高等数学

GAODENG SHUXUE

高玉芹 | 主编

山东人民出版社
国家一级出版社 全国百佳图书出版单位

高等数学

GAODENG SHUXUE

高玉芹 | 主编

王 艳 吕铭潇 谢 香 | 副主编

山东人民出版社

国家一级出版社 全国百佳图书出版单位

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 / 高玉芹主编. -- 济南 ：山东人民出版社，2016.9
ISBN 978-7-209-09745-1

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①高… Ⅲ. ①高等数学 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第213741号

高等数学
高玉芹　主编

主管部门　山东出版传媒股份有限公司
出版发行　山东人民出版社
社　　址　济南市胜利大街39号
邮　　编　250001
电　　话　总编室（0531）82098914
　　　　　市场部（0531）82098027
网　　址　http://www.sd-book.com.cn
印　　装　日照报业印刷有限公司
经　　销　新华书店

规　　格　16开（184mm×260mm）
印　　张　18
字　　数　300千字
版　　次　2016年9月第1版
印　　次　2016年9月第1次
印　　数　1-1000
ISBN 978-7-209-09745-1
定　　价　36.00元

前言

为了适应高职高专教育的需要，培养和造就更多的实用型、复合型、创造型人才，根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学的基本要求》，在认真总结高职高专数学教学改革的基础上，结合对国际国内同类教材的发展趋势的分析，编写了本教材。

本教材力求贯彻“以应用为目的，必须够用为度”的原则，力求体现基础性、实用性和发展性三方面的和谐统一。具体反映在：第一，尊重科学，但不恪守学科性，注重教材自身知识体系的系统性和逻辑性。对难度较大的基础理论部分，注意讲清概念，减少理论证明，注重学生分析问题、解决问题能力的培养。第二，重视理论联系实际，加强与实际应用联系较多的基础知识的讲解。第三，着重加强数学思想的培养，即学习怎样用数学思想去解决生活、生产中的实际问题。

本教材着重强化了微积分理论部分的教学，在教材内容的取舍上充分体现了高等数学在职业教育教学中为专业教学服务这一根本宗旨。本教材可供教师在教学中根据专业教学的实际需要进行灵活选择，同时也兼顾了各专业专升本教学的需要。教材在编写时注意数学的应用，强化了将实际问题转化成数学问题的过程，这也是高职高专数学基础课教学中的一个创新。然而，限于篇幅，本教材难以囊括各行各业的实际问题，因为，教师们在教学时应挖掘与本专业相关的问题加以补充。

本教材内容包括一元函数微积分、常微分方程、空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数等几个部分。每节配有习题，每章配有复习题以便于学生巩固基础知识，提高基本技能。本教材是高职高专理工类、经济类专业的通用教材，也可作为成人高等学校及本科院校举办的二级职业技术学院各专业高等数学教材。

对本教材由山东服装职业学院高玉芹担任主编，山东服装职业学院王艳、吕铭潇、谢香担任副主编，高玉芹负责审稿、统稿。具体章节分配如下：高玉芹编写了第1、3、6、7章；王艳编写了第2、4、5章；吕铭潇编写了第8、9章；谢香编写了第10章及附录。

对本教材的编写，尽管我们做了很大的努力，但由于水平有限，加之教学改革中的一些问题还有待于进一步探索，不当之处恳请批评指正。同时，向支持本教材编写和出版的各界同仁表示衷心感谢。

编　者

2016.7

目 录

第 1 章 函数、极限与连续 …………………………………… (1)

1.1 初等函数 …………………………………… (1)

1.2 函数的极限 …………………………………… (10)

1.3 极限的运算 …………………………………… (16)

1.4 无穷小量与无穷大量 …………………………………… (20)

1.5 函数的连续性 …………………………………… (24)

第 2 章 导数与微分 …………………………………… (31)

2.1 导数的概念 …………………………………… (31)

2.2 导数的四则运算 …………………………………… (38)

2.3 初等函数的求导 …………………………………… (41)

2.4 高阶导数 …………………………………… (47)

2.5 隐函数及参数方程所确定的函数的导数 …………………………………… (49)

2.6 微分及其运算 …………………………………… (53)

第 3 章 微分学的应用 …………………………………… (62)

3.1 微分中值定理 …………………………………… (62)

3.2 洛必达法则 …………………………………… (64)

3.3 函数的单调性与极值 …………………………………… (67)

3.4 曲线的凹凸性与最大值最小值 …………………………………… (73)

3.5 函数图形的描绘 …………………………………… (78)

第 4 章 不定积分 …………………………………… (84)

4.1 不定积分的概念 …………………………………… (84)

