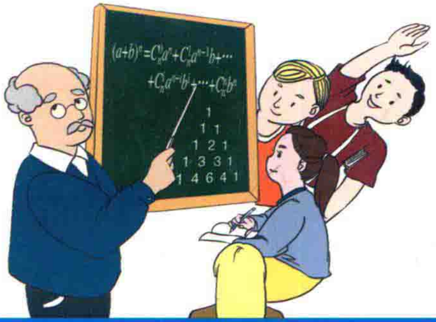


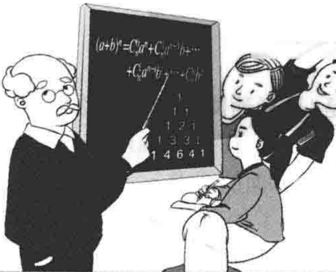
数林外传系列

跟大学名师学中学数学

巧用抽屉原理

◎冯跃峰 著

中国科学技术大学出版社



数林外传系列

跟大学名师学中学数学

巧用抽屉原理

◎ 冯跃峰 著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

在数学解题中，抽屉原理的应用往往是“从天而降”的，读者在赞叹之余却不得章法．他们急切地想知道：究竟应如何使用抽屉原理？本书正好满足了广大数学奥林匹克爱好者在这方面的需求．

本书介绍了抽屉原理的几种形式，详细讨论了抽屉原理的使用技巧，包括元素设置、抽屉构造、过程优化、精细讨论、多层次运用等．

本书介绍的技巧和方法，大都是作者首次提出的，比如目标元、分解元、复合元、多维抽屉、去掉“小抽屉”、寻找“空抽屉”、避开“大抽屉”、筛选“好元素”、剔除和改造紧元素、等容分组等，这些都是作者潜心研究的成果．书中还选用了一些原创数学问题，这些问题难度适中而又生动有趣，有些问题还是第一次公开发表．此外，书中对问题求解过程的详细分析，尚能给读者以思维方法的启迪．

图书在版编目(CIP)数据

巧用抽屉原理/冯跃峰著．—合肥：中国科学技术大学出版社，2015.10

(数林外传系列：跟大学名师学中学数学)

ISBN 978-7-312-03760-3

Ⅰ.巧…　Ⅱ.冯…　Ⅲ.组合数学—青少年读物　Ⅳ.O157-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 106653 号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
http://press.ustc.edu.cn
http://shop109383220.taobao.com

印刷　合肥市宏基印刷有限公司

发行　中国科学技术大学出版社

经销　全国新华书店

开本　880 mm×1230 mm　1/32

印张　12.375

字数　310 千

版次　2015 年 10 月第 1 版

印次　2015 年 10 月第 1 次印刷

定价　30.00 元

前　言

抽屉原理是数学中解决存在性问题的有力工具，其应用非常广泛，也为广大数学爱好者所熟悉.几乎可以说，在所有组合数学的工具中，人们最为熟悉的就是抽屉原理了，因为不少人在小学阶段就开始接触它，而且还经常用到它.既然如此，那我们还有必要写一本介绍抽屉原理的书吗？何况关于抽屉原理的专著或相关竞赛数学图书中关于抽屉原理的专题都随处可见！

其实，我们以往见到的关于抽屉原理的论述，常常侧重于如下两个方面：一是介绍抽屉的一些表现形式，即有哪些类型的抽屉.二是运用抽屉原理的基本步骤.这些当然是重要的，但仅有这两个方面还远远不够.

比如，就抽屉而言，我们更关心的是在具体问题中如何构造抽屉.打一个浅显的比方：当我们去逛商场时，在衣橱中看到商家陈列了不少衣服的新款式，你喜欢哪一款，就会买其中一件，你当然不会关心这样款式的衣服是怎样制作的.但在解题中则并不是这样，因为题目本身不会陈列各种抽屉的"款式"，更何况所用的抽屉必须由题中所给的材料来制造.因此，如何"就地取材"来构造抽屉比了解有哪些形式的抽屉更为重要.所以我们在本书中专列了一章来介绍如何构造抽屉.

