

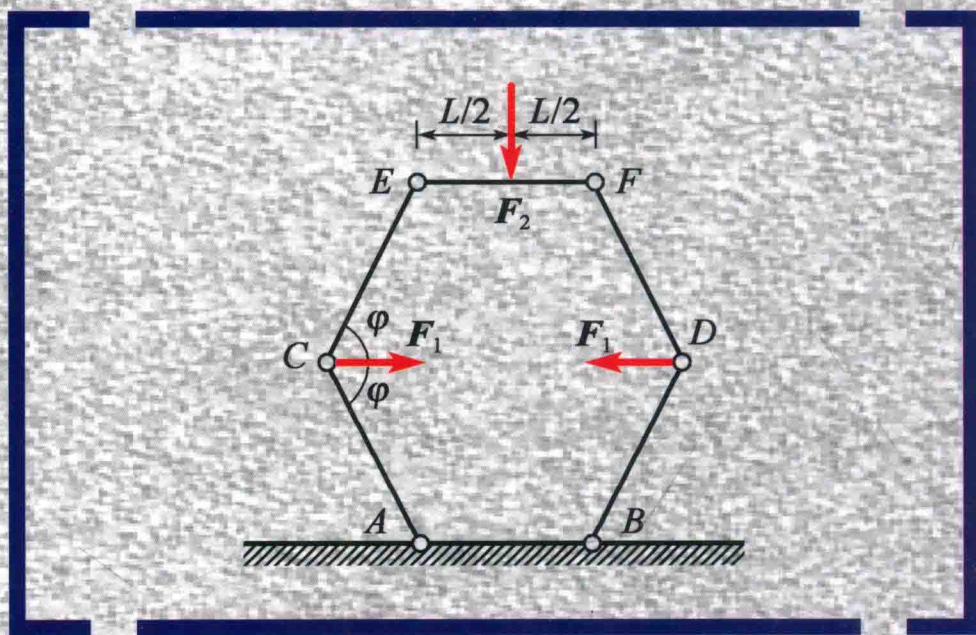
普通高等学校规划教材

Theoretical Mechanics

理论力学

(下册)

李银山◎编著



人民交通出版社股份有限公司
China Communications Press Co., Ltd.

普通高等学校规划教材

理论力学

(下册)

李银山 编著



人民交通出版社股份有限公司
China Communications Press Co., Ltd.

内 容 提 要

本教材是根据教育部高等院校工科本科“理论力学”课程教学基本(多学时)要求编写的。是作者继《Maple 理论力学》出版后,将理论力学和计算机技术结合起来的又一部新型教材,首次讲解了李银山提出的一种解决强非线性振动问题的快速解析法——谐波能量平衡法。

本书由《理论力学》上、下册两部分组成,共计 28 章。基本上涵盖了经典理论力学所涉及的所有问题,具体包括静力学、运动学、动力学、分析力学、专题和高级应用。内容完整、结构紧凑、叙述严谨、逻辑性强。配备了手算和电算(Maple 软件)两类例题,带有思考性的思考题和 A、B、C 三类习题。

下册内容主要包括:达朗贝尔原理、虚位移原理、动力学普遍方程、拉格朗日方程、哈密顿原理与正则方程;碰撞、微振动、刚体空间动力学、变质量动力学;宇宙飞行动力学、运动稳定性、理论力学中的概率问题、非线性振动、分岔和混沌等共计 13 章。

本书适用于理工科本科生理论力学教学使用,也可作为研究生和工程技术人员对理论力学专题的学习研究参考书。

为便于教师使用本教材,本书配备了多媒体电子教案,可加力学课程教学研讨 QQ 群 242976740 索取。

图书在版编目(CIP)数据

理论力学. 下册 / 李银山编著. —北京:人民交通出版社股份有限公司, 2017. 11

ISBN 978-7-114-14305-2

I. ①理… II. ①李… III. ①理论力学-高等学校-教材 IV. ①O31

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 265439 号

普通高等学校规划教材

书 名:理论力学(下册)

