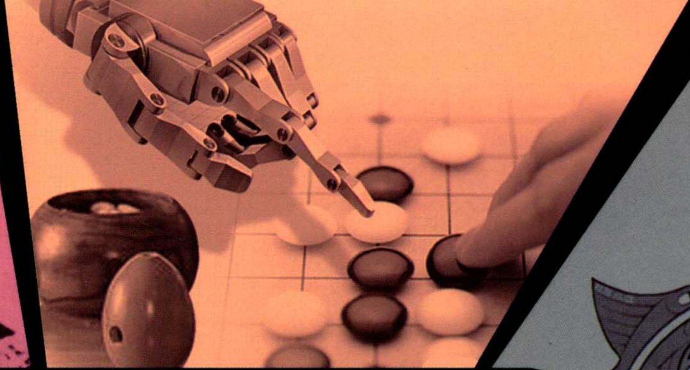
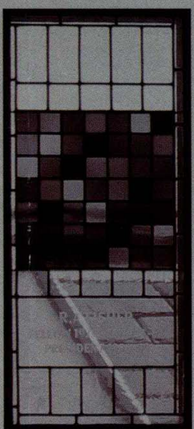
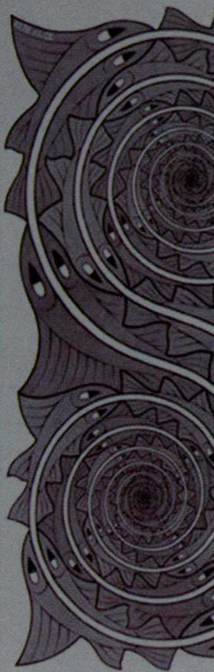



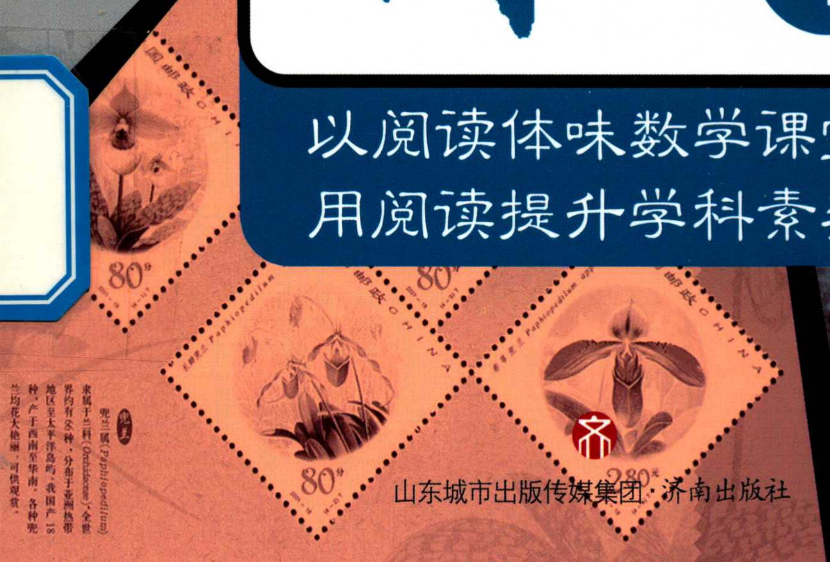
学科阅读推广工程

# 数学来了 4

颜峰 主编

以阅读体味数学课堂
用阅读提升学科素养




山东城市出版传媒集团·济南出版社


数学来了
4

学科阅读推广工程

# 数学来了 4

颜峰 主编

副 主 编：杨　军　安志军　陈　杰
分册主编：杨　军
编　　者：张绪儒　赵　鹏　宋国明
张　钊　王海燕　李建国

山东城市出版传媒集团·济南出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学来了.4 / 颜峰主编. —济南：济南出版社，2018.1