抽屉原理的运用中，除了"抽屉构造"这一非常重要的环节外，还有另一个重要的环节常常被人们所忽视，那就是元素的选择.也许你会感到奇怪，元素还需要选择？它不是题中早就给定好了的吗？事实并非如此！运用抽屉原理时，元素的选择很有讲究，所以我们也专列

了一章来介绍如何选择元素.

此外,对于一个较为复杂的问题,抽屉原理的运用并非是轻而易举的,还需要一些技巧,所以我们用了比较多的章节来介绍如何运用抽屉原理,这些都是少有人提及的.

当然,以上一些想法,可能囿于个人的知识或涉猎范围,在这之前早有人提出或研究,那本书就作为这些工作的一些补充,提供一些例子加以印证.

限于水平,书中谬误难免,敬请读者不吝指正.

冯跃峰

2015 年 9 月

目　　录

第 1 章　抽屉原理的几种形式

抽屉原理又叫“鸽巢原理”“邮箱原理”“重叠原则”等，它是组合数学中解决存在性问题的一个重要原理.

抽屉原理是由德国数学家狄利克雷(Dirichlet，1805～1859)首先总结的，因此又叫作狄利克雷原理.

1.1　简 单 形 式

抽屉原理的简单形式如下：将 $n+1$ 个元素，归入 n 个类(抽屉)，一定有 2 个元素属于同一个类.

抽屉原理的简单形式还有如下更广泛的表述方式：将 m 个元素，归入 n 个类，如果 $m>n$，则一定有 2 个元素属于同一个类.

虽然抽屉原理的简单形式是抽屉原理的一种最简单的情形，但它的运用却最为广泛.

从抽屉原理的表述不难看出，运用抽屉原理，有如下 3 个步骤：

(1) 选定若干个元素；

(2) 将选定的元素分为若干类；

(3) 计算元素的个数 m 及类的个数 n，证明 $m>n$，得出相关结论.

由此可见，运用抽屉原理是非常灵活的，有很多技巧，比如，如何选取元素，如何构造抽屉(分类)，如何计算抽屉个数与元素个数等，这些我们都会在后面的章节中一一介绍.

下面先看几个利用抽屉原理的简单形式的例子.

例 1　在$\{1,2,3,\cdots,100\}$中,存在 p 个数,其中任何两个数的和都不是平方数,求 p 的最大值.(原创题)

分析与解　可这样考虑:只要 p 足够大,就可能有两个数属于同一抽屉,而同一抽屉中的两个数的和为平方数.

以"同一抽屉中的两个数的和为平方数"为准则来构造抽屉,可将$\{1,2,\cdots,100\}$划分为如下 51 个子集(抽屉):

$$A_i=\{i,9-i\}\quad(1\leqslant i\leqslant 4),$$

$$B_j=\{j,25-j\}\quad(9\leqslant j\leqslant 12),$$

$$C_k=\{k,49-k\}\quad(17\leqslant k\leqslant 24),$$

$$D_t=\{t,81-t\}\quad(33\leqslant t\leqslant 40),$$

$$E_r=\{r,121-r\}\quad(49\leqslant r\leqslant 60),$$

$$D_s=\{s,169-s\}\quad(73\leqslant s\leqslant 84),$$

$$F=\{97,99\},$$

$$G=\{98\},$$

$$H=\{100\}.$$

设取出的 p 个数构成的集合为 A. 若 $p\geqslant 52>51$,则由抽屉原理(简单形式),必有一个子集含有其中的两个元素,这两个元素的和为平方数,矛盾. 所以 $p\leqslant 51$.

若 $p=51$,且 A 中任何两个数的和不为平方数,则上述 51 个子集中都恰有一个数属于 A,于是 $98,100\in A$.

因为 $98+46=12^2$,而 $98\in A$,所以 $46\notin A$,进而 $35\in A$,所以 $1\notin A$,于是,$8\in A$.

因为 $100+96=14^2$,而 $100\in A$,所以 $96\notin A$,进而 $73\in A$.

但 $8+73=81$ 为平方数,矛盾. 所以 $p\leqslant 50$.

另一方面,我们可构造合乎条件的 A,使 $|A|=50$.

从上述不等式等号成立的条件入手，可在每个二元子集中取一个元素属于 A.