著 作 者:李银山

责任编辑:卢俊丽 张江成

出版发行:人民交通出版社股份有限公司

地 址:(100011)北京市朝阳区安定门外外馆斜街 3 号

网 址:<http://www.ccpublish.com.cn>

销售电话:(010)59757973

总 经 销:人民交通出版社股份有限公司发行部

经 销:各地新华书店

印 刷:北京市密东印刷有限公司

开 本:787×1092 1/16

印 张:25

字 数:584 千

版 次:2017 年 11 月 第 1 版

印 次:2017 年 11 月 第 1 次印刷

书 号:ISBN 978-7-114-14305-2

定 价:50.00 元

(有印刷、装订质量问题的图书,由本公司负责调换)

序

由李银山教授编写的《理论力学》是将理论力学和计算机技术结合起来的新型教材。本书分两册,共计28章,包括了理论力学教学大纲的全部内容。由于理论力学中的许多问题都比较繁琐,本书引入了计算能力强且容易操作的计算机数学软件 Maple,将繁杂的计算交由计算机去完成,不仅能够分析特定瞬时或特定位置的运动,而且能够对运动过程进行分析,这对培养学生理解力学概念是十分重要的。通过本书的学习,有利于系统培养学生建模编程、计算分析和解决工程实际问题的能力。

在理论力学的教学和工程实际中,振动问题的解析求解是非常重要的。线性振动问题的解析求解基本清楚,摄动法只能得到弱非线性振动问题的解析解,但对于本质非线性振动(即强非线性振动)问题,尚没有有效的求解方法,本书介绍了由李银山提出的求解强非线性振动问题解析解的谐波—能量平衡法。通过理论力学教学,让学生及早了解国际前沿:非线性振动、分岔和混沌,对于培养学生科学研究和解决工程实际问题的能力是非常重要的。

李银山教授在这本书的撰写过程中,查阅了大量的相关资料,编写了许多富有特色的例题和分类习题,其理论体系系统完整,循序渐进,学生易于掌握。本书的初稿曾在太原理工大学和河北工业大学有关专业使用,效果良好。

本书的出版,为理论力学教学的改进提供了一条可选择的途径。我们衷心地期望本书的出版能在理论力学教学改革和培养高水平、创新性工程技术人才方面发挥一定的作用。

中国工程院院士

陈予恕

2016年5月

前 言

本教材是根据教育部高等院校工科本科“理论力学”课程教学基本要求(多学时)、教育部工科“力学”课程教学指导委员会面向21世纪工科“力学”课程教学改革要求编写的。本书是将理论力学和计算机技术结合起来的新型教材,由《理论力学》(上册)和《理论力学》(下册)两部分组成。

随着科学技术的发展日新月异,作为基础学科的理论力学,其体系和内容也必须进行相应调整。从这个愿望出发,在编写本教材时力图在已有理论力学的基础上,在以下几个方面作进一步的改进:

(1)注意使用矢量、张量、矩阵等数学工具,以适应计算机与理论力学相结合、采用软件编程的使用要求。

(2)继承和创新相结合,增加了运动全过程分析内容,注意通过图像、计算等数学运算,使学生掌握物理概念,通过理论分析和例题示范,训练学生思考方法、力学简化建模能力、数学建模能力、符号解析计算能力、数值计算能力、计算机绘图和计算机仿真能力。