ISBN 978-7-5488-2955-3

Ⅰ.①数… Ⅱ.①颜… Ⅲ.①中学数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 006300 号

---

出版人 崔 刚
项目策划 周家亮
责任编辑 张雪丽 李 晨
封面设计 胡大伟
出版发行 济南出版社
地 址 山东省济南市二环南路 1 号(250002)
发行热线 0531-86922073(省内) 0531-67817923(省外)
印 刷 肥城新华印刷有限公司
版 次 2018 年 1 月第 1 版
印 次 2018 年 4 月第 1 次印刷
成品尺寸 170 mm×240 mm 16 开
印 张 7.25
字 数 103 千字
定 价 28.00 元

# 打开数学世界的一扇窗

数学是科学的语言，是一切科学和技术的基础，它渗透于人类生活的各个领域，是人类思考和解决问题的工具，影响着人类对世界及自身的看法。

数学有自己的灵魂，绝不只是简单的数学概念、数学定义、数学公式和数学计算。它赋予它所发现的真理以生命，它唤起心神、澄清智慧。它让我们形成“数学方式”的理性思维，从数学的角度看问题，培养起理性思维的习惯和严密求证的精神，提高逻辑推理的能力和准确表达的意识，以及多角度思考与解决问题的素养。我们从数学中汲取的逻辑思维与理性精神，会深深铭刻在我们的头脑中，使我们在思考问题时全面而深刻，在做事时清晰而逻辑。

通过阅读构建起数学思维与数学素养，是我们编写《数学来了》这一套学科读物的目标。以阅读体味数学课堂，用阅读提升学科素养，这与当前盛行的学科阅读概念不谋而合。因此，我们立足课程，以教材为起点，结合教学进度适当扩充阅读文本，旨在拉近课堂与课外的距离，拉近阅读与学习的距离，使学生开阔知识视野、完善认知结构、提升思维能力，形成对课程的深度学习。书中的每一篇阅读文本，都是数学教学内容的精华和延伸，以打开一扇窗，提供一个全新视角，引领你去揣摩千姿百态的因式分解，赞叹数学对称之美，感触古今中外数学的算法神韵，领会数学知识与社会生活的联系……从而进入丰富多彩的数学殿堂。

我们相信，通过阅读，你们会发现，数学并不是枯燥定义的累积，也不是

烦琐公式的堆砌。我们更加相信，你们会对数学产生前所未有的兴趣和热情，从而改变学习数学的态度，提高学习数学的效率。正如诺瓦列斯所说：“纯数学是魔术家真正的魔杖。”希望你们人人都能用这根称手的数学魔杖，在知识的海洋里尽情挥洒！

# 目 录

# 一 勾股定理

公元前11世纪的西周时期，周公对古代伏羲构造周天历度的事迹感到不可思议，就请教商高数学知识从何而来：“天不可阶而升，地不可得尽寸而度，请问数安从出？”商高以勾股定理的证明为例，解释数学知识的由来：“数之法出于圆方，圆出于方，方出于矩，矩出于九九八十一，故折矩以为句广三，股修四，径隅五。”即我们常说的“勾三股四弦五”。

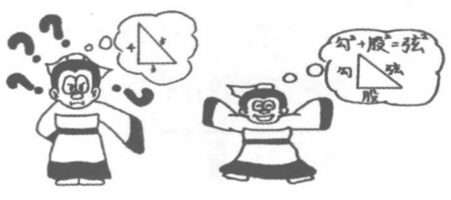



图 1-1

什么是“勾、股”呢？在中国古代，人们把弯曲成直角的手臂的上半部分称为“勾”，下半部分称为“股”。商高答话的意思是：当直角三角形的两条直角边分别为3(短边)和4(长边)时，径隅(就是弦)则为5。此后，人们就简单地把这个事实说成“勾三股四弦五”。

由于勾股定理的内容最早见于商高的话中，所以人们就把这个定理叫作“商高定理”。

那么，自勾股定理被发现直到现在这几千年的时间里，它又有什么有趣的经历呢？

## 数学探秘

### 勾股定理的证明

勾股定理是几何学中的明珠，既重要又简单，所以它充满魅力，千百年来，人们对它的证明乐此不疲，其中有著名的数学家，也有业余数学爱好者，有普通的老百姓，也有一些国家的政要权贵，甚至有国家总统。

