华章教育

面向CS2013计算机专业规划教材

数理逻辑十二讲

宋方敏 吴骏 编著

Lecture Notes in Mathematical Logic

机械工业出版社
China Machine Press

面向CS2013计算机专业规划教材

数理逻辑十二讲

宋方敏 吴骏 编著

Lecture Notes in Mathematical Logic

机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目（CIP）数据

数理逻辑十二讲 / 宋方敏，吴骏编著．—北京：机械工业出版社，2017.3
（面向 CS2013 计算机专业规划教材）

ISBN 978-7-111-58122-2

I. 数… II. ① 宋… ② 吴… III. 数理逻辑－高等学校－教材 IV. O141

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 241540 号

本书讲授数理逻辑的基础概念和基本理论，主要介绍命题逻辑和一阶逻辑．通过本书的学习，学生将掌握相关的基本概念、基本理论、基本推理，以及公理系统和形式化方法．本书主要内容包括命题逻辑和一阶逻辑的 Hilbert 系统和 Gentzen 系统，以及四个重要定理：Hauptsatz、完全性定理、紧性定理和 Herbrand 定理．数理逻辑是以公理系统和数学证明为研究对象的数学分支，对信息科学与技术的发展具有指导作用．

本书为掌握计算机科学的基础，对培养学生的素养以及提高其解决问题的能力有重要的意义．

出版发行：机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码：100037）

责任编辑：佘 洁	责任校对：李秋荣
印 刷：北京瑞德印刷有限公司	版 次：2018 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
开 本：185mm × 260mm 1/16	印 张：10
书 号：ISBN 978-7-111-58122-2	定 价：39.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

客服热线：(010) 88378991 88361066　　投稿热线：(010) 88379604

购书热线：(010) 68326294 88379649 68995259　　读者信箱：hzjsj@hzbook.com

前 言

数理逻辑是用数学研究逻辑推理的一门学科，旨在为推理思维建立数学模型。19世纪中叶，数理逻辑就已作为一门科学存在，在20世纪中叶它得到蓬勃发展，由于Russell、Hilbert和Brouwer代表的三大学派的建立，数理逻辑迎来了一个新时代。1931年Gödel“两个不完备定理”的发表、1933年Tarski关于形式语言中的“真”概念的发表、1934年Herbrand-Gödel“一般递归函数”概念的发表，以及1936年Turing关于“判定性问题”的论文，使数理逻辑开始了一个更新的时代。

此后数理逻辑对数学基础、哲学和计算机科学都产生了重大影响。

本书主要介绍命题逻辑和一阶逻辑，这是非常重要的基础理论。为了使学生易学易懂，我们既介绍Gentzen系统，又介绍Hilbert系统。然后讲解数理逻辑的4个基本定理：完全性定理、紧性定理、Hauptsatz和Herbrand定理。最后我们介绍了模态逻辑。

本书源于作者在南京大学已试用多年的讲义，许多同学对讲义内容和习题提出了大量宝贵意见，在此作者表示衷心感谢。最后感谢我们的家人一直以来的支持和关心。

由于作者才疏学浅，本书内容一定存在不足和错误，希望读者批评指正。

作者

2016年于南京大学仙林校区

目　录

CHAPTER 1

第一讲

命题逻辑

命题逻辑（Propositional Logic）引入了逻辑联结词，是一种最基本的逻辑.

1.1 命题逻辑的语法

首先建立命题逻辑的语言.

定义1.1 (字母表). *字母表由以下成分组成:*

1. *命题符:* $P_0, P_1, P_2, \cdots, P_n, \cdots, n \in \mathbf{N}$, *记* $PS = \{P_n \mid n \in \mathbf{N}\}$

2. *联结词:* $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$

3. *辅助符:* (,)

注:

1. 本书中，命题符之集 PS 为可数无穷集，即$|PS| = \aleph_0$.

2. 有些书籍还引入其他一些联结词，如 $\leftrightarrow$ 等.

3. 为了表达更清楚，我们可再引入一些辅助符，如 [,] 等.

以下定义命题.

定义1.2 (命题).