本教材编写时,传统手算算法和现代计算机算法并重,学习传统手算算法便于理解理论力学基本原理,采用现代计算机算法可以快速、准确解决工程问题,提高效率。

(3)吸收了《力学与实践》“教学研究”栏目的最新成果,吸收了第1~8届全国高等学校力学课程报告论坛的最新成果,全书内容完整、结构紧凑、叙述严谨、逻辑性强。

(4)以微积分、线性代数和概率论为基础,由简单到复杂,先平面后空间,重点介绍最具理论力学课程特点的基础内容。

(5)以矢量力学和分析力学为两条主线贯穿整个课程,讲授静力学、运动学和动力学。

(6)力学原理可以分为不变分的和变分的,本教材先讲不变分的原理,后讲变分的原理,将不变分的原理和变分的原理并重,增大了变分原理的内容,以满足快速发展的工程需求。

(7)从多种不同角度讲解基本概念、基本公式和基本方法,既有严格证明,又有形象直观的几何解释和物理解释。

(8)初始条件与理论力学的数学模型——常微分方程组是同等重要的。近代研究表明,混沌的出现依赖于:初始条件变化的敏感性和参数变化的敏感性。本教材把常微分方程组和初始条件同时考虑,采用谐波平衡与能量平衡相结合,提出了谐波—能量平衡法。

本教材介绍了由李银山提出的求解强非线性振动问题解析解的谐波—能量平衡法。通过理论力学教学,让学生及早了解国际前沿:非线性振动、分岔和混沌,对于培养学生科学研究和解决工程实际问题的能力是非常重要的。

(9)随着现代科技的发展,各种设备系统的结构日趋复杂,诸如卫星、火箭、飞机、导航系统、航空母舰、机器人、高层建筑、大跨径桥梁、高速列车等各类系统的可靠性被提上了科学研究的日程。提高系统的工作可靠性,可从两方面着手:一是提高每一组成元件的可靠性,二是研究系统的最佳设计、使用与维修方案等。为满足工程需要,本教材在理论力学中增加了“理论力学中的概率问题”一章。

(10)子曰:“学而不思则罔,思而不学则殆。”关于思考题:一些理论力学教科书所给出的思考题,似乎可以分为两大类。一类主要是复习性的,例如,“理论力学的任务是什么?”“理论力学的研究对象是什么?”等;另一类则不单纯是复习,而且带有一定的思考性。收入本书的思考题,基本上属于后一类。有的思考题虽然归入某一章,但由于理论力学的知识具有连贯性,可能需要全面思考。

(11)子曰:“学而时习之,不亦说乎?”本书希望构建教、学、习、用四维一体的现代化、立体化教材。本书例题分为常规的手算例题和计算机电算例题,供教师“教”和学生“学”选用;收入本书的习题,分为三类:A类习题比较简单、容易,供同学们写课后作业,期中或期末考试练习选用;B类习题有一定难度,供考研和参加力学竞赛的同学练习选用;C类习题与工程实际结合比较紧密,供同学们写大作业和工程技术人员学习时参考应用。

作为面向21世纪的新教材,本书尝试为理论力学建立这样一种具有现代计算方法的强大功能,但又不失传统解析方法之精确性的新体系。

李银山编著了本教材全部章节并统稿;河北工业大学马玉英解答了部分思考题,教日汗解答了部分习题,华东理工大学李彤制作了本书的多媒体课件。

我的研究生罗利军、董青田、曹俊灵、潘文波、吴艳艳、官云龙、韦炳威、霍树浩及其他许多博士生、硕士生及本科生提出了宝贵的修改建议,给予了很多帮助,在此一并致谢。

感谢清华大学徐秉业教授和高云峰教授、中国科学院自然科学史研究所戴念祖研究员、军械工程学院付光浦教授、太原理工大学蔡中民教授、太原科技大学梁应彪教授和我的同学郭晓辉博士。在我编写本书过程中,他们长期给予我的关心、支持和鼓励!

沉痛悼念我的博士生导师太原理工大学杨桂通教授,感谢他多年来对本书的关心和指导。

感谢我的硕士生导师太原科技大学徐克晋教授和本科生导师军械工程学院张识教授多年来的指导、帮助和支持。

我深深地感谢我的夫人杨秀兰女士,她帮助我录入了全部书稿。

陈予恕院士热情为本书作序,并担任主审,河北工业大学李欣业教授、焦永树教授对书稿作了极为认真细致的审阅,提出了许多宝贵的改进意见,作者致以衷心的感谢!

