“边角边”定理放在第一个,它的定位是帮助学生掌握学习三角形全等判定定理的套路,掌握证明三角形全等的格式.如果“边边边”定理作为第四个,它的定位就是训练学生在四个判定定理中选择适宜的定理来判定三角形全等.因为学生经过前三节课三个判定定理的训练,对直接应用某个判定定理判定三角形全等已经非常熟练.尽管内容基本一样,但教学定位是不同的.

核心内容是与支持性内容相对而言的.比如,三角函数的核心内容包括三角函数概念、图像、性质、弧度制、任意角、诱导公式等,都是支持性内容.支持性内容的作用是辅助理解核心内容,学生了解即可,不宜引申出其他的教学价值,教学要求要低.

内容的关键环节是最需要教师直接指导教学的地方,是学生自己看不懂、想不出、想不到的地方.比如,勾股定理的逆定理证明思路,学生一般想不出.该思路就是该节内容的关键环节,需要教师指导.比如,教师提示,火车站是怎么安检的?就是用身份证照片和本人对照;如何证明满足这些条件的三角形是直角三角形,就是证明它与一个直角三角形全等.

从上述三视点来分析课例教授的内容,才能梳理清楚内容的结构,明白需要教什么,有利于找到课例存在的诸如重点偏离等问题及设计解决问题的策略.

2. 学生理解

学生理解是从学生视角来分析教学材料,梳理学生学习该内容的起点、终点(目标)与过程,包括五个视点:①学生理解具体内容的(知识与经验)基础;②学生的学习能力限度;③学生自发的方法;④难点;⑤学生的典型误解与认知重组.

第一,分析学生理解新内容的基础(已有知识经验),这是学生学习的起点.教师需要把学生的学习建立在正确坚实的基础上,充分利用学生的认知结构来同化新知识.比如,因式分解的知识基础是分解因数与整式乘法.尽管学生都学过,但学生可能想不到利用分解因数来同化分解因式,这时需要教师指导.

第二,分析学生的学习能力限度,即确定学生学习能力的终点.超过学生能学会的限度,学生不可能学会,教了也白教.比如,经过调查,初中生无法掌握根号下含有分式的二次根式运算,这就是学生的学习能力限度,只能教到根号下不含字母的二次根式运算.

第三,分析学生自发的方法.即学生可能有几种思路,哪些思路能行,哪些不

行, 哪些思路简单, 哪些思路复杂, 哪些思路是通法, 哪些思路是技巧, 哪些思路需要精简, 哪些思路需要进一步发展至通法. 比如, 计算 $6\sqrt{\frac{1}{3}} + 2\sqrt{3}$, 有学生会把这两项都化为 $\sqrt{3}$ 的倍数再算, 有学生会把这两项都化为 $\sqrt{\frac{1}{3}}$ 的倍数再算. 前者是通法, 后者是偏法. 偏法最好提前预防, 引导至通法, 防止学生形成思维习惯.

第四, 分析学生的难点. 即学生想不到、想不出的地方. 难点经过教师的精心指点, 学生是能学会的, 要与学生的学习能力限度区分. 比如, 勾股定理一课, 除非学生事先预习, 知道这个结论, 否则探索发现勾股定理是很难的, 学生一般没有思路. 这就是学生的难点, 需要教师精心设计教学活动, 及时准确指导, 学生才有机会发现勾股定理.

第五, 分析学生的典型误解与认知重组. 比如, 在勾股定理一课中, 学生一看到“在直角三角形中, 三角形的两边是 3 和 4”, 就会认为第三边是 5, 忽视了检验边长为 3 和 4 的两边是否是直角边. 这就是学生的误解, 需要教师纠正. 学生小学初次学乘法, 学到乘法是几个相同加数的和, 但到学小数乘法时, 乘法的意义就转变了, 变成了以两个乘数为边的长方形面积. 这时学生需要认知重组. 长方形面积的说法应用范围更广, 对整数乘法也成立. 教师需要引导学生转变视角, 从面积视角能统一解释整数乘法和小数乘法. 仅对整数乘法, 连加的解释还是行得通的.