4.2 积分的基本公式和法则 …………………………………… (86)

4.3 换元积分法 …………………………………… (90)

4.4 分部积分法 …………………………………… (97)

第5章　定积分及其应用 …… (102)
5.1　定积分的概念与性质 …… (102)
5.2　微积分基本公式 …… (109)
5.3　定积分的换元法和分部积分法 …… (114)
5.4　广义积分 …… (117)
5.5　定积分的应用 …… (121)
第6章　常微分方程 …… (133)
6.1　微分方程的概念 …… (133)
6.2　一阶微分方程 …… (136)
6.3　可降阶的高阶微分方程 …… (141)
6.4　二阶常系数线性微分方程 …… (143)
第7章　空间解析几何 …… (155)
7.1　空间直角坐标系与向量的运算 …… (155)
7.2　向量的数量积与向量积 …… (162)
7.3　空间平面的方程 …… (168)
7.4　空间直线的方程 …… (172)
7.5　空间曲面与曲线 …… (176)
第8章　多元函数微分学 …… (183)
8.1　多元函数的概念 …… (183)
8.2　偏导数 …… (189)
8.3　全微分 …… (192)
8.4　多元复合函数、隐函数的偏导数 …… (196)
8.5　多元函数的极值 …… (201)
8.6　偏导数的几何应用 …… (205)
第9章　多元函数的积分学 …… (211)
9.1　二重积分的概念和性质 …… (211)
9.2　二重积分的计算(一) …… (214)
9.3　二重积分的计算(二) …… (218)
9.4　二重积分的应用 …… (220)
第10章　无穷级数 …… (224)
10.1　无穷级数的概念 …… (224)
10.2　数项级数审敛法 …… (229)
10.3　幂级数 …… (233)
10.4　函数的幂级数展开 …… (238)
附　录 …… (247)
习题参考答案 …… (259)

第1章

函数、极限与连续

导 学

文艺复兴末期的16世纪,西方社会处于大变革时期,为适应生产实践的需要,自然科学领域中的力学、天文学等开始把运动作为研究的主要对象,对各种变化过程和过程中量与量之间的依赖关系进行研究,这就产生了函数的概念.函数是刻画运动变化过程中变量相依关系的抽象数学模型.

自法国数学家笛卡尔创立坐标几何后,变量和函数的概念便进入了数学,从而改变了数学发展的历史进程,使得数学从常量数学转入了变量数学,即微积分.微积分是"高等数学"课程的主要内容,它的研究对象是函数(特别是连续函数),研究工具是极限.本章将介绍函数、极限和连续等重要概念及其性质.

1.1 初等函数

1.1.1 函数的概念

1. 函数的定义

设 D 是一个数集,如果对于 D 中的每一个数 x,依照一定的对应关系 f,都有唯一确定的数值 y 与之对应,那么 y 就叫做定义在数集 D 上的 x 的**函数**,记作 $y=f(x)$. x 叫做函数的**自变量**,数集 D 叫做函数的**定义域**.函数 y 的取值范围 M 叫做函数的**值域**.

如果对于每一个 $x\in D$,都有唯一的 $y\in M$ 与它对应,那么这种函数就叫单值函数,否则就是多值函数.今后若无特殊说明,所研究的函数都是指单值函数.

由函数定义可知,对应关系和定义域构成函数的两个要素.

2. 函数的定义域

在实际问题中,根据所考察问题的实际意义来确定其定义域.对于不具实际意义的抽象函数,其定义域是使得函数有意义的全体自变量的集合.常见的有:

(1) 分式函数中,分母不能为零;

(2) 根式函数中,负数不能开偶次方;

(3) 对数函数中,真数大于零;

(4) 三角函数和反三角函数中,要符合它们的定义域;

(5) 在含有多种式子的函数中,应取各部分定义域的交集.

例 1 求下列函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{x+2}+\frac{1}{4-x^2}$; (2) $y=\lg\frac{x+1}{x-1}$.

解 (1) 要使函数 $y=\sqrt{x+2}+\frac{1}{4-x^2}$有意义,

必须有$\begin{cases}x+2\geqslant 0,\\4-x^2\neq 0.\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x\geqslant -2,\\x\neq \pm 2.\end{cases}$

所以函数 $y=\sqrt{x+2}+\frac{1}{4-x^2}$的定义域为$(-2,2)\cup(2,+\infty)$.

(2) 要使函数 $y=\lg\frac{x+1}{x-1}$有意义,

必须有$\frac{x+1}{x-1}>0$,于是有$\begin{cases}x+1<0,\\x-1<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x+1>0,\\x-1>0.\end{cases}$

解得 $x<-1$ 或 $x>1$.