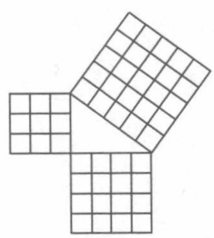


图 1-2

1940年出版过一本名为《毕达哥拉斯命题》的勾股定理的证明专辑，其中收集了367种不同的证明方法。

实际上还不止于此，有资料表明，关于勾股定理的证明方法已有500余种，仅我国清末数学家华蘅芳就提供了20多种精彩的证法。这是任何定理都无法比拟的。

图1-3 华蘅芳

在这数百种证明方法中，有的十分精彩，有的十分简洁，有的因为证明者身份的特殊而非常著名。下面，让我们一起来探讨几种经典的证明方法。

证法一：赵爽证法

以 $a,b(b>a)$ 为直角边，以 $c$ 为斜边，作4个全等的直角三角形，则每个直角三角形的面积等于 $\frac{1}{2}ab$，把4个直角三角形拼成如图1-4所示的形状。

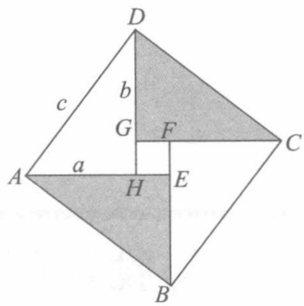



图1-4

$\because \mathrm{Rt}\triangle DAH \cong \mathrm{Rt}\triangle ABE$，

$\therefore \angle HDA = \angle EAB$。

$\because \angle HAD + \angle HDA = 90^\circ$，

$\therefore \angle EAB + \angle HAD = 90^\circ$。

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是一个边长为 $c$ 的正方形，面积为 $c^2$。

$\therefore \angle HEF = 90^\circ$。

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是一个边长为 $(b-a)$ 的正方形，面积为 $(b-a)^2$。

$\therefore 4\times\frac{1}{2}ab+(b-a)^2=c^2$，

即 $a^2+b^2=c^2$。

赵爽的这个证明可谓别具匠心，极富创新意识。他通过几何图形的截、割、拼、补来证明代数式之间的恒等关系，既具严密性，又具直观性，为中国古代以形证数、形数统一、代数和几何紧密结合且互不可分的独特风格树立了一个典范，以后的数学家大多继承了这一风格并且有所发展。

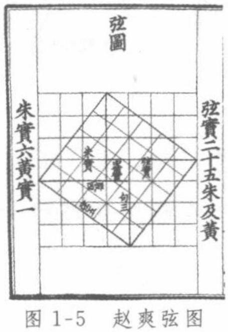



图1-5 赵爽弦图

2002年，在北京召开的国际数学家大会就采用“赵爽弦图”作为会标，这足以说明先人们对于我国乃至世界数学的发展和进步做出了伟大的贡献，这是对我国古代数学辉煌成就的充分肯定。

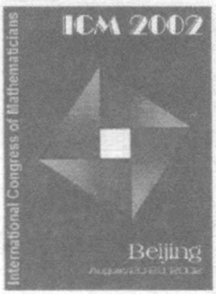



图1-6　2002年国际数学家大会会标

与赵爽同一时代的数学家刘徽，在证明勾股定理时也是沿用了以形证数的方法，只是具体图形的分、合、移、补略有不同。

图1-7　刘　徽

刘徽给出了“青朱出入图”，将青、朱两块移出、拼入，便很简单地证明了勾股定理。

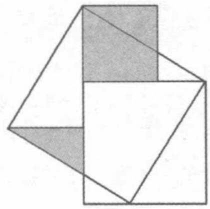


图1-8　青朱出入图

中国古代数学家们对于勾股定理的发现和证明，在世界数学史上具有独特的贡献和地位，尤其是其中体现出来的“形数统一”的思想方法，更具有科学创新的重大意义。事实上，“数形统一”的思想方法正是数学发展的一个极其重要的条件，正如中国数学家吴文俊所说：“在中国的传统数学中，数量关系与空间形式往往是形影不离并肩地发展着的……17世纪笛卡尔解析几何的发明，正是中国这种传统思想与方法在几百年停顿后的重现与继续。”