为了使构造简单，可考虑每个二元子集中都取其最大数或最小数. 但取最小数是不行的，因为 $1+3=4$ 为平方数，从而每个二元子集中都取其最大数，最后再取 98，得到如下合乎要求的集合：

$$A=\{5,6,7,8\}\cup\{13,14,15,16\}\cup\{25,26,\cdots,32\}\cup\{41,42,\cdots,48\}\cup\{61,62,\cdots,72\}\cup\{85,86,\cdots,96\}\cup\{99,98\},$$

此时 $|A|=50$.

综上所述，p 的最大值为 50.

本题属于抽屉原理中的一类典型问题，我们称为 $(n;p,q)$ 型问题，它可分为两种类型.

第一类 $(n;p,q)$ 型问题：给定正整数 n,q，设 A 是含有 n 个元素的集合，在 A 中任取 p 个元素，都存在其中 q 个元素具有某种性质 U，求 p 的最小值.

该类问题的解题思路是：适当构造抽屉，使同一抽屉中的任何 q 个元素都具有性质 U. 然后证明 $p=p_0$ 合乎条件：任取 A 中 p_0 个元素，都有 q 个元素属于同一抽屉. 最后证明 $p<p_0$ 时，p 不合乎条件，也即构造 A 的 p 元子集，使其中任何 q 个元素都不具有性质 U.

第一类 $(n;p,q)$ 型问题的等价表述是：给定正整数 n,q，设 A 是含有 n 个元素的集合，若 A 中存在 p 个元素，使其中任何 q 个元素都具有某种性质 U'，求 p 的最大值.

该类问题的解题思路是：适当构造抽屉，使同一抽屉中的任何 q 个元素都不具有性质 U'. 然后证明 $p\geqslant p_0$ 时，任取 A 中 p 个元素，都有 q 个元素属于同一抽屉，从而 $p\geqslant p_0$ 时，p 不合乎条件，由此得 $p\leqslant p_0$. 最后证明 $p=p_0$ 时，p 合乎条件，即构造 A 的 p 元子集，使其中任何 q 个元素都不具有性质 U'.

第二类$(n;p,q)$型问题:给定正整数 p,q,设 A 是含有 n 个元素的集合,在 A 中任取 p 个元素,都存在其中 q 个元素具有某种性质 U,求 n 的最大值.

该类问题的解题思路是:适当构造抽屉,使同一抽屉中的任何 q 个元素都具有性质 U.然后证明 $n=n_0$合乎条件:在 n_0个元素中任取 p 个元素,都有 q 个元素属于同一抽屉.最后证明 $n>n_0$时,n 不合乎条件,即构造 n 个元素的 p 元子集,使其中任何 q 个元素都不具有性质 U.

第二类$(n;p,q)$型问题的等价表述是:给定正整数 p,q,设 A 是含有 n 个元素的集合,若 A 中存在 p 个元素,使其中 q 个元素都具有某种性质 U',求 n 的最小值.

该类问题的解题思路是:适当构造抽屉,使同一抽屉中的任何 q 个元素都不具有性质 U'.然后证明 $n<n_0$时,任取 A 中 p 个元素,都有 q 个元素属于同一抽屉,从而 $n<n_0$时,n 不合乎条件,由此得 $n\geqslant n_0$.最后证明 $n=n_0$时,n 合乎条件,即构造 n_0个元素的 p 元子集,使其中任何 q 个元素都具有性质 U'.

显然,例 1 属于第一类$(n;p,q)$型问题的等价形式,我们再看一个这样的例子.

例 2 设 A,B 是$\{1,2,3,\cdots,100\}$的两个子集,满足:

(1) $|A|=|B|$;

(2) $A\cap B=\varnothing$;

(3) 对任何 $n\in A$,有 $2n+2\in B$.

求$|A\cup B|$的最大值,其中$|X|$表示集合 X 中元素的个数.(2007年全国高中数学联赛试题)

分析与解 由于 $A\cap B=\varnothing$,所以$|A\cup B|=|A|+|B|$.又$|A|=|B|$,所以$|A\cup B|=|A|+|B|=2|A|$,由此可见,只需求$|A|$的

最大值.