所以函数 $y=\lg\frac{x+1}{x-1}$的定义域为$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

3. 反函数

在研究函数的同时,有时函数和自变量的地位会相互转换,于是就出现了反函数的概念.

例如,在函数 $y=\frac{x+1}{2}$中,定义域和值域都是 $\mathbf{R}$,按照 x 和 y 的对应关系,任意给出一个 $y\in\mathbf{R}$,都有唯一确定的 $x=2y-1$ 与之对应.

一般地,设函数 $y=f(x)$,定义域为 D,值域为 M. 如果对于 M 中的每一个 y 值,都可由 $y=f(x)$确定唯一的 x 值与之对应,这样就确定一个以 y 为自变量的函数 x,该函数称为函数 $y=f(x)$的**反函数**,记做 $x=f^{-1}(y)$. 显然,该函数 $x=f^{-1}(y)$的定义域为 M,值域为 D.

习惯上常用 x 表示自变量,y 表示函数,故常把 $y=f(x)$的反函数记为 $y=f^{-1}(x)$. 若把函数 $y=f(x)$与其反函数 $y=f^{-1}(x)$的图形画在同一个平面直角坐标系内,则这两个图形关于直线 $y=x$ 对称.

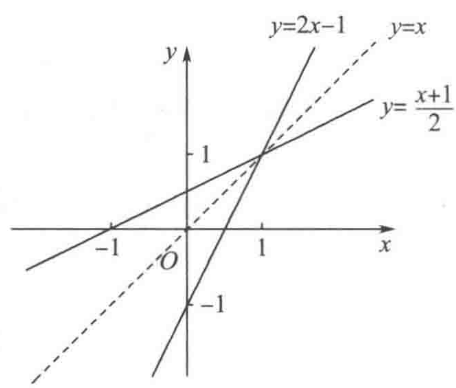

图 1-1

因此,函数 $x=2y-1$ 是函数 $y=\frac{x+1}{2}$的反函数,其定义域为 $\mathbf{R}$,值域为 $\mathbf{R}$. 将函数改为 y,自变量改为 x,则函

数 $y=\frac{x+1}{2}$ 的反函数为 $y=2x-1$(图1-1).

例2　求 $y=x^3+2$ 的反函数.

解　因为 $y=x^3+2$,所以 $x=\sqrt[3]{y-2}$.

因此,函数 $y=x^3+2$ 的反函数为 $y=\sqrt[3]{x-2}$.

4. 分段函数

在自然科学及工程技术中,用公式表示函数时,经常会遇到一个函数在不同的范围内用不同的式子表示的情况. 如函数

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\ (x\geqslant 0),\\ -x\ (x<0).\end{cases}$$

是定义在区间$(-\infty,+\infty)$内的一个函数. 当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=\sqrt{x}$;当 $x<0$ 时,$f(x)=-x$.

在不同的区间内用不同的式子来表示的函数叫**分段函数**.

求分段函数在某一点处的函数值时,应把自变量的值代入相应取值范围的表达式中进行计算. 如在上面的分段函数中,$f(4)=\sqrt{4}=2$; $f(-4)=-(-4)=4$.

5. 函数的几种特性

(1) 奇偶性

如果函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,且对于任意的 $x\in D$,都有 $f(-x)=-f(x)$,那么 $y=f(x)$ 叫做**奇函数**;如果函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,且对于任意的 $x\in D$,都有 $f(-x)=f(x)$,那么 $y=f(x)$ 叫做**偶函数**;如果函数 $y=f(x)$ 既不是奇函数也不是偶函数,则称 $y=f(x)$ 为**非奇非偶函数**.

奇函数的图像关于原点对称,如图1-2;偶函数的图像关于 y 轴对称,如图1-3.

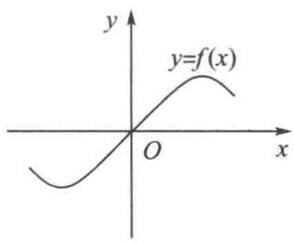

图1-2

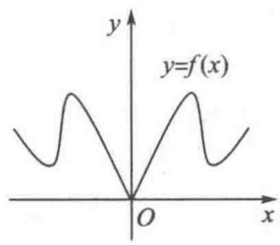

图1-3

例3　判断下列函数的奇偶性:

(1) $f(x)=x^2\cos x$;(2) $f(x)=x+\frac{1}{x}$;(3) $f(x)=x^2-x$.

解　(1) 定义域为 $\mathbf{R}$,关于原点对称. 因为 $f(-x)=(-x)^2\cos(-x)=x^2\cos x=f(x)$,所以 $f(x)=x^2\cos x$ 是偶函数.