图1-9　吴文俊

证法二："总统"证法

1876 年一个周末的傍晚，在美国首都华盛顿的郊外，有一位中年人正在散步，欣赏着黄昏的美景，他就是当时美国俄亥俄州共和党议员，后来成为第 20 任美国总统的加菲尔德。他走着走着，突然发现附近的一个小石凳上，有两个小孩正在聚精会神地谈论着什么，时而大声争论，时而小声探讨。在好奇心的驱使下，加菲尔德循声向两个小孩走去，想搞清楚两个小孩到底在干什么。只见一个小男孩正俯着身子用树枝在地上画着一个直角三角形，于是加菲尔德便问他们在干什么，那个小男孩头也不抬地说："请问先生，如果直角三角形的两条直角边分别为 3 和 4，那么斜边长为多少呢?"加菲尔德答道："是 5 呀。"小男孩又问道："如果两条直角边长分别为 5 和 7，那么这个直角三角形的斜边长又是多少?"加菲尔德不假思索地回答道："那斜边的平方一定等于 5 的平方加上 7 的平方。"小男孩又说："先生，你能说出其中的道理吗?"加菲尔德一时语塞，无法解释了，心里很不是滋味。

于是，加菲尔德不再散步，立即回家，潜心探讨小男孩给他出的难题。他经过反复思考与演算，终于弄清了其中的道理，并给出了简洁的证明方法。

图 1-10　加菲尔德

下面，我们介绍的是加菲尔德对勾股定理的证法。

以 $a,b$ 为直角边，以 $c$ 为斜边，作两个全等的直角三角形，则每个直角三角形的面积等于 $\frac{1}{2}ab$。把这两个直角三角形拼成如图 1-11 所示的形状，使 $A,E,B$ 三点在一条直线上。

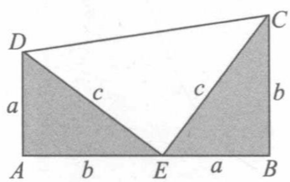



图 1-11

$\because \mathrm{Rt}\triangle EAD \cong \mathrm{Rt}\triangle CBE$，

$\therefore \angle ADE = \angle BEC$。

$\because \angle AED + \angle ADE = 90^\circ$，

$\therefore \angle AED + \angle BEC = 90^\circ$。

$\therefore \angle DEC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$。

$\therefore \triangle DEC$ 是一个等腰直角三角

形，且面积为$\frac{1}{2}c^2$。

∵$\angle DAE=90^\circ$，$\angle EBC=90^\circ$，

∴$AD/\!/BC$。

∴四边形 $ABCD$ 是一个直角梯形，且面积为$\frac{1}{2}(a+b)^2$。

∴$\frac{1}{2}(a+b)^2=2\times\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2$，

即 $a^2+b^2=c^2$。

证法三：欧几里得证法

古希腊数学家欧几里得被称为“几何之父”，他活跃于托勒密一世时期的亚历山大里亚，他最著名的著作《几何原本》是欧洲数学的基础，总结了平面几何五大公设，被广泛认为是历史上最成功的教科书。

图 1-12 《几何原本》

欧几里得也写了一些关于透视、圆锥曲线、球面几何学及数论的作品，是几何学的奠基人。

下面，我们一起来看一下这位伟大的数学家对于勾股定理的证明。

图 1-13 欧几里得

作三个边长分别为 $a,b,c$ 的正方形，把它们拼成如图 1-14 所示的形状，使 $H,C,B$ 三点在一条直线上，连接 $BF,CD$,过点 $C$ 作 $CL\perp DE$，交 $DE$ 于点 $L$。