因为对任何 $n\in A$,有 $2n+2\in B$,所以 $2n+2\leqslant 100$,即 $n\leqslant 49$,所以 A 是 $\{1,2,\cdots,49\}$ 的子集.

此外,我们可从另一种角度理解条件:对任何 $n\in A$,有 $2n+2\in B$,从而对任何 $n\in A$,有 $2n+2\notin A$.

我们来构造这样的抽屉,使每个抽屉至多含有 A 中一个元素,这只需将 $n,2n+2$ 归入同一抽屉即可.

于是,将 $\{1,2,\cdots,49\}$ 划分为如下 $12+4+13+4=33$ 个子集:

$$A_i=\{2i-1,4i\}\quad(1\leqslant i\leqslant 12),$$

$$B_j=\{2j,4j+2\}\quad(j=1,5,7,9),$$

$$C_k=\{2k-1\}\quad(13\leqslant k\leqslant 25),$$

$$D_t=\{2t\}\quad(t=13,17,21,23).$$

若 $|A|\geqslant 34$,则 A 中 34 个元素都属于上述 33 个子集.由抽屉原理(简单形式),必有一个子集含有其中两个元素,而这两个元素具有 $n,2n+2$ 的形式,矛盾.所以 $|A|\leqslant 33$,从而 $|A\cup B|=|A|+|B|=2|A|\leqslant 66$.

另一方面,从上述不等式等号成立的条件入手,在每个子集中取一个元素属于 A.可令

$$A=\{2i-1\mid 1\leqslant i\leqslant 25\}\cup\{2,10,14,18,26,34,42,46\},$$

$$B=\{2n+2\mid n\in A\},$$

则 A,B 满足题设条件,此时 $|A\cup B|=66$.

综上所述,$|A\cup B|$ 的最大值为 66.

下面我们看一个第二类 $(n;p,q)$ 型问题.

例 3　设 $X=\{1,2,3,\cdots,n\}$.若对 X 的任意一个含十个元素的子集 A,都存在 A 中的三个元素两两互质,求 n 的最大值.(原创题)

分析与解　当 $n\geqslant 16$ 时,取 X 的一个十元子集:$A=\{2,4,6,8,$

10,12,14}$\cup${3,9},对 A 中任何三个元素,将其归入两个集合{2,4,6,8,10,12,14},{3,9}.由抽屉原理(简单形式),必有一个子集含有其中两个元素,这两个元素不互质,从而 n 不合乎条件,所以 $n\leqslant 15$.

当 $n=15$ 时,$X=\{1,2,\cdots,15\}$,将 X 划分为如下三个子集:

$$X_0=\{6,8,10,12,14\},$$

$$X_1=\{4,9,15\},$$

$$X_2=\{1,2,3,5,7,11,13\}.$$

对 X 的任意一个十元子集 A,其中至多含有 X_0 的五个元素.将其余至少五个元素归入另外两个集合 X_1,X_2,必有其中一个集合含有三个元素,这三个元素两两互质,所以 $n=15$ 合乎条件.

综上所述,n 的最大值为 15.

注　本题的后一部分,我们用到了抽屉原理的一般形式.下面再举几个利用抽屉原理简单形式的例子.

例 4　n 阶简单图 G 中不存在 K_3,求 $\|G\|$ 的最大值.

分析与解　这是一个大家熟悉的图论问题,常用的方法是数学归纳法,这里介绍一个简单的证法.

先构造一个不存在 K_3 的 n 阶简单图 G,使 $\|G\|=\left[\dfrac{n^2}{4}\right]$.

关键是如何利用条件"不存在 K_3",这等价于任何 3 个点中至多可连两条边.从反面看,它又等价于任何 3 个点中都有 2 点不相连,这恰好可以利用抽屉原理:"任何 3 个点中必有 2 个在同一抽屉内".

由此可见,我们只需构造 2 个抽屉,且同一抽屉中的点不相连.而为了使边数尽可能多,让不在同一抽屉中的点都相连,于是,将所有顶点分为两个集合:

$$P=\{A_1,A_2,\cdots,A_s\},$$

$$Q=\{B_1,B_2,\cdots,B_t\}\quad(s+t=n),$$

其中 P 中的点互不相连,Q 中的点互不相连,而 P 与 Q 中的点两两相

连,则得到一个二部分完全图.