(2) 定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,关于原点对称. 因为 $f(-x)=(-x)+\left(-\frac{1}{x}\right)=-x$

$-\frac{1}{x}=-(x+\frac{1}{x})=-f(x)$,所以$f(x)=x+\frac{1}{x}$是奇函数.

(3) 定义域为 $\mathbf{R}$,关于原点对称. 因为$f(-x)=(-x)^2-(-x)=x^2+x$,既不与$f(x)$相等,也不与$-f(x)$相等,所以$f(x)=x^2-x$是非奇非偶函数.

(2) 单调性

如果函数$f(x)$在区间$(a,\ b)$内随着x的增大而增大,即对于$(a,\ b)$内任意两点x_1与x_2,当$x_1<x_2$时,有$f(x_1)<f(x_2)$,那么称函数$f(x)$在区间$(a,\ b)$内是**单调增加**的,区间$(a,\ b)$叫做函数$f(x)$的**单调增加区间**.

如果函数$f(x)$在区间$(a,\ b)$内随着x的增大而减小,即对于$(a,\ b)$内任意两点x_1与x_2,当$x_1<x_2$时,有$f(x_1)>f(x_2)$,那么称函数$f(x)$在区间$(a,\ b)$内是**单调减少**的,区间$(a,\ b)$叫做函数$f(x)$的**单调减少区间**.

显然,单调增加函数的图像沿x轴正向是逐渐上升的(如图 1-4 所示);单调减少函数的图像沿x轴正向是逐渐下降的(如图 1-5 所示).

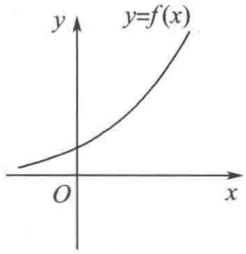

图 1-4

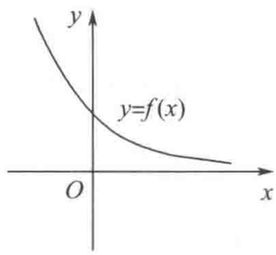

图 1-5

在某个区间上单调增加或单调减少的函数,称为这区间上的**单调函数**,这个区间称为这个函数的**单调区间**.

例如,指数函数$y=e^x$在其定义域$\mathbf{R}$内是单调增加的. 而幂函数$y=x^2$在$(0,\ +\infty)$内是单调增加的,在$(-\infty,\ 0)$内是单调减少的,所以函数$y=x^2$在$(-\infty,\ +\infty)$内不是单调函数.

(3) 周期性

对于函数$f(x)$,如果存在一个非零常数T,使得对于其定义域内的每一个x,都有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立,则称$f(x)$是**周期函数**,T称为其**周期**.

显然,如果T是$f(x)$的周期,则nT(n是整数)均为其周期. 一般提到的周期均指最小正周期.

我们常见的三角函数$y=\sin x$,$y=\cos x$都是以2π为周期;$y=\tan x$,$y=\cot x$都是以π为周期.

(4) 有界性

设函数$f(x)$在区间(a,b)内有定义,如果存在一个正数M,使得对于任意$x\in(a,b)$,恒有$|f(x)|\leqslant M$,那么称$f(x)$在(a,b)内**有界**;如果不存在这样的数M,那么称$f(x)$在(a,b)内**无界**.

例如，函数 $y=\sin x$，存在正数 $M=1$，使得对于任意的 $x\in\mathbf{R}$，均有 $|\sin x|\leqslant 1$，所以函数 $y=\sin x$ 在其定义域 $\mathbf{R}$ 内是有界的.

1.1.2　基本初等函数

我们学过的幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为实数）、指数函数 $y=a^{x}$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）、对数函数 $y=\log_{a}x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**.

1. 幂函数 $y=x^{\alpha}$（α 为实数）

（1）当 $\alpha>0$ 时，函数经过两定点 $(0,0)$ 和 $(1,1)$，图像在第 Ⅰ 象限内单调增加且无界（如图 1－6(1)）.

（2）当 $\alpha<0$ 时，函数经过定点 $(1,1)$，图像在第Ⅰ象限内单调减少且无界（如图 1－6(2)）.