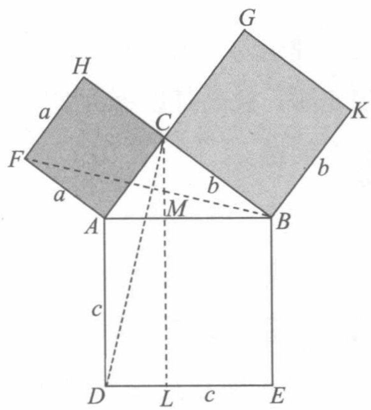



图 1-14

∵$AF=AC$，$AB=AD$，$\angle FAB=\angle CAD$，

∴$\triangle FAB\cong\triangle CAD$。

∵$\triangle FAB$ 的面积等于$\frac{1}{2}a^2$，

$\triangle CAD$ 的面积等于矩形 $ADLM$ 面积的一半，

$\therefore$ 矩形 $ADLM$ 的面积为 $a^2$。

同理可证矩形 $MLEB$ 的面积为 $b^2$。

$\because S_{正方形ADEB}=S_{矩形ADLM}+S_{矩形MLEB}$，

$\therefore c^2=a^2+b^2$，即 $a^2+b^2=c^2$。

## 数学应用

### 生活中的勾股定理

数学源于实际，数学的发展主要依赖于生产实践。从数学应用的角度来处理数学、阐释数学、呈现数学，可以提高理论知识的可利用水平。利用勾股定理，我们可以解决实际生活中的许多问题。

一、地基是否合格

【例 1】 如图 1-15 所示，这是一农民建房时挖地基的平面图，按标准应为长方形。他在挖完后测量了一下，发现 $AB=DC=8$ m，$AD=BC=6$ m，$AC=9$ m。请你帮他看一下，他挖的地基是否合格？

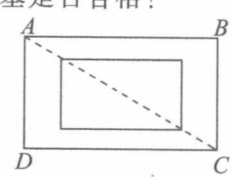



图 1-15

**分析：** 本题是数学问题在生活中的实际应用，所以我们要把实际问题转化为数学问题加以解决。运用勾股定理，根据直角三角形的判别条件，很容易判定它的形状。

**解答：** $\because AD^2+DC^2=6^2+8^2=100$，$AC^2=9^2=81$，

$\therefore AD^2+DC^2\neq AC^2$。

$\therefore \triangle ABC$ 不是直角三角形。

$\because$ 标准的长方形四个角都是直角，

$\therefore$ 该农民挖的地基不合格。

二、地毯的价格

【例 2】 如图 1-16 所示，在高为 3 m、斜坡长为 5 m 的楼梯表面铺地毯，则地毯的长度至少需要多少米？若楼梯宽 2 m，每平方米地毯需 30 元，那么铺这块地毯需要花多少元？

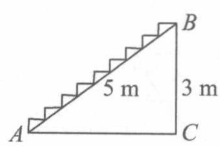



图 1-16

**分析：** 从表面看，每个台阶水平和竖直的长度都求不出来，但仔细观察可以发现，楼梯水平方向的长度之和为 $AC$，竖直方向的长度之和为 $BC$，要求地毯的长度，只需利用勾

股定理先求出 $AC$，再求 $AC+BC$ 即可。

**解答：** 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AC^2+BC^2=AB^2$，

$\therefore AC^2=AB^2-BC^2=16$，

即 $AC=4$ m。

$\therefore$ 地毯的长度为 $AC+BC=7$ m。

$\therefore$ 地毯总面积为 $7\times2=14(\text{m}^2)$，

需要花费 $30\times14=420$(元)。

本题是一道生活中的实际问题，解决此问题的关键是从实际问题中构建数学模型，即直角三角形，借助勾股定理求出 $AC$ 的长。

三、噪音问题

【例 3】按照有关规定：铁路两侧 30 m 内严禁新建居民住宅、学校和医院等噪声敏感建筑物；距铁路外轨中心线两侧 30 m 以外、200 m 以内的区域内不宜临路新建学校、医院、敬老院和集中住宅区等噪声敏感建筑物。

如图 1-17 所示，这是一个小区的平面示意图，矩形 $ABEF$ 为一新建小区，直线 $MN$ 为高铁轨道，$C$，$D$ 是直线 $MN$ 上的两点，点 $C$，$A$，$B$ 在同一直线上，且 $DA\perp CA$，$\angle ACD=30°$。小王看中了①号楼 $A$ 单元的一套住宅，她与售楼人员的对话如下。