1. 命题符为命题;
2. 若 A, B 为命题, 则 $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ 和 $(A \to B)$ 为命题;
3. 命题仅限于此.

用封包法也可定义命题:

令 $C_\neg$, $C_\wedge$, $C_\vee$, $C_\to$ 为所有字母表符号串之集上的函数:

$$C_\neg(A) = (\neg A)$$

$$C_*(A, B) = (A * B)$$

这里 $* \in \{\wedge, \vee, \to\}$.

定义1.3 (命题集). 所有命题的集合 $PROP$ 是满足以下条件的最小集合:

1. $PS \subseteq PROP$;
2. 若 $A \in PROP$, 则 $C_\neg(A) \in PROP$;
3. 若 $A, B \in PROP$, 则 $C_\wedge(A, B)$、$C_\vee(A, B)$ 和 $C_\to(A, B) \in PROP$;

即 $PROP$ 为函数 $C_\neg$, $C_\wedge$, $C_\vee$ 和 $C_\to$ 下 PS 的归纳闭包.

引理1.4 (括号引理). 若 A 为命题, 则 A 中所有左括号的个数等于右括号的个数.

引理1.5 $A \in PROP$等价于存在有穷序列 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 使 A 为 A_n 且对任何 $i \leqslant n$,

或**(a)** $A_i \in PS$

或**(b)** 存在 $k < i$ 使 A_i 为 $(\neg A_k)$

或**(c)** 存在 $k, l < i$ 使 A_i 为 $(A_k * A_l)$, 这里 $*$ 为 $\wedge$, $\vee$, $\to$ 之一

以上序列 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 被称为 A 的构造序列.

证明: 令 $PROP' = \{A \mid$ 存在有穷序列 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 使 A_n为A 且对任何 $i \leqslant n$ 或 (a)$A_i \in PS$ 或 (b) 存在 $k < i$ 使 A_i 为 $(\neg A_k)$ 或 (c) 存在 $k, l < i$ 使 A_i 为 $(A_k * A_l)$, 这里 $*$ 为 $\wedge, \vee, \to$ 之一$\}$. 欲证 $PROP = PROP'$, 只需证 (1) $PROP' \subseteq PROP$ 和 (2) $PROP \subseteq PROP'$.

(1) 设 $A \in PROP'$，从而有 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 满足对任何 $i \leqslant n$ 有 (a) 或 (b) 或 (c). 对 i 归纳证明 $A_i \in PROP$.

奠基: $i = 0$，易见 $A_0 \in PS$ 从而 $A_0 \in PROP$.

归纳假设(I.H.): 设对任何 $k < i$ 有 $A_k \in PROP$.

归纳步骤: 对于i

情况(a): $A_i \in PS$ 从而 $A_i \in PROP$.

情况(b): A_i 为 $(\neg A_k)$，这里 $k < i$，从而由归纳假设可知 $A_k \in PROP$，因此 $A_i \in PROP$.

情况(c): A_i 为 $(A_k * A_l)$，这里 $k, l < i$，从而由归纳假设可知 $A_k, A_l \in PROP$，因此 $A_i \in PROP$.

归纳完成，故 $A_n \in PROP$，因此 $PROP' \subseteq PROP$.

(2) 由于 $PROP$ 为满足定义 1.3 中条件 (1)、(2) 和 (3) 的最小集合，故只需证 $PROP'$ 满足定义1.3中条件 (1),(2) 和(3). 易见 $PS \subseteq PROP'$，又当 $A, B \in PROP'$ 时 A, B 有构造序列 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 和 $B_0, B_1, \cdots, B_m$，从而 $(\neg A)$ 有构造序列 $A_0, A_1, \cdots, A_n, (\neg A)$，且 $(A * B)$ 有构造序列 $A_0, A_1, \cdots, A_n, B_0, B_1, \cdots, B_m, (A * B)$，从而 $PROP'$ 满足定义 1.3 中的条件，故 $PROP \subseteq PROP'$. □

这样每个命题皆有构造过程，但构造过程不一定唯一. 若 $A_0, A_1, \cdots, A_n$ 为 A 的最短构造过程，则称 n 为 A 的构造长度. 下面常常会对 A 的结构作归纳证明一些性质，事实上是对 A 的构造长度作归纳，而这是自然数上的归纳.