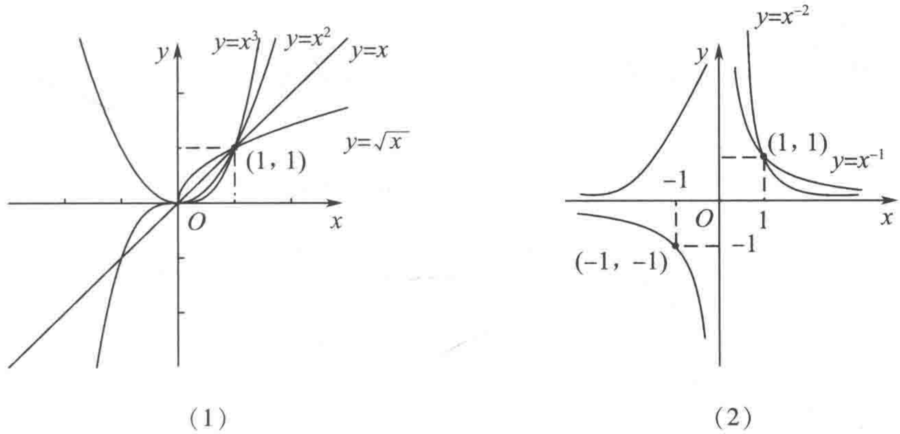

图 1－6

2. 指数函数 $y=a^{x}$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）

它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$，图像经过定点 $(0,1)$.

（1）当 $0<a<1$ 时，函数单调递减且无界（如图 1－7(1)）.

（2）当 $a>1$ 时，函数单调递增且无界（如图 1－7(2)）.

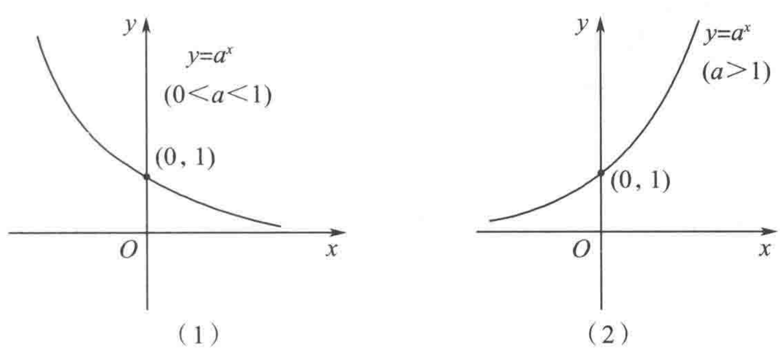

图 1－7

3. 对数函数 $y=\log_{a}x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）

它的定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，图像经过定点 $(1,0)$.

（1）当 $0<a<1$ 时，函数单调递减且无界（如图 1－8(1)）.

(2) 当 $a>1$ 时,函数单调递增且无界(如图 1-8(2)).

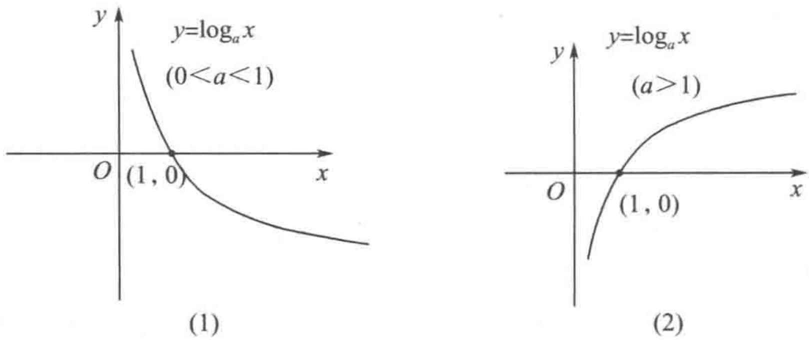

图 1-8

4. 三角函数

(1) 正弦函数 $y=\sin x$

定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[-1,1]$,是奇函数,周期为 2π 的周期函数,有界(如图 1-9).

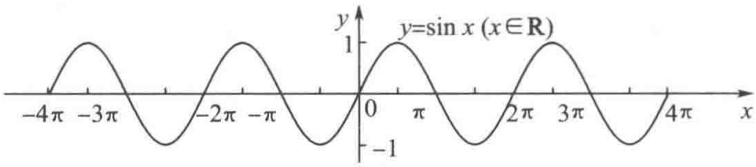

图 1-9

(2) 余弦函数 $y=\cos x$

定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$[-1,1]$,是偶函数,周期为 2π 的周期函数,有界(如图 1-10).

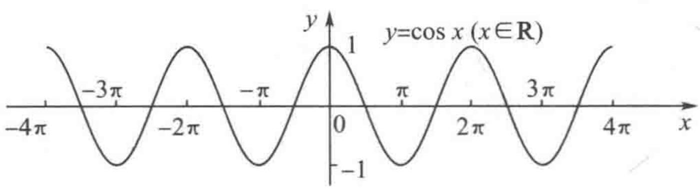

图 1-10

(3) 正切函数 $y=\tan x$

定义域为$\left\{x \,\middle|\, x\in\mathbf{R}, x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}\right\}$,值域为$(-\infty,+\infty)$,是奇函数,周期为 π 的周期函数,无界(如图 1-11).