学生理解的分析, 有助于发现学生理解困难的地方、原因, 并找出对策.

3. 教学目标

教学目标是课程标准的落实视角来分析教学活动的目的, 主要是比较课程标准的教学要求与学生已有知识能力的差距, 选择对学生今后发展最有价值的智能, 分析教师把握课时教学目标的精准性. 教学目标分析有三个视点: ①内容的程度; ②内容的特点; ③内容体现的数学能力.

教师所教授内容的程度要落在学生的最近发展区内. 内容要求是学生现在不会且能学会的. 学生会了的不用教, 尽管课程标准或教材上有这个内容; 学生不可能学会的不要教.

内容特点是指内容所体现的数学特点与数学思想. 比如, 代数运算的抽象一般化特点、代数概念的结构化特点、几何概念的图形概念化特点等. 分析内容的特点要充分重视学段衔接, 重视知识的结构化与系统化. 比如, 小学学过解简易方程, 中学学解一元一次方程. 中学的一些方程可以用小学的做法逆运算方法求解, 也可以

用中学移项、去括号的方法求解. 中学设计教学目标就不能仅考虑学生对中学方法的掌握, 还要考虑学生是否明白方法改进的原因, 要让学生知道两种方法的适用范围. 仅教授中学的方法, 学生也是掌握不好的. 学生习惯了小学的方法, 还是愿意使用小学的方法, 要让学生体会到方法改进的必要性, 新方法能解决旧问题, 还能解决旧方法不能解决的新问题. 分析内容特点要突出该内容体现数学核心内容的方面, 体现内容所蕴含的数学思想, 保证学生数学知识的结构化, 使学生学懂、忘不掉, 形成对学生今后发展最有价值的知识.

教学目标最终要落实到学生的数学能力培养, 内容所涉及的数学能力要在课堂上得到足够训练. 数学能力培养要放在学段、学年目标的大背景下考虑, 要有能力训练序列的意识. 比如, 上述三角形全等的四个判定定理, 内容相同, 但顺序不同, 需要培养的能力就不一样, 教学目标迥异. 教学目标既要确保学生学会, 也要保证学生会学、会用, 确保学生形成合理的数学信念.

教学目标的分析, 有助于(职前)教师删繁就简, 提高课堂的结构化程度与效率, 有助于减轻学生的学习负担.

4. 效果评估

效果评估是从落实教学目标的视角来分析学生的课堂学业表现, 即学生懂了什么、会了什么与怎么会的, 才算达成了教学目标. 它是教学目标的具体化. 好的评价与教学目标一致, 会提示学生哪些内容、方法是重要的. 好的评价也会显示学生是如何学习的. 评价会显示学生已经会了什么, 哪些还不会, 需要进一步学习. 教师需要根据对学生学习结果的评价作出后续教学决策, 推动教学的持续进行. 效果评估分析有三个视点: ①与教学目标对应的主要题型是什么? 主要方法是什么? ②典型题目的解法与变式题组、典型解题方法的应用范围; ③纠正学生误解的有效评价题目.

教师备课时有一主要问题, 即先备教学过程, 再确定目标与评价. 这一备课思路往往导致评价与目标不一致. 比如, 函数的概念一课, 更多的练习是求函数的定义域, 这就偏离了目标. 效果评估分析要着重考虑落实目标的题目与方法, 再考虑训练与纠正问题.

效果评估的分析提高了课堂的针对性, 减轻了学生负担.

5. 教学策略

教学策略是从教学途径、方法视角来探讨突出重点、突破难点的教学总体途

径及具体采用的教学方法. 教学策略是教学途径的总体描述, 教学方法是实施教学策略的具体手段. 如在创设情境环节, 提供先行组织者是常见教学策略, 提供内容概览是提供先行组织者的具体手段之一, 是教学方法. 教学策略决定于内容、教师和学生, 差异较大, 需要具体课例具体分析, 主要从教学过程及教学效果来分析.

