中国科学院规划教材

大学数学系列教材

概率论与数理统计学习指导

主编 张好治 王健 王广彬

科学出版社

中国科学院规划教材
大学数学系列教材

概率论与数理统计学习指导

主　编　张好治　王　健　王广彬
副主编　王忠锐　王敏会　单小杰

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书为《概率论与数理统计》(张好治、王健主编,科学出版社,2017 年出版)的配套学习参考资料。本书的内容和主教材完全对接,第 1 章到第 5 章为概率论部分,第 6 章到第 9 章为数理统计部分。每章的内容分为内容简介、习题详解两部分。在系统学习的基础上,为读者设计了 5 套概率论与数理统计自测试题和 5 套概率论自测试题,并配有标准答案,便于读者综合测试所学知识。

本书可作为高等学校非数学类专业概率论与数理统计课程的辅导材料以及考研深造和自学的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计学习指导/张好治,王健,王广彬主编. —北京:科学出版社,2017.9

中国科学院规划教材.大学数学系列教材

ISBN 978-7-03-054701-9

Ⅰ.①概… Ⅱ.①张… ②王… ③王… Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料 ②数理统计-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 238878 号

责任编辑:滕亚帆 孙翠勤/责任校对:张小霞

责任印制:徐晓晨/封面设计:华路天然工作室

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

北京九州迅驰传媒文化有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2017 年 9 月第 一 版 开本:720×1000 B5

2018 年 1 月第二次印刷 印张:12 1/4

字数:247 000

定价:29.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

编委会名单

主　编　张好治　王　健　王广彬

副主编　王忠锐　王敏会　单小杰

编　者　（按姓氏笔画排序）

于家举　王　健　王　萍

王广彬　王忠锐　王敏会

王殿坤　尹晓翠　孙金领

李冬梅　李桂玲　张好治

单小杰　袁冬梅　程　冰

前　言

本书是《概率论与数理统计》(张好治，王健主编，科学出版社，2017)的配套学习辅导.本书旨在为使用该教材的读者更好地学习和理解该学科的知识和内容，提高学习和理解的效率.

作为和主教材配套使用的辅助资料，本书的内容和主教材完全对接，共分为9章.其中的第1章到第5章为概率论部分，第6章到第9章为数理统计部分.每章的内容设计为两部分.

(1)内容简介.把本章对应的教材中的内容(包括基本概念、定理、公式、计算方法等)予以归纳总结，便于读者复习和查阅.

(2)习题详解.针对本章对应的教材中全部课后习题，给出了详尽的解答，特别是解题中重要的步骤和推导根据，都有详细的说明.所有习题都保留主教材中原有的编号，便于读者参阅.

本书最后附有5套概率论与数理统计自测试题和5套概率论自测试题及详细解答.可以作为读者自测本课程知识的掌握程度及内容的把握程度。

本书内容丰富、解答明确、启发性强.对于读者完整掌握该学科的知识非常有效，既有助于巩固所学的基本理论，又有助于有效地掌握运算能力和技巧，整体提高读者分析问题、解决问题的能力.

本书由青岛农业大学张好治教授、山东理工大学王健教授担任主编，在编写过程中，得到了很多同行专家的关心与支持，在此表示衷心感谢.

本书尽管经过精心的雕琢，难免仍有不妥之处.我们衷心希望使用本书的读者对书中的缺点给予指正，对书中的缺憾之处提出建议，以使本书的内容在再版时能够得到更好的完善.

张好治　王　健

2016年12月

目　　录

第 1 章　概率论基础

内 容 简 介

一、随机事件

1. 随机试验与样本空间

具有下列三个特性的试验称为随机试验：

(1) 试验可以在相同的条件下重复地进行；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，但事先知道每次试验所有可能的结果；

(3) 每次试验都会出现上述可能结果中的某一个，但事先不能确定哪一个结果会出现.

试验的所有可能结果所组成的集合称为样本空间，用 Ω 表示，每一个结果称为样本空间中的样本点，记作 ω.

2. 随机事件

样本空间 Ω 的任一子集称为随机事件(简称事件). 通常把必然事件(记作 Ω)与不可能事件(记作 $\varnothing$)看作特殊的随机事件.