1.2 命题逻辑的语义

本节给出命题逻辑的语义以及定义命题的可满足性和永真性概念.

定义1.6 令真值集 $\mathbf{B}$=$\{$T,F$\}$,

- 联结词 $\neg$ 被解释为一元函数 $H_\neg : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$;
- 联结词 $*$ 被解释为二元函数 $H_* : \mathbf{B}^2 \to \mathbf{B}$, 这里$* \in \{\wedge, \vee, \to\}$;
- $H_\neg$, $H_\wedge$, $H_\vee$, $H_\to$ 定义如下:

P	Q	$H_\neg(P)$	$H_\wedge(P,Q)$	$H_\vee(P,Q)$	$H_\to(P,Q)$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	F	F	T

这就是所谓的真值表.

定义1.7 (命题的语义).

- v 为一个赋值指它为函数 $v : PS \to \mathbf{B}$, 从而对任何命题符 P_i, $v(P_i)$ 为T或F.
- 对于任何赋值 v, 定义 $\hat{v} : PROP \to \mathbf{B}$ 如下:

  $\hat{v}(P_n) = v(P_n)$, $n \in \mathbf{N}$;

  $\hat{v}(\neg A) = H_\neg(\hat{v}(A))$;

  $\hat{v}(A * B) = H_*(\hat{v}(A) * \hat{v}(B))$, 这里 $* \in \{\wedge, \vee, \to\}$.

对于命题 A, 它的解释 $\hat{v}(A)$ 为 T 或 F.

事实上, 真值 $\hat{v}(A)$ 仅与 A 中出现的命题符有关.

设 A 为命题, 令 $FV(A) = \{ P \in PS \mid P \text{ 出现于 } A \text{ 中} \}$.

引理1.8 设 A 为命题, v_1, v_2 为赋值, 若 $v_1 \upharpoonright FV(A) = v_2 \upharpoonright FV(A)$, 则 $\hat{v}_1(A) = \hat{v}_2(A)$.

证明: 设 $v_1 \upharpoonright FV(A) = v_2 \upharpoonright FV(A)$, 即对于 $P \in FV(A)$, $v_1(P) = v_2(P)$.以下对 A 的结构作归纳证明 $\hat{v}_1(A) = \hat{v}_2(A)$... (*).

奠基: 当 $A \in PS$ 时，易见 (*) 成立.

归纳假设: 设 A为B,C 时， (*) 成立.

归纳步骤:

情况$\neg$: A 为 $\neg B$，

$$\hat{v}_1(A) = \hat{v}_1(\neg B) = H_\neg(\hat{v}_1(B)) \overset{\text{I.H.}}{=} H_\neg(\hat{v}_2(B)) = \hat{v}_2(\neg B) = \hat{v}_2(A)$$

情况$*$: $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$，$A$ 为 $B * C$.

$$\hat{v}_1(A) = \hat{v}_1(B * C) = H_*(\hat{v}_1(B), \hat{v}_1(C)) \overset{\text{I.H.}}{=} H_*(\hat{v}_2(B), \hat{v}_2(C))$$

$$= \hat{v}_2(B * C) = \hat{v}_2(A)$$

□

例1.1 设 A 为 $(\neg((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)))$，$v$ 为赋值且 $P, Q \in PS$. 若 $v(P)$=T,$v(Q)$=F，则计算 $\hat{v}(A)$ 如下表:

P	Q	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$	A
T	F	F	T	F	T

定义1.9 设 A 为命题，v 为赋值.

1. v 满足 A，记为 $v \vDash A$，指 $\hat{v}(A)$=T.

2. A 为永真式 (tautology)，记为 $\vDash A$，指对任何 v 有 $\hat{v}(A)$=T;

3. A 可满足，指有 v 使 $v \vDash A$;

4. 设 Γ 为命题集，A 为 Γ 的语义结论，记为 $\Gamma \vDash A$，指对所有 v，若对任何 $B \in \Gamma$ 有 $\hat{v}(B)$=T 则 $\hat{v}(A)$=T.