此时,图中的边数

$$\| G \| = st \leqslant \frac{n^2}{4}.$$

为了使等号尽可能成立,让 s,t 尽可能接近即可.

当 n 为偶数时,取二部分完全图 $K_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}}$,有 $\| G \| = \left[\frac{n^2}{4}\right]$;

当 n 为奇数时,取二部分完全图 $K_{\frac{n+1}{2},\frac{n-1}{2}}$,有 $\| G \| = \left[\frac{n^2}{4}\right]$.

上述两种情况可以统一为:取 G 为 $K_{\left[\frac{n+1}{2}\right],\left[\frac{n}{2}\right]}$,则 G 有 $\left[\frac{n+1}{2}\right]\cdot\left[\frac{n}{2}\right]=\left[\frac{n^2}{4}\right]$条边(图 1.1).

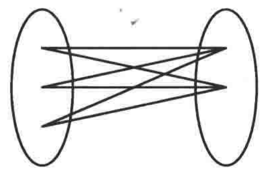


图 1.1

对 G 中任何 3 个点,必有 2 个点属于两部分中的同一部分,从而这两个点不相连,所以无三角形,G 合乎条件.

另一方面,我们证明 $\| G \| \leqslant \left[\frac{n^2}{4}\right]$.

为此,任取一个点 A.设与 A 相邻的点的集合为 $M=\{A_1,A_2,\cdots,A_s\}$,与 A 不相邻的点的集合为 $N=\{B_1,B_2,\cdots,B_t\}(s+t=n-1)$.

由于 G 中无三角形,所以 M 中没有边(图 1.2).于是,所有边都是由顶点 A 和顶点 $B_1,B_2,\cdots,B_t$ 引出的.所以

$$\| G \| \leqslant d(A)+d(B_1)+d(B_2)+\cdots+d(B_t).\qquad ①$$

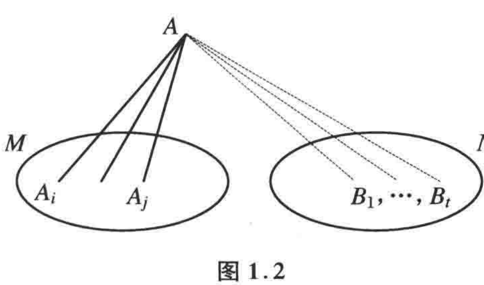


图 1.2

我们期望 $\|G\| \leqslant C$(常数),而式①的右边含有多个变量,为了减少变量,想到"统一缩放"的技巧,期望 $d(B_1), d(B_2), \cdots, d(B_t) \leqslant d(A)$,此式成立的充分条件是"$A$ 是度最大者",于是需要优化假设.设最初选取的顶点 A 是度最大者,这样

$$\begin{aligned}\|G\| &\leqslant d(A)+d(B_1)+d(B_2)+\cdots+d(B_t)\\ &\leqslant s+s+\cdots+s=(t+1)s\\ &\leqslant \left(\frac{s+r+1}{2}\right)^2=\frac{n^2}{4}.\end{aligned}$$

又 $\|G\| \in \mathbf{Z}$,所以 $\|G\| \leqslant \left[\frac{n^2}{4}\right]$.

综上所述,$\|G\|_{\max}=\left[\frac{n^2}{4}\right]$.

有些较为复杂的问题,需要对题给的元素进行适当的处理,才能利用抽屉原理.我们看下面的一个例子.

例 5　在正 $4n$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{4n}$ 的各顶点上随意填上 $1,2,3,\cdots,n$ 中的一个数,求证一定存在四个顶点满足如下条件:

(1) 这四个顶点构成的四边形是矩形;

(2) 此四边形相对两顶点所填数之和相等.

分析与证明　我们的目标是找到"四个顶点",它们满足两个条件:(1) 构成矩形;(2) 填数之和相等.

这似乎不能利用抽屉原理的简单形式,因为目标不是找"2 个元素"具有某种性质.其实不然,尽管我们要找的是四个点,但并非任意四点都合乎要求,而是要满足特定的条件:构成矩形.