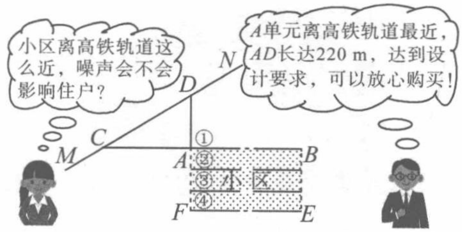



图 1-17

(1)小王心中一算，发现售楼人员的话不可信，请你用所学的数学知识说明理由。

(2)一列长度为 228 m 的高铁以 252 km/h 的速度通过时，$A$ 单元住户受到影响的时间有多长？

(提示：$\sqrt{2}\approx1.4$，$\sqrt{3}\approx1.7$，$\sqrt{37}\approx6.1$)

**分析：** (1)如图 1-18 所示，过点 $A$ 作 $AG\perp MN$，垂足为 $G$，根据三角函数可求出 $AG$ 的长，再与 200 m 比较大小即可求解。

(2)在 $MN$ 上找到点 $S$，$T$，使得 $AS=AT=200$ m，根据勾股定理可求出 $GT$ 的长，根据三角函数可求出 $ST$ 的长，依照高铁的速度，进一步得到 $A$ 单元住户受到影响的时间。

**解答：** (1)过点 $A$ 作 $AG\perp MN$，垂足为 $G$。

$\because \angle ACD=30°$，$DA\perp CA$，

$\therefore \angle ADC=60°$。

$\because AD=220\ \text{m}$，

$\therefore AG=AD\sin 60^\circ=110\sqrt{3}\ \text{m}$。

$\because 110\sqrt{3}\approx 187<200$，

$\therefore A$ 单元用户会受到影响，售楼人员的说法不可信。

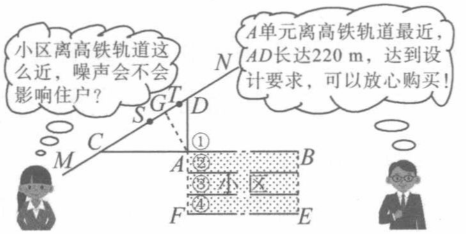



图 1-18

(2) 在 $MN$ 上找到点 $S$，$T$，使得 $AS=AT=200\ \text{m}$，

$\therefore GT=GS=\sqrt{200^2-(110\sqrt{3})^2}=10\sqrt{37}(\text{m})$。

$\therefore ST=2GT=20\sqrt{37}\ \text{m}\approx 122\ \text{m}$。

$\because$ 速度 $v=252\ \text{km/h}=70\ \text{m/s}$，

$\therefore$ 时间 $t=\dfrac{122+228}{70}=5(\text{s})$，即受影响的时间为 5 s。

## 数学文化

### 勾股定理史话

为纪念 2 500 多年前一个学派和宗教团体——毕达哥拉斯学派成立以及它在文化上的贡献，1955 年，希腊发行了一张邮票，图案由三个棋盘排列而成。这个图案是对数学上一个非常重要定理的说明。在我国，人们称它为勾股定理或商高定理。在欧洲，人们称它为毕达哥拉斯定理。为什么一个定理有这么多名称呢？


图 1-19

本节一开始的小故事正是西汉的数学著作《周髀算经》中商高同周公的一段对话。关于勾股定理的发现，《周髀算经》中说："故禹之所以治天下者，此数之所生也。""此数"指的是"勾三股四弦五"，这句话的意思就是说：勾三股四弦五这种关系在大禹治水时期便已被发现和应用。

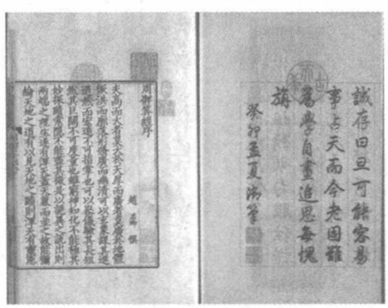


图 1-20 《周髀算经》

欧洲人则称这个定理为毕达哥拉斯定理。毕达哥拉斯是古希腊数学家，他所开创的理性思辨的数学文化奠定了此后西方数学发展的基础。希腊另一位数学家欧几里得在编著《几何原本》时，认为这个定理是毕达哥达斯最早发现的，因而称之为毕达哥拉斯定理。