限于作者水平,错误与不妥之处望读者不吝指正。

李银山

2017年8月于天津

主要符号表

a 加速度	F_c^l 牵连惯性力
a_n 法向加速度	F 力坐标列阵
a_τ 切向加速度	g 重力加速度
a_u 绝对加速度	G 万有引力常数
a_r 相对加速度	h 高度
a_e 牵连加速度	H 哈密顿函数
a_c 科氏加速度	H 拉梅系数矩阵
A 自由振动振幅, 面积	H_1, H_2, H_3 拉梅系数
A 方向余弦矩阵	I 冲量
c 光速, 阻力系数	$I^{(e)}$ 外力的冲量
C 质心, 重心, 阻力因数	I 单位矩阵
d 微分符号	$\bar{I}_j$ 广义冲量
$\bar{d}$ 动系中微分符号	I_1 静力学或运动学第一不变量
$d'W$ 元功	I_2 静力学或运动学第二不变量
e 碰撞恢复因数, 偏心距	i 正交矢量基, 正交矢量列阵
$\underline{e}$ 矢量基(简称基), 矢量列阵	i_1, i_2, i_3 正交矢量基的三个基矢量
e_1, e_2, e_3 矢量基的三个基矢量	i, j, k 直角坐标三个基矢量
E 总机械能	J_c 刚体对质心轴 Cz 的转动惯量
E 单位并矢	J_o 刚体对定轴 Oz 的转动惯量
E_x 数学期望	J_p 刚体对瞬轴 p 的转动惯量
f 自由度数, 频率	J_{xy} 刚体对 x, y 轴的惯性积
f_d 动摩擦因数	J_z 刚体对 z 轴的转动惯量
f_s 静摩擦因数	J 惯量张量, 或瞬时角矢量
F 力	$\underline{J}$ 惯量矩阵
F_d 阻尼力	J_o 刚体对定点 O 的惯量张量
F_R 合力	J_c 刚体对质心 C 的惯量张量
F_f 摩擦力	$\underline{J_o}$ 刚体对定点 O 的惯量矩阵
F_N 约束力, 理想约束力, 法向约束力, 轴力	$\underline{J_c}$ 刚体对质心 C 的惯量矩阵
F_N 非理想约束力	J_1, J_2, J_3 主转动惯量
F_P 主动力	k 弹簧刚度系数
F_T 绳索的张拉力	l 长度
F_Φ 反推力	L 拉格朗日函数
F_l 达朗贝尔惯性力	L_z 质点系对 z 轴的动量矩
F_c^l 科氏惯性力	

L_O 质点系对定点 O 的动量矩
 l 坐标总数
 L_C 质点系对质心 C 的动量矩
 L_A 质点系对动点 A 的动量矩
 m 质量, 广义坐标数
 m_μ 刚体的质量
 $\bar{m}$ 多余坐标数
 M_z 力对 z 轴的矩
 $\max$ 极大
 $\min$ 极小
 M 力偶矩, 主矩
 M_R 合力偶
 M_e 外力偶
 M_O 力 F 对点 O 的矩
 M_O^I 惯性力的主矩
 M_g 陀螺力矩
 $\underline{M}$ 质量矩阵
 n 质点数
 N 刚体数
 O 定参考坐标系的原点
 p 广义动量
 $\boldsymbol{p}$ 动量, 转动瞬轴基矢量
 P 重量, 功率, 速度瞬心
 q 广义坐标
 $\boldsymbol{q}$ 载荷集度
 Q 广义力
 Q^* 非有势力的广义力
 $\tilde{Q}$ 正则变量表示的广义力
 r 半径, 双向完整系统约束数
 $r+s$ 双向约束数
 r, θ, φ 球坐标
 $\boldsymbol{r}$ 矢径
 R 总约束数
 $\boldsymbol{R}$ 主矢
 $\boldsymbol{R}^{(e)}$ 外力的主矢
 $\boldsymbol{R}_I$ 达朗贝尔惯性力的主矢
 $\boldsymbol{R}_e^I$ 牵连惯性力的主矢
 $\boldsymbol{R}_c^I$ 科里奥利惯性力的主矢
 $\boldsymbol{r}_A$ 动点 A 的矢径