教学策略分析探讨教学总体途径的合理性、教学方法的有效性、教学活动的针对性及与教学目标的一致性. 教学策略分析时要注意十个要点. 第一, 学生看书自学也是一种重要学习方法. 学生自己能看懂的不需教是一条重要的教学原则. 第二, 学生在教师指导下尝试学习也是一种重要学习方法. 学生能想出来的教师不用教, 学生能做出来的教师不用示范. 第三, 学生交流讨论一定是在充分思考之后. 第四, 情境的主要作用是指出知识的存在性与应用场合, 启发思路, 激发动机不是情境的主要功能. 第五, 概念教学要有一个分类的过程, 突出概念是类化结果的思想. 概念定义最后要算法化、操作化, 便于学生应用. 概念辨析要涵盖学生的主要误解. 误解从逻辑上说有三类. 一是类化不足, 人为缩小了概念的外延. 如认为牛顿-莱布尼茨公式仅适用于连续函数. 二是过度类化. 如把分配律推广到两角和的余弦. 三是类化偏移. 如把乘法看成连加, 偏离了概念的本质. 第六, 命题的教学要讲清命题的由来、证明的思路、命题的结构、命题的应用、命题的系统化及进一步发展的方向. 第七, 题组训练要有层次. 第八, 纠正误解要有针对性. 要讲清误解的不合理处, 正确看法的可理解性、合理性与有用性. 第九, 概览要交代清楚内容的背景、来龙去脉及地位作用. 第十, 小结既要总结知识, 也要总结研究过程与方法.

教学策略的分析, 有助于提高课堂教学的有效性, 即效果、效率、吸引力.

1.1.2 课例分析的程序^①

1. 课题的选择

课题要选择教师感兴趣的. 如教师感到难上的课, 像高中必修二“平面”一课; 或者新近引入到教材的课题, 像“几何概型”“正态分布”等课; 或者教师感到不好把握的衔接类课, 如高中“函数的概念”、初中“一元一次方程解法”等; 或者主要内容的起始课, 如初中“合并同类项”. 以下将以“平面”为例说明分析程序. “平面”一课中的三个公理是讨论立体几何位置关系的开端, 体现了公理化方法的特征, 如怎样选择一组公理作为位置关系及其判定的演绎起点. “平

^① 课例分析程序与特征主要参考: 董涛. 基于 PCK 结构框架的数学课例分析程序与特征[J]. 课程·教材·教法, 2015, (11): 75—79.

面”一课中几何知识的局部组织经验,不仅有利于学生长久记忆该课内容,更能为后续数学知识的系统化奠定一个指导框架。

2. 分析前的准备

观课教师先概要备课,对自己怎么上这节课有个大概思路。再查找一些这节课的典型教学设计,对这节课一般怎么上有所了解。“平面”一课中三个公理的常规教法就是教师在例子协助下给出公理。

3. 观课

课堂观察并录像,或观看早已录好的录像,然后把录像转录成文字,也可以是主要教学环节节录。课堂实录可以方便快速多次分析。而录像的定位、回放效率不高,包含太多干扰信息。不经过课堂观察或观看录像,只看课堂实录缺少现场体验,效果不好。

4. 运用上述课例分析框架进行课例分析

以下将以“平面”一课具体说明如何分析。

第一次上“平面”课描述。

第一次课主要分为五个环节。第一环节是引入环节。教师出示问题:平面几何研究什么?两个学生答非所问,教师只好自答。接着提问:“立体几何研究什么?”学生仿照回答。第二环节教师系统讲授平面概念。教师指出平面像直线一样,是从生活中抽象出来的不加定义的概念,介绍了平面的特征、表示,仔细示范了平面的画法。第三环节讲授公理一。教师首先介绍了公理化方法,指出公理化方法是从一些原始概念和一些不加证明的原始命题(公理)出发,运用逻辑推理,推导出其他命题和定理的方法。接着教师引导学生举例探讨“直线 l 与平面 α 至少有几个公共点,直线 l 就在平面 α 内”。把得出的结论称为公理一。随后教师刻意强调了公理一的图形表示、符号表示,强调公理一用来判断直线是否在平面内。第四环节是讲授公理二与公理三。教师举例让学生认识到不在同一直线上的三点确定一个平面,把这个结论记为公理二,然后指出两个注意要点,特别强调公理二是来确定平面的。教师接着举例让学生认识到公理三:如果两个不重合的平面有一个公共点,那么它们有且只有一条过该点的公共直线,强调了公理三的图形表示、符号表示及三个作用。接着学生练习了几个图形的符号表示。第五环节是小结与作业,教师强调了公理化方法与抽象思维。

下面用课例分析框架分析上述课例.