(4) 余切函数 $y=\cot x$

定义域为$\{x \mid x\in\mathbf{R}, x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$,值域为$(-\infty,+\infty)$,是奇函数,周期为 π 的周期函数,无界(如图 1-12).

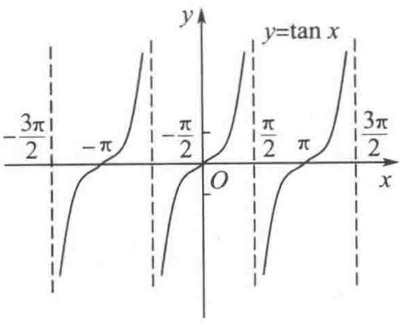

图 1－11

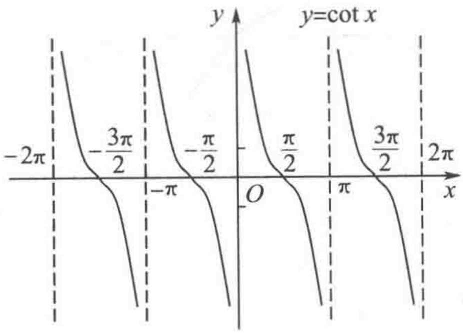

图 1－12

5. 反三角函数

(1) 反正弦函数 $y=\arcsin x$,

定义域为$[-1,1]$,值域为$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$,奇函数,单调增加,有界(图 1－13).

(2) 反余弦函数 $y=\arccos x$,

定义域为$[-1,1]$,值域为$[0,\pi]$,非奇非偶函数,单调减少,有界(图 1－14).

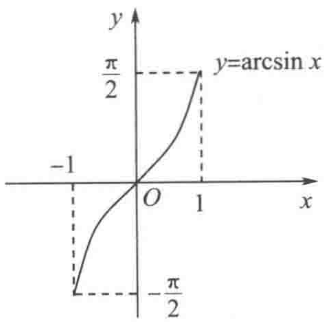

图 1－13

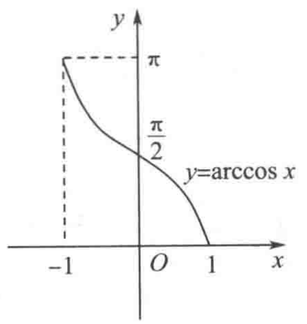

图 1－14

(3) 反正切函数 $y=\arctan x$,

定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,奇函数,单调增加,且有界(图 1－15).

(4) 反余切函数,

定义域为$(-\infty,+\infty)$,值域为$(0,\pi)$,非奇非偶函数,单调减少,有界(图 1－16).

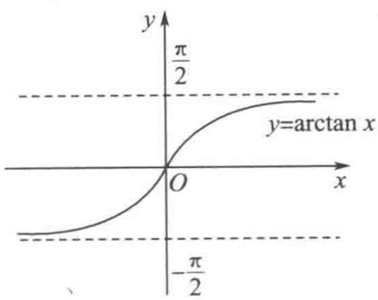

图 1－15

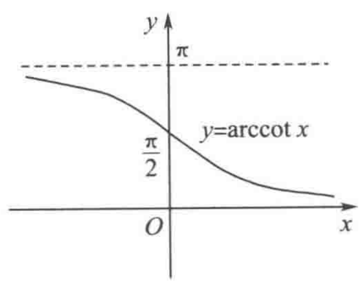

图 1－16

1.1.3 复合函数、初等函数

1. 复合函数

在同一问题中,两个变量的联系有时不是直接的,而是通过另一变量间接联系起来的.

一般地,设 $y=f(u)$ 是 u 的函数,$u=\varphi(x)$ 是 x 的函数,如果 $u=\varphi(x)$ 值域与 $y=f(u)$ 定义域的交集非空,则 y 通过中间变量 u 成为 x 的函数,我们称 y 为 x 的**复合函数**. 记作

$y=f[\varphi(x)]$. 其中 u 称为**中间变量**.

例 4 指出下列函数的复合过程和定义域:

(1) $y=\log_a(1+x^2)$;(2) $y=\sin^2 x$.

解 (1) 函数 $y=\log_a(1+x^2)$ 是由 $y=\log_a u$ 和 $u=1+x^2$ 复合而成. 由于任意的 x 对应的 $u=1+x^2>0$,使得 $y=\log_a u$ 有意义,所以它的定义域为 $\mathbf{R}$.