$\boldsymbol{r}_C$ 质心 C 的矢径
 s 弧坐标, 双向不可积微分约束数
 S 哈密顿作用量
 $\bar{S}$ 拉格朗日作用量
 t 时间
 T 动能, 周期
 $\boldsymbol{v}$ 速度
 $\boldsymbol{v}_a$ 绝对速度
 $\boldsymbol{v}_r$ 相对速度
 $\boldsymbol{v}_e$ 牵连速度
 V 势能, 体积, 李雅普诺夫函数
 W 力的功
 x, y, z 直角坐标
 z 频率比
 α 角加速度
 β 振幅放大因子
 δ 滚阻摩擦系数, 阻尼系数
 δ 等时变分
 $\bar{\delta}$ 全变分
 δW 虚功
 $\delta \bar{W}$ 冲量虚功
 Δ 增量; 等时变更
 ΔJ 角位移
 φ_i 摩擦角
 η 减缩因数
 κ 曲率
 λ 本征值
 μ 流体黏度, 地球引力常数
 θ 自由振动初相角
 ϑ 转角
 ρ 密度, 曲率半径
 ρ, φ 极坐标
 ρ, φ, z 柱坐标
 ρ_z 对 z 轴的回转半径
 $\boldsymbol{\rho}$ 相对矢径
 σ_x 均方差
 $\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{b}$ 自然坐标系三个基矢量
 τ 碰撞作用时间
 Γ 曲线积分路径
 Γ_O 力对定点 O 的冲量矩

$\Gamma_0^{(e)}$ 外力对定点 O 的冲量矩

ω 角频率

ω_0 固有角频率

ω_d 阻尼自由振动角频率

ω 角速度

ω_a 绝对角速度

ω_r 相对角速度

ω_e 牵连角速度

Ω 激励角频率

ξ, η, ζ 静坐标系的三个坐标

ψ, θ, φ 欧拉角

ζ 阻尼比

Z_w 高斯拘束

目 录

第4篇 分析力学

第16章 达朗贝尔原理	3
16.1 质点的达朗贝尔原理	3
16.2 达朗贝尔惯性力系的简化	5
16.3 质点系的达朗贝尔原理	8
16.4 绕定轴转动刚体的轴承约束力	15
16.5 Maple 编程示例	18
思考题	20
习题	21
第17章 虚位移原理	25
17.1 虚位移	25
17.2 静力学普遍方程	35
17.3 广义坐标形式的静力学普遍方程	37
17.4 虚位移原理的应用	39
17.5 Maple 编程示例	45
思考题	50
习题	51
第18章 动力学普遍方程	55
18.1 动力学普遍方程	55
18.2 广义坐标形式的动力学普遍方程	59
18.3 用广义速度表示的动能	61
18.4 广义力的计算	62
18.5 Maple 编程示例	64
思考题	69
习题	71
第19章 拉格朗日方程	75
19.1 第二类拉格朗日方程	75
19.2 拉格朗日函数	75
19.3 拉格朗日方程的初积分	79
19.4 分析力学与矢量力学的对比	83
19.5 拉格朗日方程乘子法	87
19.6 相对非惯性参考系运动的拉格朗日方程	91

19.7 Maple 编程示例	93
思考题	94
习题	95
第 20 章 哈密顿原理与正则方程	101
20.1 最小作用量原理	101
20.2 正则方程	107
20.3 正则关系和正则变换	109
20.4 古典变分问题	110
20.5 Maple 编程示例	115
思考题	118
习题	118