3. 事件的关系及运算

(1) 事件的包含：若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记作 $A\subset B$(或 $B\supset A$).

(2) 事件的相等：若两事件 A 与 B 相互包含，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记作 $A=B$.

(3) 和事件：事件 A 与事件 B 至少发生一个的事件称为事件 A 与事件 B 的和事件，记作 $A\cup B$；n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个事件发生的事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和，记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$(简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$).

(4) 积事件：事件 A 与事件 B 同时发生的事件称为事件 A 与事件 B 的积事件，记作 $A\cap B$ (简记为 AB)；n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生的事件称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件，记作 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$(简记为 $A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$).

(5) 互不相容事件：若事件 A 和事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，那么称事件

A 与事件 B 互不相容(或互斥);若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个事件不能同时发生,即 $A_iA_j=\varnothing(1\leqslant i<j\leqslant n)$,则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容.

(6) 对立事件:若事件 A 和事件 B 满足 $A\cup B=\Omega,A\cap B=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B 是对立的. 事件 A 的对立事件(或逆事件)记作$\overline{A}$.

(7) 差事件:若事件 A 发生且事件 B 不发生,则称这个事件为事件 A 与事件 B 的差事件,记作 $A-B$(或 $A\overline{B}$或 $A-AB$).

(8) 事件的运算律:① 交换律　对任意两个事件 A 和 B 有

$$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A;$$

② 结合律　对任意事件 A,B,C 有

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,$$
$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C;$$

③ 分配律　对任意事件 A,B,C 有

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C),$$
$$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C);$$

④ 德·摩根(De Morgan)律　对任意事件 A 和事件 B 有

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},$$
$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

二、频率与概率

1. 频率的定义

若随机事件 A 在 n 次重复试验中发生了 n_A 次,则称 n_A 为事件 A 在这 n 次试验中发生的频数,称 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$为事件 A 在这 n 次试验中发生的频率.

2. 概率的统计定义

在相同的条件下,重复进行 n 次试验,如果随着试验次数的增大,事件 A 出现的频率 $f_n(A)$稳定地在某一确定的常数 p 附近摆动,则称常数 p 为事件 A 发生的概率. 记为$P(A)=p$,这个定义称为概率的统计定义.

3. 概率的古典定义

具有下列两个特征的随机试验的数学模型称为古典概型:

(1) 试验的样本空间 Ω 是个有限集,不妨记作 $\Omega=\{\omega_1,\cdots,\omega_n\}$;

(2) 在每次试验中,每个样本点 $\omega_i(i=1,2,\cdots,n)$发生的概率相同,即

$$P(\omega_1)=\cdots=P(\omega_n).$$

在古典概型中,规定事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{n_A}{n}=\frac{A\text{ 中基本事件的个数}}{\Omega\text{ 中基本事件的个数}}.$$

4. 概率的几何定义

如果随机试验的样本空间是一个区域(可以是直线上的区间、平面或空间中的区域),且样本空间中每个试验结果的出现具有等可能性,那么规定事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{A\text{ 的长度(面积或体积)}}{\text{样本空间的长度(面积或体积)}}.$$

5. 概率的公理化定义

设随机试验的样本空间为 Ω,随机事件 A 是 Ω 的子集,$P(A)$ 是实值函数,若满足下列三条公理.

公理 1 (非负性) 对于任一随机事件 A,有 $P(A)\geqslant 0$.

公理 2 (规范性) 对于必然事件 Ω,有 $P(\Omega)=1$.

公理 3 (可列可加性) 对于两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_i,\cdots$,有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i),$$

则称 $P(A)$ 为随机事件 A 的概率.

6. 概率的性质

性质 1 $P(\varnothing)=0$.

性质 2 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,则 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$.

性质 3 若 $\overline{A}$ 为 A 的对立事件,则 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

性质 4 若 $B\subset A$,则 $P(A-B)=P(A)-P(B)$ 且 $P(A)\geqslant P(B)$.

性质 5 对任意两个事件 A,B 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

三、条件概率与乘法公式

(1) 条件概率:设 A,B 为随机试验 E 的两个随机事件,Ω 为样本空间,如果 $P(B)>0$,称

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在事件 B 发生的条件下事件 A 发生的条件概率.