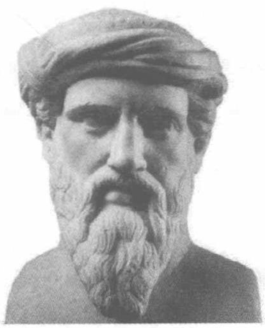


图 1-21 毕达哥拉斯

相传，在公元前 5 世纪，毕达哥拉斯应邀到朋友家做客，餐厅里铺着正方形的大理石地砖。毕达哥拉斯发现，一块地砖以它的对角线为边画一个正方形，这个正方形的面积恰好等于两块地砖的面积之和。于是，他做出了一个大胆的假设：任何直角三角形，其斜边的平方恰好等于另两边的平方之和。在那次宴会上，毕达哥拉斯的视线一直没有离开过地面。在此基础上，他画出了著名的“毕达哥拉斯树”。

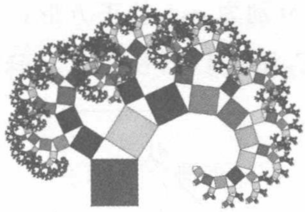


图 1-22 毕达哥拉斯树

据说，毕达哥拉斯在完成这一定理的证明后欣喜若狂，杀牛百头以示庆贺。因此，这一定理还获得了一个带有神秘色彩的称号——百牛定理。

尽管希腊人称勾股定理为毕达哥拉斯定理或百牛定理，法国、比利时人称这个定理为驴桥定理，日本人称这个定理为三平方定理，但据推算，他们发现勾股定理的时间都比我国晚。事实上，很多国家都有关于勾股定理内容的记载。据了解，在现有的记载中，我国的记载是世界上最早的。

## 数学好玩

### 勾股定理的达·芬奇证法

达·芬奇不仅是举世闻名的意大利画家，也是一位科学家，在数学上也偶有佳作。他曾经给出勾股定理的一个美丽的面积证明。

(1)在一张长方形的纸板上画两

个边长分别为 $a,b$ 的正方形，并连接 $BC,FE$，如图 1-23 所示。

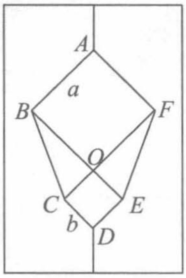



图 1-23

(2)沿 $ABCDEFA$ 剪下，得到两个大小相同的纸板Ⅰ，Ⅱ，如图 1-24 所示。

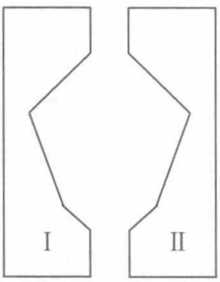



图 1-24

(3)将纸板Ⅱ翻转后与Ⅰ拼成如图 1-25 所示的图形。

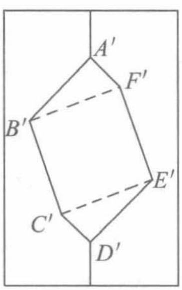



图 1-25

(4)比较图 1-23、图 1-25 中两个多边形 $ABCDEF$ 和 $A'B'C'D'E'F'$ 的面积，你能验证勾股定理吗？

请动手做一做吧。

【参考文献】


1. 欧几里得《几何原本》，重庆出版社 2014 年。

2. 吴文俊《关于研究数学在中国的历史和现状——〈东方数学典籍《九章算术》及其刘徽注研究〉序言》，《自然辩证法通讯》1990 年第 4 期。

3. 彭润珍、王建国《魅力无比的定理证明——勾股定理的证明》，《学问》2009 年第 5 期。

4. 汤林墨、庄侠婷、马志远《通过实验和构造模型探究勾股定理》，《中国科技教育》2010 年第 9 期。

5. 杨秀琴《勾股定理的经典证法》，《初中生世界：八年级》2014 年第 12 期。

6. 张伟俊《勾股定理史话》，《初中生世界：八年级》2015 年第 12 期。