第 5 篇 专 题

第 21 章 碰撞	122
21.1 碰撞的特征和基本假定	122
21.2 研究碰撞的矢量力学方法	127
21.3 研究碰撞的分析力学方法	132
21.4 Maple 编程示例	134
思考题	137
习题	138
第 22 章 微振动	143
22.1 振动的线性化方程	143
22.2 单自由度系统的自由振动	145
22.3 单自由度系统的有阻尼自由振动	149
22.4 单自由度系统的受迫振动	152
22.5 模态的概念	154
22.6 两个自由度系统的自由振动	155
22.7 两个自由度系统的受迫振动	158
22.8 Maple 编程示例	160
思考题	164
习题	165
第 23 章 刚体空间动力学	169
23.1 刚体定点运动时的动量矩和动能	169
23.2 刚体的质量几何	171
23.3 刚体定点运动的动力学方程	176
23.4 无力矩刚体的定点转动	178
23.5 重力场中轴对称刚体的定点转动	181
23.6 刚体一般运动的动力学方程	184
23.7 陀螺基本公式	185

23.8	陀螺基本理论	187
23.9	高速自转陀螺的近似理论	188
23.10	例题编程	191
	思考题	195
	习题	195
第 24 章	变质量动力学	201
24.1	基本概念与基本定理	201
24.2	变质量质点的运动	203
24.3	变质量刚体的运动	208
24.4	火箭的运动	209
24.5	Maple 编程示例	211
	思考题	212
	习题	213

第6篇 高级应用

第 25 章	宇宙飞行动力学	218
25.1	有心力场的普遍性质	218
25.2	二体问题	220
25.3	限制性三体问题	227
25.4	例题编程	231
	思考题	232
	习题	233
第 26 章	运动稳定性	236
26.1	基本概念	236
26.2	相平面方法	237
26.3	李雅普诺夫直接法	240
26.4	李雅普诺夫一次近似理论	241
26.5	李雅普诺夫函数的构造	243
26.6	Maple 编程示例	249
	思考题	253
	习题	254
第 27 章	理论力学中的概率问题	260
27.1	基本知识	260
27.2	静力学的概率问题	268
27.3	运动学的概率问题	270
27.4	动力学的概率问题	270
27.5	Maple 编程示例	271
	思考题	272
	习题	273

第 28 章 非线性振动、分岔和混沌	278
28.1 非线性振动	278
28.2 谐波—能量平衡法	281
28.3 分岔	289
28.4 混沌	294
28.5 Maple 编程示例	295
思考题	296
习题	297
附录 C 变分	301
附录 D 下册思考题和习题参考答案	305
参考文献	382

第4篇 分析力学

自从牛顿的著作发表以后,经典力学有了迅速的发展,形成了完整的牛顿—欧拉的矢量力学体系,解决了许多实际问题,如天体运行的预报等。但工业的发展提出了受约束的多自由度非自由质点系动力学问题,用矢量力学方法解决却会遇到困难。因为约束是对位置的约束,而在矢量力学中却换成了约束力,因而增加了未知量。

达朗贝尔将牛顿定律推广到受约束的非自由质点系。达朗贝尔原理提供了研究动力学问题的一个新的普遍方法,即用静力学研究平衡的方法来求解动力学问题,这种方法常称为动静法,在工程中经常采用。一方面由达朗贝尔原理发展起来的动静法,理论上与动量和动量矩定理等价,应用上可以充分利用静力学中的各种平衡方程和解题技巧;另一方面达朗贝尔原理与虚位移原理构成了分析力学的基础。第16章讨论达朗贝尔原理及其应用问题。

分析力学是建立在包括约束、广义坐标、虚位移、理想约束等一整套基本概念基础上的力学体系。虚位移原理是分析力学的一个基本原理,这个原理将整个静力学概括为一个原理,即静力学普遍方程。虚位移原理具有公理性质,因此不需要证明。利用虚位移原理可以解静力学问题,包括求主动力之间的关系,求约束力,求平衡位置并研究其稳定性等。利用虚位移原理解静力学问题的关键在于适当地给出主动力作用点的虚位移,通常有几何法(或虚速度法)以及解析法。第17章讨论虚位移原理及其应用问题。