(2) 乘法公式:对于任意两个事件 A 与 B,有

$$P(AB)=P(A|B)P(B),\quad P(B)>0,$$
$$P(AB)=P(B|A)P(A),\quad P(A)>0.$$

(3) 事件的独立性:设 A,B 为两个事件,如果 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称事件 A 与事件 B 相互独立.

一般地,设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件,若对于其中任意 k 个事件 $A_{i_1},A_{i_2},\cdots,$

$A_{i_k}(1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n)$，都有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.这里实际上包含了 2^n-n-1 个等式.

四、全概率公式与贝叶斯公式

全概率公式　设 Ω 是随机试验 E 的样本空间，B 为 Ω 中的一个事件，$A_1,\cdots,A_n$ 为 Ω 的一个划分，且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i).$$

贝叶斯(Bayes)公式　设 Ω 是随机试验 E 的样本空间，$A_1,\cdots,A_n$ 为 Ω 的一个划分，且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$，B 为 Ω 中的任一事件，$P(B)>0$，则

$$P(A_j\mid B)=\frac{P(A_j)P(B\mid A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)},\quad j=1,2,\cdots,n.$$

五、伯努利概型与二项概率公式

若 A 为试验 E 的事件，$P(A)=p$，在相同的条件下，重复地做 n 次试验，且各试验及其结果都是相互独立的，称这一类试验为 n 重伯努利试验，或 n 重伯努利概型.

设在一次试验中事件 A 出现的概率为 $p(0<p<1)$，在 n 重伯努利试验中，事件 A 恰好出现 k 次的概率为

$$P_n(k)=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}\quad(k=0,1,2,\cdots,n),$$

这个公式称为二项概率公式.

习题1详解

1. 写出下列随机试验的样本空间：

(1) 抛三枚硬币，观察出现的正反面的情况；

(2) 抛三颗骰子，观察出现的点数；

(3) 连续抛一枚硬币，直到出现正面为止；

(4) 在某十字路口，观察一小时内通过的机动车辆数；

(5) 观察某城市一天内的用电量.

解　(1) $\Omega=\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$，共含有 $2^3=8$ 个样本点，其中0表示反面，1表示正面.

(2) $\Omega=\{(x,y,z):x,y,z=1,2,3,4,5,6\}$，含有 $6^3=216$ 个样本点.

(3) $\Omega=\{(1),(0,1),(0,0,1),(0,0,0,1),\cdots\}$，含有可列个样本点，其中0表示

反面，1 表示正面.

(4) $\Omega=\{0,1,2,\cdots\}$，含有可列个样本点.

(5) $\Omega=\{t\mid t\geqslant 0\}$，含有无穷个样本点.

2. 某工人生产了 n 个零件，以事件 A_i 表示他生产的第 i 个零件是合格品($1\leqslant i\leqslant n$)，用 A_i 表示下列事件：

(1) 没有一个零件是不合格品；

(2) 至少有一个零件是不合格品.

解 (1) $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$，　(2) $\overline{\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\overline{A_i}$.

3. 设 A,B 是两个事件，且 $P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.4$，求 $P(\overline{AB})$.

解 由于 $A-B=A-AB$，且 $AB\subset A$，所以 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$，于是

$$P(AB)=P(A)-P(A-B)=0.7-0.4=0.3,$$

因此

$$P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.3=0.7.$$

4. 设 A,B 是两个事件，证明 $P(AB)=1-P(\overline{A})-P(\overline{B})+P(\overline{A}\,\overline{B})$.

证 法一　因 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，故

$$\begin{aligned}P(AB)&=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\\&=[1-P(\overline{A})]+[1-P(\overline{B})]-[1-P(\overline{A\cup B})]\\&=1-P(\overline{A})-P(\overline{B})+P(\overline{A\cup B})\\&=1-P(\overline{A})-P(\overline{B})+P(\overline{A}\,\overline{B}).\end{aligned}$$

法二　$$\begin{aligned}P(AB)&=1-P(\overline{AB})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})\\&=1-[P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\,\overline{B})]\\&=1-P(\overline{A})-P(\overline{B})+P(\overline{A}\,\overline{B}).\end{aligned}$$

5. 已知 10 个灯泡中有 7 个正品 3 个次品，从中不放回地抽取两次，每次取一个灯泡，求

(1)取出的两个灯泡都是正品的概率；

(2)取出的两个灯泡都是次品的概率；

(3)取出一个正品，一个次品的概率；

(4)第二次取出的灯泡是次品的概率.