(2) 函数 $y=\sin^2 x$ 是由 $y=u^2$ 和 $u=\sin x$ 复合而成,其定义域为 $\mathbf{R}$.

例 5 已知 $y=\lg u$, $u=\sin v$, $v=x^2$,将 y 表示成 x 的复合函数.

解 $y=\lg u=\lg\sin v=\lg\sin x^2$.

2. 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合运算构成的,并且能用一个解析式表示的函数叫做**初等函数**.

例如:$y=\dfrac{1}{x}+\log_a(2+x^2)$, $y=3-\sqrt{x}$, $y=x\ln x$ 等都是初等函数.

1.1.4 建立函数关系举例

为了解决应用问题,先要给问题建立数学模型,即建立函数关系. 为此需要明确问题中的因变量与自变量,再根据题意建立等式,从而得出函数关系,再确定函数的定义域. 应用问题的定义域,除使函数的解析式有意义外,还要考虑变量在实际问题中的含义. 下面就一些简单实际问题,说明建立函数关系的过程.

例 6 某市场对西红柿的批发价格如下规定:批发量不超过 50 kg 为 1 元/kg;批发量不超过 100 kg 且超过 50 kg 的部分为 0.8 元/kg;批发量超过 100 kg 的部分为 0.5 元/kg. 设批发量为 x kg,总费用为 y 元,试建立 y 与 x 的函数关系.

解 由于批发量的多少决定批发价格,所以,建立函数关系应按批发量分段表示. 因此有

$$y=\begin{cases} x\ (0\leqslant x\leqslant 50), \\ 50+0.8(x-50)\ (50<x\leqslant 100), \\ 50+0.8(100-50)+0.5(x-100)\ (x>100). \end{cases}$$

即

$$y=\begin{cases} x\ (0\leqslant x\leqslant 50), \\ 0.8x+10\ (50<x\leqslant 100), \\ 0.5x+40\ (x>100). \end{cases}$$

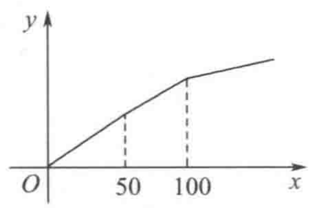

图 1-17

其图像为图 1－17.

例7 一物体做直线运动,已知所受阻力f的大小与其运动速度v成正比,方向相反.设物体的速度为100米/秒时,所受阻力为1.98牛顿,试建立f与v的函数关系.

解 因为f与v成正比,方向相反,所以可设$f=kv$.由题设知,当$v=100$时,$f=1.98$,于是

$$1.98=100k,$$

得

$$k=1.98\times10^{-2},$$

因此,有函数关系

$$f=1.98\times10^{-2}v.$$

例8 公共电话收费问题.

在公共电话亭打市内电话,每3 min收费0.4元,不足3 min按3 min收费,求电话收费与用时t的函数关系.

解 为了表达方便,引入取整函数的记号:函数$y=[x]$表示不超过x的最大整数.如$[0.5]=0$,$[1.02]=1$,$[3]=3$,于是电话收费S(单位:元)与用时t(单位:min)的函数关系可写成

$$S=\begin{cases}0.4\left(\left[\dfrac{t}{3}\right]+1\right)(t\neq3k),\\0.4\times\dfrac{t}{3}(t=3k).\end{cases}$$

其中$t>0$,$k=1,2,\cdots$.

习题 1－1

1. 求下列函数的定义域:

(1) $y=\dfrac{2}{2x-1}$;　　(2) $y=\sqrt{3x+5}$;

(3) $y=\ln(x^2-3x+2)$;　　(4) $y=\tan2x$;

(5) $y=\dfrac{1}{x-1}+\sqrt{x+2}$;　　(6) $y=2\tan x-\sin2x$.

2. 已知函数$f(x)=\dfrac{2+x}{2-x}$,求$f(0)$,$f(1)$,$f(1+x)$,$f(-x)$,$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3. 已知函数

$$f(x)=\begin{cases}1-x(x<-2),\\\sin x(-2<x<2),\\1+x(x>2).\end{cases}$$

求$f(-4)$,$f(0)$,$f(4)$.

4. 求下列函数的反函数:

(1) $y=3x+2$;　　(2) $y=e^{x-1}$;

(3) $y=x^3+1$.

5. 指出下列函数的奇偶性:

(1) $y=2x^4-5x^2+1$;　　(2) $y=x\sin x$;

(3) $y=\sin x+\tan x$;　　(4) $y=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$.

6. 判断下列函数的单调性:

(1) $y=-x+2$;　　(2) $y=2x^2(x\geqslant 0)$.