达朗贝尔原理不是牛顿定律的简单移项,而是强调了有关约束的公理。正是在此基础上,拉格朗日提出了达朗贝尔—拉格朗日原理,即动力学普遍方程,奠定了分析动力学的基础。达朗贝尔在经典力学由牛顿力学向拉格朗日力学发展过程中起了重要的历史作用。既要看到达朗贝尔原理的实际意义,也要看到达朗贝尔原理的理论意义。虚位移原理与达朗贝尔原理结合为动力学普遍方程,而动力学普遍方程是整个分析动力学的基础。第18章讨论动力学普遍方程及其应用问题。

1788年,法国科学家拉格朗日出版了著名的《分析力学》一书,提出了解决动力学问题的新观点与新方法。拉格朗日用广义坐标描述非自由质点系的运动,因而使描述系统运动的变量大为减少;所处理的动力学量是质点系的动能、势能及力的功,这些都是标量,因而可以充分使用纯粹数学分析的方法进行研究。拉格朗日追求的是一般理论与一般数学模型,对各种具体问题,只要进行代入与展开,就能得到具体结果。他说:“在我的书里,你找不到一张图。”第19章重点讨论拉格朗日方程及其应用问题。

在拉格朗日之后,英国数学家、力学家哈密顿又作了发展。他将动力学的基本定律归纳为原理,不仅使力学在理论上更加完美,而且有可能扩展到非力学的其他物理领域,如量子力学。由拉格朗日和哈密顿奠基的力学研究称为分析力学,它与矢量力学共同构成经典力

学的主要内容。第 20 章简单介绍哈密顿原理与正则方程。

本篇介绍达朗贝尔原理、虚位移原理、动力学普遍方程、拉格朗日方程、哈密顿原理与正则方程,为进一步学习分析力学打下基础;同时也为解决工程中的动力学问题提供新的建模方法。

华罗庚：“数无形时少直觉，形少数时难入微，
数与形，本是相倚依，焉能分作两边飞。”

第 16 章 达朗贝尔原理

动力学基本规律的另一种叙述方法称为达朗贝尔原理。它可以看成牛顿第二定律的演变，也是后来发展分析力学的基础。依据达朗贝尔原理建立起来的动静法，是解决工程问题的一种实用方法。

16.1 质点的达朗贝尔原理

16.1.1 惯性参考系中质点的达朗贝尔原理

达朗贝尔原理是关于非自由质点动力学的一个原理。

设作用在非自由的质点上有主动力 F 和约束力 F_N ；按照达朗贝尔的原始思想，可将 F 分解为两部分[图 16-1a)]：一部分使质点产生加速度 a ，叫作发动力 F_{fd} ，有关系式

$$F_{fd} = ma \quad (a)$$

余下的一部分叫作损失力 F_{ss} ，所以有关系式

$$F_{ss} = F - F_{fd} \quad (b)$$

将式(a)代入式(b)，得

$$F_{ss} = F - ma \quad (c)$$

即损失力等于主动力 F 加上 $(-ma)$ 。

质点达朗贝尔原理的原始表述为：作用于质点上的损失力在每一瞬时位置上都为约束力所平衡。它的表达式为

$$F_{ss} + F_N = 0 \quad (16-1)$$

如果我们把静力学中质点的平衡条件解释为“主动力 F 为约束力所平衡”，即

$$F + F_N = 0 \quad (d)$$

这样，非自由质点在运动过程中应满足的条件就和静力学中质点的平衡条件具有了同样的形式。

达朗贝尔原理的主题思想是把牛顿定律推广，用于受约束质点，这就为后来的非自由质点动力学奠定了基础。达朗贝尔(J. le Rond d'Alembert, 1717—1783 年)在《动力学教程》(1743 年)中提出这个原理以后一百多年，即到了 19 世纪前半叶，人们开始把 $-ma$ 这个量叫作惯性力 F_I ，原理就被解释为，在加上惯性力 F_I [式(16-2)]以后，式(16-1)成为式(16-3)。