解 (1) $\dfrac{7\times 6}{10\times 9}=\dfrac{7}{15}$；　(2) $\dfrac{3\times 2}{10\times 9}=\dfrac{1}{15}$；

(3) $\dfrac{C_2^1\times 7\times 3}{10\times 9}=\dfrac{7}{15}$；　(4) $\dfrac{7\times 3+3\times 2}{10\times 9}=\dfrac{3}{10}$.

6. 某班有 30 个同学，其中 8 个女同学，随机地选 10 个，求

(1)正好有 2 个女同学的概率；

(2)最多有 2 个女同学的概率；

(3)至少有 2 个女同学的概率.

解　(1)$C_8^2C_{22}^8/C_{30}^{10}$；(2)$(C_{22}^{10}+C_8^1C_{22}^9+C_8^2C_{22}^8)/C_{30}^{10}$；(3)$1-(C_{22}^{10}+C_8^1C_{22}^9)/C_{30}^{10}$.

7. 将 3 个球随机地投入到 5 个盒子中，求

(1)有 3 个盒子中各有 1 个球的概率；

(2)3 个球放入 1 个盒子中的概率；

(3)1 个盒子中有 2 个球，另 1 个盒子中有 1 个球的概率.

解　(1)$\dfrac{A_5^3}{5^3}=\dfrac{C_5^3\times 3!}{5^3}=\dfrac{12}{25}$；　(2)$\dfrac{C_5^1}{5^3}=\dfrac{1}{25}$；　(3)$\dfrac{C_5^1\times C_3^2\times C_4^1}{5^3}=\dfrac{12}{25}$.

8. 在 11 张卡片上分别写上 engineering 这 11 个字母，从中任意连抽 6 张，求依次排列结果为ginger的概率.

解　所求概率为$\dfrac{C_2^1C_2^1C_3^1C_1^1C_3^1C_1^1}{A_{11}^6}=\dfrac{1}{9240}$或$\dfrac{2}{11}\times\dfrac{2}{10}\times\dfrac{3}{9}\times\dfrac{1}{8}\times\dfrac{3}{7}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{9240}$.

9. (抽奖券问题) 设某超市有奖销售，投放 n 张奖券只有 1 张有奖，每位顾客可抽 1 张，求第 k 位顾客中奖的概率($1\leqslant k\leqslant n$).

解　记 $A=\{$第 k 位顾客中奖$\}$，抽奖券为不放回抽样，则

$$P(A)=\frac{A_{n-1}^{k-1}\times 1}{A_n^k}=\frac{(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)\times 1}{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)}=\frac{1}{n}.$$

10. (生日问题) 设某班级有 n 个人($n\leqslant 365$)，问至少有两个人的生日在同一天的概率是多大？

解　假定一年按 365 天计算，每个人的生日在 365 天中的任一天是等可能的，令 $A=\{n$ 个人中至少有两个人的生日相同$\}$，$B=\{n$ 个人的生日全不相同$\}$，则

$$P(A)=P(\overline{B})=1-P(B)=1-\frac{C_{365}^n\cdot n!}{365^n}.$$

11. 某公共汽车站从上午 7 时起，每隔 15min 有一辆公共汽车通过，现有一乘客在 7:00 到 7:30 之间随机到站候车. 求

(1)该乘客候车时间小于 5min 的概率；

(2)该乘客候车时间超过 10min 的概率.

解　用 T 表示该乘客到达时刻，设问题(1)和(2)涉及事件为 A,B，则

$$\Omega=\{7:00<T<7:30\},$$
$$A=\{7:10<T<7:15 \text{ 或 } 7:25<T<7:30\},$$
$$B=\{7:00<T<7:05 \text{ 或 } 7:15<T<7:20\},$$

则

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3},\ P(B)=\frac{m(B)}{m(\Omega)}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}.$$

12.（相遇问题）甲、乙二人相约在中午 12 点到 1 点在预订地点会面，先到者等待 10min 就可离去，试求二人能会面的概率（假设二人在该时段到达预订地点是等可能的）.