怎样的四点才"构成矩形"呢?注意到矩形的特征:四个内角都是直角.如何保证四点构成的四边形的内角都是直角?

注意到题中的点不是任意的,其位置非常有规律:它们都在一个圆周上(正 $4n$ 边形的外接圆),从而四边形的内角都是圆周角,而直径所对的圆周角为直角,由此可见,要使四点"构成矩形",则四点中相对

两个点的连线为正 $4n$ 边形的外接圆的直径.于是,构成矩形的四个顶点应划分为两组,每组两个点关于正 $4n$ 边形的中心对称.

由此可见,我们不能简单地以题给的点为元素使用抽屉原理,而是要先将 $4n$ 个点分为 $2n$ 组,每组 2 个点关于正 $4n$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{4n}$ 的中心对称,我们称每一个组为一个对子,则共有 $2n$ 个对子 (A_i, A_{i+2n}),其中 $i=1,2,\cdots,2n$.

显然,任意两个对子包含的四个点都构成一个矩形,因为其对角线平分且相等(都为直径).

设某个对子的两个顶点上所填的数分别为 x, y,则填数之和为 $x+y$.因为 $1\leqslant x, y\leqslant n$,所以 $2\leqslant x+y\leqslant 2n$.于是对子的填数之和只可能为 $2,3,\cdots,2n$,共有 $2n-1$ 种可能.

因为 $2n>2n-1$,由抽屉原理(简单形式),其中必有两个对子,其填数之和相等,于是这两个对子包含的四个点都构成一个矩形,证毕.

从上述例子可以看出,选择怎样的元素归入抽屉是很有讲究的,究竟应如何选择元素才能顺利完成解题,我们将在第 2 章中详细讨论.

例 6　在正方体的每个顶点处写一个非负实数,这些实数的和为 1.甲选择其中一个面,乙再选择另一个面,最后甲选取第三个面.规定选取的三个面中任何两个面必须互不平行.求证:甲可以使选取的三个面的公共顶点处的数不大于 $\frac{1}{6}$.

分析与证明　设正方体为 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$,为叙述问题方便,定义不大于 $\frac{1}{6}$ 的数为“好数”.

显然,甲取的面“好数”越多越好,那么最坏情形中都能找到一个面含有几个好数?

首先看至少共有多少个好数.

由于六个数的和等于1,所以其中至少有三个好数.否则,至少有六个坏数,其和大于1,矛盾.

甲取好数最多的面,则由抽屉原理,该面中至少有两个好数.

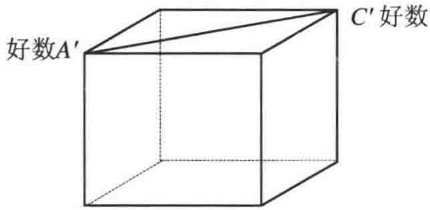


图 1.3

这两个好数能保证甲获胜吗?——还须看好数所在的位置.发现一个充分条件是:两个好数在一个面对角线上(图1.3).

实际上,甲取定这个面后,乙有四种取面的方法——取周围四个面之一,该面必过对角线的一个端点,从而乙取的面必过前面取的面中的一个好数!这样,甲取第三个面过该好数即可.

现在的问题是,如何找到两个好数在同一面对角线上.可以此为标准进行分类讨论.

如果该面有两个好数在其同一条对角线上,则结论成立.

如果该面恰有两个好数且它们在某条边上,不妨设 A,B 为好数,则 A',B',C',D' 中至少有一个为好数时,同样有两个好数在同一个面的某条对角线上,结论成立.

注　如果我们对找到的三个好数再使用一次抽屉原理,则得到如下巧妙的证法.将正方体 $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ 的八个顶点分为两组:$\{B',A,C,D'\}$,$\{A',B,D,C'\}$(图 1.4).将至少三个好数归入这两组,必有两个好数属于同一组,这两个好数在一个面对角线的端点处,结论成立.

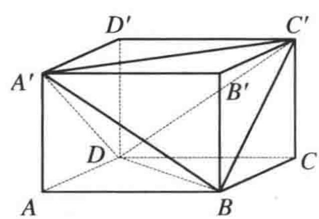


图 1.4

值得指出的是,有些问题表面上看可以利用抽屉原理的简单形式