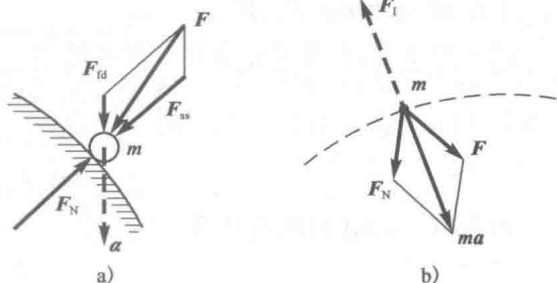


图 16-1 质点的达朗贝尔原理

$$F_I = -ma \quad (16-2)$$

$$F + F_N + F_I = 0 \quad (16-3)$$

质点达朗贝尔原理的现代表述为：作用在质点上的主动力、约束力和虚加的惯性力在形式上组成平衡力系。但是，静力学中构成平衡力系的都是外界物体对质点的作用力，而惯性力并不是外加的，所以惯性力是一种为了便于解决问题而假设的“虚拟力”。

根据达朗贝尔原理，可以通过对质点附加惯性力使动力学问题转化为静力学问题，因而能够应用平衡方程式及静力学的各种解题技巧；求未知约束力就是求 F_N ，求未知运动就是求惯性力 F_I 。这种方法称为解决动力学问题的动静法，在工程上经常采用。

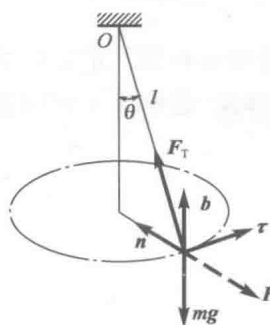


图 16-2 例题 16-1

例题 16-1 如图 16-2 所示，一圆锥摆。质量 $m = 0.1\text{kg}$ 的小球系于长 $l = 0.3\text{m}$ 的绳上，绳的另一端系在固定点 O ，并与铅直线成夹角 $\theta = 60^\circ$ 。如小球在水平面内作匀速圆周运动，求小球的速度 v 与绳的张力 F_T 的大小。

解：①运动分析，求惯性力（方向如图 16-2 所示）。

小球 M 作圆周运动，因此惯性力 F_I^n （即离心力）沿着圆的径向向外，其大小为

$$F_I^n = ma_n, F_I^n = m \frac{v^2}{l \sin \theta} \quad (1)$$

②受力分析，包括主动力、约束力和惯性力。

小球 M 受力 mg, F_T, F_I^n 。

③列出方程，利用动静法列平衡方程。

$$\sum F_b = 0, -mg + F_T \cos \theta = 0 \quad (2)$$

$$F_T = 1.96\text{N}$$

$$\sum F_n = 0, F_T \sin \theta - F_I^n = 0 \quad (3)$$

由式(1)~式(3)联列解得

$$v = 2.1\text{m/s}$$



讨论与练习

- (1) 惯性力方向与加速度方向相反，用虚线画出；
- (2) 惯性力的大小不带箭头，不带负号，带编号；
- (3) 本题采用自然坐标系；
- (4) 请读者编写 Maple 程序验证结果。

16.1.2 非惯性参考系中质点的达朗贝尔原理

达朗贝尔惯性力与在第 12 章叙述的牵连惯性力和科氏惯性力，都不是真实力，但它们之间又有所区别。牵连惯性力和科氏惯性力只对非惯性参考系有意义，其大小和方向取决于所参照的非惯性参考系的运动。而达朗贝尔惯性力的大小和方向取决于质点本身的运动。对于上述在惯性系内运动的质点，其达朗贝尔惯性力与质点的绝对加速度有关。质点非惯性参考系内运动时，必须在式(12-8)中，将真实力分成主动力 F 和约束力 F_N ，增加牵连惯性力 F_e^I 和科氏惯性力 F_c^I 等非真实力，同时必须将达朗贝尔惯性力 F_I 的定义中质点的