解　设 $A=\{$二人能会面$\}$；设甲、乙二人到达的时间分别为 x,y. 则样本空间对应于区域 $\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\}$，而事件 A 对应于平面区域 $A=\left\{(x,y)\mid |x-y|\leqslant\frac{1}{6}\right\}$，如图 1-1 所示.

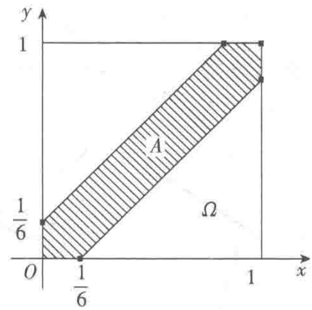

图 1-1

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{1^2-\frac{1}{2}\times\left(\frac{5}{6}\right)^2\times 2}{1^2}=\frac{11}{36}.$$

13. 在区间(0,1)内任取两个数，求它们的乘积不大于 $\frac{1}{4}$ 的概率.

解　设 x 和 y 表示任取的两个数，视 (x,y) 为随机点，它落入正方形区域 $\Omega=\{(x,y)\mid 0<x<1, 0<y<1\}$ 内（图 1-2），记 $A=\left\{(x,y)\mid xy\leqslant\frac{1}{4}, 0<x<1, 0<y<1\right\}$，则 (x,y) 应位于图 1-2 中阴影部分区域内，由几何概率计算公式，有

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{\frac{1}{4}\times 1+\int_{\frac{1}{4}}^{1}\frac{1}{4x}\mathrm{d}x}{1\times 1}$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left(0-\ln\frac{1}{4}\right)=\frac{1+2\ln 2}{4}\approx 0.597.$$

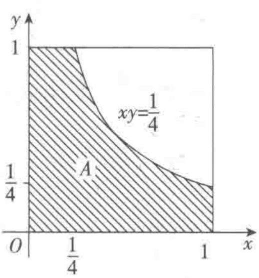

图 1-2

14. 已知男人寿命大于 60 岁的概率为 70%，大于 50 岁的概率为 85%，若某人今年已 50 岁，问他活到 60 岁的概率为多少？

解　设事件 $A=$“某人活到 50 岁”，事件 $B=$“某人活到 60 岁”，则

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{70\%}{85\%}\approx 0.8235.$$

15. 假设一批产品中一、二、三等品各占 60%，30%，10%，从中任意取出一件，结果不是三等品，则取到的是一等品的概率为多少？

解　设 $A_i=\{$取出的产品为第 i 等品$\}(i=1,2,3)$，则 A_1,A_2,A_3 互不相容. 故所求概率为

$$P[A_1\mid(A_1\cup A_2)]=\frac{P[A_1\cap(A_1\cup A_2)]}{P(A_1\cup A_2)}=\frac{P(A_1)}{P(A_1\cup A_2)}=\frac{P(A_1)}{P(A_1)+P(A_2)}$$

$$=\frac{0.6}{0.6+0.3}=\frac{2}{3}.$$

16. 10 个签中有 4 个是难签，3 人参加抽签（无放回），甲先、乙次、丙最后，求甲抽到难签、甲乙都抽到难签、甲没有抽到难签而乙抽到难签及甲乙丙都抽到难签的概率？

解　设 $A=\{$甲抽到难签$\}$，$B=\{$乙抽到难签$\}$，$C=\{$丙抽到难签$\}$，则

$$P(A)=\frac{4}{10},\quad P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}=\frac{2}{15},$$

$$P(\overline{A}B)=P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{6}{10}\cdot\frac{4}{9}=\frac{4}{15},$$

$$P(ABC)=P(A)P(B|A)P(C|AB)=\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}=\frac{1}{30}.$$

17. 电路如图 1-3 所示，其中 A,B,C,D 为开关. 设各开关闭合与否相互独立，且每一开关闭合的概率均为 p，求 L 与 R 为通路（用 T 表示）的概率.