7. 指出下列函数的复合过程:

(1) $y=\cos 3x$;　　(2) $y=\sqrt{4x-1}$;

(3) $y=\ln\sin x$;　　(4) $y=(2+\tan x)^4$.

8. 在半径为 R 的球内做内接圆柱体,试将圆柱体的体积 V 表示为高 x 的函数.

9. 某市出租车的费用规定:起步价为(五公里)10 元,以后为每公里 1.8 元. 试建立租车费用 y 与行驶里程 x 的函数关系.

1.2　函数的极限

1.2.1　数列的极限

数列可以看做是函数 $x_n=f(n)$ 按自然数顺序列出的一串函数值:$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$. 并且表示为:$\{x_n\}$. 现在来考察当自变量 n 无限增大时,数列 $\{x_n\}$ 的变化趋势. 试看下面几个例子:

(1) 数列 $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$,即 $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{16},\cdots,\dfrac{1}{2^n},\cdots$;

(2) 数列 $\left\{\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}\right\}$,即 $2,\dfrac{1}{2},\dfrac{4}{3},\dfrac{3}{4},\cdots,\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n},\cdots$;

(3) 数列 $\{2n\}$,即 $2,4,6,\cdots,2n,\cdots$;

(4) 数列 $\left\{\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right\}$,即 $0,1,0,1,\cdots,\dfrac{1+(-1)^n}{2},\cdots$.

通过仔细观察可以发现,当 $n\to\infty$ 时,这几个数列的变化情况是大不相同的. 数列(1)随着 n 的无限增大,$x_n=\dfrac{1}{2^n}$无限接近常数 0;数列(2)随着 n 的无限增大,$x_n=\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}$无限接近常数 1;数列(3)、(4)随着 n 的无限增大,都不能无限接近于某一个确定的常数,当 $n\to\infty$ 时,数列 $x_n=2n$ 的值也无限增大,数列 $x_n=\dfrac{1+(-1)^n}{2}$的值在 0 与 1 两个数上来回跳动.

为清楚起见,我们把表示(1)、(2)这两个数列的点分别在数轴上描出一些(图1-18、图1-19).

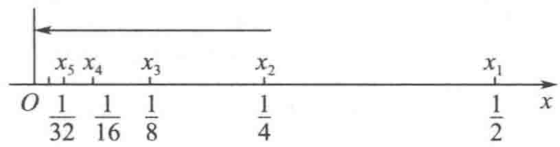

图1-18

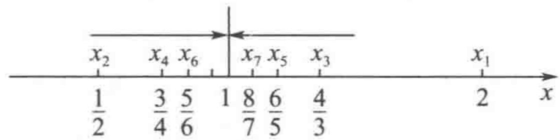

图1-19

可以看出,当 n 无限增大时, $x_n=\frac{1}{2^n}$在数轴上的对应点逐渐密集在 $x=0$ 的右侧,即 $x_n=\frac{1}{2^n}$无限趋近于0; $x_n=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$在数轴上的对应点逐渐密集在 $x=1$ 附近,即 $x_n=\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}$无限趋近于1.

总之,当 n 无限增大时,数列(1)、(2)都趋近于一个常数,这种数列称为有极限;当 n 无限增大时,数列(3)、(4)都不趋近于一个常数,这种数列称为无极限.一般地,有下面定义:

定义1.1 设数列 $\{x_n\}$,如果当 n 无限增大时, x_n 无限趋近于一个确定的常数 A,则称当 n 趋于无穷大时,数列 $\{x_n\}$ 以 A 为极限,记作

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A \text{ 或 } x_n\to A\ (n\to\infty).$$

此时,也称数列 $\{x_n\}$ 是收敛的;如果数列 $\{x_n\}$ 没有极限,就称其为发散的.

例如,当 $n\to\infty$ 时, $x_n=\frac{1}{n}$的极限是0,可记做 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$; $x_n=\frac{n}{n+1}$的极限是1,可记做 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$;而数列 $\{2n\}$ 和 $\left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\}$没有极限,没有极限的数列,也说数列的极限不存在.

例1 观察下面数列的变化趋势,写出它们的极限:

(1) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$;　　(2) $\left\{2-\frac{1}{n^3}\right\}$;

(3) $\left\{(-1)^n\frac{1}{2^n}\right\}$;　　(4) $\{3\}$.

解 (1)当 n 依次取1、2、3、4、5、…等自然数时,数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$的各项依次是1、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$、…,容易看出,当 n 无限增大时, x_n 无限接近于0.根据数列极限的定义可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

(2)当 n 依次取1、2、3、4、5、…等自然数时,数列 $\left\{2-\frac{1}{n^3}\right\}$的各项依次为 $2-1$、$2-\frac{1}{8}$、$2-$