(1)内容组织. “平面”这节课是学生第一次学习公理与公理化方法. 公理化方法的关键是如何从知识间的逻辑关系中选取不加定义的基本概念和公理作为逻辑起点, 然后应用逻辑规则, 定义其他概念, 演绎其他命题. 这节课的三个公理, 来自于直线平面间的位置关系及其判定, 之后用它们来推导平面直线间其他位置关系的判定定理. 公理化方法还会应用到数学的各个分支及理论物理等学科. 这节课的内容应该分为三个层次: ①空间中的平面、直线有哪些位置关系; ②这些位置关系的逻辑关系是怎样的; ③这些位置关系及其判定系统化, 应该如何选择逻辑起点. 这节课的教学应定位在以下两点: ①三个公理的内容、注意要点、表示与作用; ②了解公理化方法如何组织内容知识. 关键环节应该是为什么要把这三个命题作为公理. 上述教学过程主要定位在第①点, 没有体现三个公理的来龙去脉及公理化方法的应用过程.

(2)学生理解. 学生理解位置关系的知识基础是平面图形中点、直线间的位置关系, 经验基础是长方体中直线平面间的位置关系. 学生选择逻辑起点推导其他命题的经验基础是初中构思几何证明的经验. 学生第一次碰到公理, 不会自发想到公理化方法的必要性, 不会想到这三个公理的主要作用是作为直线平面间位置关系及其判定的逻辑起点. 学生能够理解直线平面间位置关系的逻辑关系, 有能力了解用公理化方法组织这些位置关系及其判定的过程.

(3)教学目标. 公理化方法的教育价值在于发展学生推理能力. 学生借助这种推理能力才能长久地记住所学内容. 教学目标应该是在了解空间点、线、面的位置关系以及在这些位置关系的逻辑关系基础上, 理解三个公理的作用, 了解公理化方法, 掌握这三个公理. 上述课例基本没有实现主要目标. 教师举个例子引出一个公理, 学生当时知道了这三个公理, 没有把它们与直线平面间的位置关系联系起来形成知识结构, 过一段时间就忘了. 课堂没有展示用公理化方法组织线面间位置关系的过程, 学生不知道为什么选择这三个命题作为公理, 不能准确理解这三个公理的作用(事实上执教教师也不理解)及公理化方法的价值.

(4)效果评估. 该课只有一组符号表示的题目. 这组题目能够夯实学生的应试基础知识, 但偏离该课的主要教学目标.

(5)教学策略. ①教学任务偏离主要教学目标. 该课是位置关系的起始课, 主要教学任务应该能够交代清楚该章内容的来龙去脉, 帮助学生整体感知该课内容. 上述课例仅有细节性任务, 如环节三举例探讨“直线 l 与平面 α 至少有几个公共点, 直线 l 就在平面 α 内”, 缺失能够整合这些细节的整体框架性任务. ②有些教

学活动的有效性有问题. 如引入环节的问题“平面几何研究什么”, 环节三“什么是公理化方法”. 这些问题超越了学生的理解能力限度, 学生没法通过听定义来学会, 只能通过例子慢慢体会. ③改进建议: 立体图形中的线面间位置关系, 需要有一概览介绍, 该概览同时能沟通平面几何的位置关系. 学生可以体会到组织这些位置关系逻辑体系的必要性, 在观察公理化方法的运用过程中体验公理化方法.

5. 分析结果可行性检验

根据上述 4 中的分析结果, 重新备课、上课、评课, 检验分析结果, 尤其是教学改进建议的可行性、积累课例分析与研究体验.

第二次上“平面”课描述.