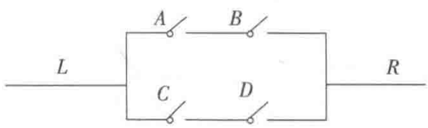

图 1-3

解　用 A,B,C,D 表示开关闭合，于是 $T=AB\cup CD$，从而，由概率的性质及 A,B,C,D 的相互独立性，得

$$\begin{aligned}P(T)&=P(AB)+P(CD)-P(ABCD)\\&=P(A)P(B)+P(C)P(D)-P(A)P(B)P(C)P(D)\\&=p^2+p^2-p^4=2p^2-p^4.\end{aligned}$$

18. 三个人独立地猜一个谜语，个人单独能猜出的概率分别为 0.2，0.25，0.3，问能将这个谜语猜出的概率是多少？

解　设 $A=\{$谜语能猜出$\}$，则

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-(1-0.2)(1-0.25)(1-0.3)=0.58.$$

19. 从某单位外打电话给该单位某一办公室，要由单位总机转进，若总机打通的概率为 0.6，办公室的分机占线率为 0.3，设二者是独立的，求从单位外向该办公室打电话能打通的概率.

解　设 $B=\{$从外向办公室打通电话$\}$，$A_1=\{$总机打通$\}$，$A_2=\{$办公室不占线$\}$

$$P(B)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=0.6\times(1-0.3)=0.42.$$

20. 设 $P(A)=0.6$，$P(B)=0.8$，$P(A|B)=0.7$，求 $P(B|A)$.

解　$P(AB)=P(B)P(A|B)=0.8\times0.7=0.56$，所以 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{0.56}{0.6}$

≈ 0.93.

21. 设 $P(A)=0.1, P(B|A)=0.9, P(B|\overline{A})=0.2$，求 $P(A|B)$.

解 $P(B)=P[(A\cap\overline{A})\cup B]=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=0.1\times0.9+(1-0.1)\times0.2=0.27$，故

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{0.1\times0.9}{0.27}=\frac{1}{3}.$$

22. 设有两个相同的盒子，第一盒中有4个红球6个白球，第二盒中有5个红球5个白球，随机地取一盒，从中随机地取一个球，求取到红球的概率.

解 设 A="从中取出的球为红球"，B="取出的球为第一个盒中的"，$\overline{B}$="取出的球为第二个盒中的"，随机地取一盒，则每一盒取到的概率都是0.5，由全概率公式得

$$\begin{aligned}P(A)&=P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})\\&=\frac{1}{2}\times\frac{4}{10}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{10}=0.45.\end{aligned}$$

23. 已知男人中有5%是色盲患者，女人中有0.25%是色盲患者，今从男女人数相等的人群中随机挑选一人，恰好是色盲患者，问此人是男性的概率是多少？

解 A={任选一人是男性}，$\overline{A}$={任选一人是女性}，B={任选一人是色盲患者}.

$$P(B)=P(A)P(B|A)+P(\overline{A})P(B|\overline{A})=\frac{1}{2}\times5\%+\frac{1}{2}\times0.25\%=0.02625;$$

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}=\frac{20}{21}.$$

24. 在通信网络中装有密码钥匙，设全部收到的信息中有95%是可信的，又设全部不可信的信息中只有0.1%是使用密码钥匙传送的，而全部可信信息是使用密码钥匙传送的. 求由密码钥匙传送的一信息是可信信息的概率.

解 设 A="一信息是使用密码钥匙传送的"，B="一信息是可信的". 根据贝叶斯公式，有

$$\begin{aligned}P(B|A)&=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})}\\&=\frac{95\%\times1}{95\%\times1+5\%\times0.1\%}=\frac{19000}{19001}\approx99.9947\%.\end{aligned}$$

25. 一批产品的废品率为0.1，每次抽取1个，观测后放回，下次再取1个，共重复3次，求3次中恰有两次抽到废品的概率.

解 $C_3^2\,0.1^2\,(1-0.1)^{3-2}=0.027$.

26. 某人有一串 m 把外形相同的钥匙，其中只有一把能打开家门，有一天此人酒