第二次课也分为五个环节. 首先是导入环节. 教师要求学生类比平面图形中点、直线间的位置关系, 参照长方体模型, 猜测空间中直线、平面间的位置关系. 学生顺利得出这些位置关系: 线在面上、线不在面上; 面面重合、相交、平行. 第二环节是讲授公理一. 教师要求学生回顾初中证明“等角对等边”的过程, 思考如何构建上述位置关系判定的逻辑体系. 学生意识到需要确定逻辑起点, 然后由作为逻辑起点的命题推导出其他位置关系及其判定. 教师指出, 这种方法就是公理化方法, 作为逻辑起点的命题, 一般是大家公认的、不证自明的, 这样的命题称为公理. 接着教师启发学生由“两点确定一条直线”, 来举例探讨“直线 l 与平面 α 至少有几个公共点, 直线 l 就在平面 α 内”, 把得出的结论称为公理一. 教师随后演示公理一的文字表示、图形表示、符号表示, 并用“工人判断黑板是否平整的方法”为例展示公理一的实际应用. 第三环节是讲授公理二. 教师引导学生认识到“判断两平面重合”可以转化为“如何确定一个平面”, 并类比“两点确定一条直线”, 猜想确定平面的方法. 再以“门”为例, 让学生理解“不在同一直线上的三点”这一条件. 教师把所得结论称为公理二, 并以三脚架为例说明公理二的实际应用. 接着教师引导学生判断一些命题的对错, 这些命题是公理二的一些等价和不等价命题. 第四环节是讲授公理三. 教师引导学生类比“两直线相交有一公共点”, 猜测两平面相交的特征, 把所得结论称为公理三. 学生举例说明公理三, 教师示范公理三的图形表示、符号表示, 并指出公理三也可用于判断三点共线. 第五环节是小结与作业. 教师总结这节课的主要内容及其关系, 强调了这节课的学习过程与学习方法, 指出立体几何的研究问题大多是类比平面几何提出的, 类比推广是一种有效的研究方法.

用课例分析框架分析第二次课.

(1) 内容组织. 从空间直线平面间的位置关系出发, 选择三个基本命题作为公理, 构建位置关系及其判定的逻辑体系. 内容组织的条理清楚, 逻辑连贯, 符合数学的认识论, 便于学生理解这些位置关系体系, 形成认知结构. 教学定位、关键环节把握准确.

(2) 学生理解. 从平面几何点、直线间的位置关系和长方体模型着手引入课题, 理解起点准确. 用“等角对等边”的证明过程启示思路, 学生易于想到需要组织位置关系的逻辑体系, 体会这三个公理的作用及公理化方法的必要性.

(3) 教学目标. 学生知道了空间直线、平面间位置关系及其逻辑体系, 基本掌握了三个公理的内容, 观察了公理化方法的应用过程, 体会了立体几何发现问题的方法, 初步了解了公理化方法.

(4) 效果评估. 学生主要练习了利用公理二证明有关命题. 这些题目基本反映了这节课的主要方法——选择逻辑起点组织证明链条.

(5) 教学策略. 教学任务与目标一致. 整体采用类比的教学途径, 基本符合数学的思维方式与学生的思维特点.

6. 研究拓展

教师把这次课例分析与研究中的经验应用到相关课题中去. 在应用过程中, 教师会逐步改变对教学的认识, 重塑备课过程、教学过程, 形成理论与经验相结合的教学眼光.

在 4, 5 两个环节, 教师最初需要专家示范、指导, 如提供范例、有关知识库、指点方向、诊断分析. 教师有了一定体验后, 专家的指导逐渐退出, 教师尝试在分析策略支撑下逐渐掌握分析程序.

第 2 章、第 3 章的内容, 主要就是按照这个分析程序分析的结果. 每个课例概括了存在的主要问题或鲜明优点, 与职前教师展开讨论, 帮助职前教师逐步掌握主要教学设计技能.

1.1.3 课例分析的特征

1. 学生的学习是分析焦点

首先, 关注分析教学目标的合理性, 尤其是长期目标(如能力目标、情感态度目标)的分解落实. 它倡导综合内容分析、学生分析、教育信念等因素考虑教学目标, 以系列范例、知识库、分析策略支持教师分析长期目标. 这与传统教学侧重知