例1.2 $A \rightarrow A$，$\neg\neg A \rightarrow A$，$(A \wedge B) \rightarrow (B \wedge A)$ 为永真式.

例1.3 证明$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$ 为永真式.

证明: 可列出如下真值表:

A	B	$(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	T

□

注意：$\models$ 不是该语言中的符号，而是在上层语言 (meta-language) 中. 在上层语言中，人们也需要用联结词，如 iff, not, and, or, imply 等. 例如我们有

- $v \models \neg A$ iff not $v \models A$
- $v \models (A \wedge B)$ iff $(v \models A)$ and $(v \models B)$
- $v \models (A \vee B)$ iff $(v \models A)$ or $(v \models B)$
- $v \models (A \to B)$ iff $(v \models A)$ implies $(v \models B)$

下面我们讨论联结词的独立性.

定义1.10 设 A 为命题，$FV(A) = \{Q_1, \cdots, Q_n\}$.$n$ 元函数 $H_A : \mathbf{B}^n \longrightarrow \mathbf{B}$ 定义如下：对于任何 $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbf{B}^n$，$H_A(a_1, \cdots, a_n) = \hat{v}(A)$，这里赋值 v 满足 $v(Q_i) = a_i (1 \leqslant i \leqslant n)$. 下面称 $f : \mathbf{B}^n \longrightarrow \mathbf{B}$ 为 n 元真值函数，称 H_A 为由 A 定义的真值函数.

例1.4 设 A 为 $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$，由下列真值表知 $H_A : \mathbf{B}^2 \longrightarrow \mathbf{B}$ 为不可兼或运算.

P	Q	A	$H_A(P,Q)$
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

由 A 可定义真值函数 H_A，反之给定真值函数 $f : \mathbf{B}^n \longrightarrow \mathbf{B}$，是否存在命题 A 使 $f = H_A$？回答是肯定的.

我们先引入一些术语.

定义1.11

1. 命题 A 为析合范式 ($\vee\wedge$-nf) 指 A 呈形 $\bigvee_{i=1}^{m}(\bigwedge_{k=1}^{n} P_{i,k})$，这里 $P_{i,k}$ 为命题符或命题符的否定(即呈形 $\neg P_i$).

2. 命题 A 为合析范式 ($\wedge\vee$-nf) 指 A 呈形 $\bigwedge\limits_{j=1}^{l}(\bigvee\limits_{k=1}^{n} Q_{j,k})$，这里 $Q_{j,k}$ 为命题符或命题符的否定. 其中，$\bigwedge\limits_{k=1}^{n} B_k$ 为 $(\cdots(((B_1\wedge B_2)\wedge B_3)\cdots\wedge B_n)\cdots)$ 的简写；$\bigvee\limits_{k=1}^{n} B_k$ 为 $(\cdots(((B_1\vee B_2)\vee B_3)\cdots\vee B_n)\cdots)$ 的简写.

定理1.12　设 $f:\mathbf{B}^n\longrightarrow\mathbf{B}$,

1. 存在命题 A，其为 $\vee\wedge$-nf 使 $f=H_A$；

2. 存在命题A'，其为 $\wedge\vee$-nf 使 $f=H_{A'}$.

证明: 设$f:\mathbf{B}^n\longrightarrow\mathbf{B}$，令

- $T_f=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{B}^n\mid f(x_1,\cdots,x_n)=\mathrm{T}\}$
- $F_f=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{B}^n\mid f(x_1,\cdots,x_n)=\mathrm{F}\}$

$\because$ T_f 和 F_f 皆为有穷集，$\therefore$ 可设

- $T_f=\{(a_{i1},\cdots,a_{in})\in\mathbf{B}^n\mid 1\leqslant i\leqslant m\}$
- $F_f=\{(b_{j1},\cdots,b_{jn})\in\mathbf{B}^n\mid 1\leqslant j\leqslant l\}$

这里 $m+l=2^n$. 令

$$P^*_{i,k}=\begin{cases}P_k,\ \text{若}\ a_{ik}=\mathrm{T},\\ \neg P_k,\text{若}\ a_{ik}=\mathrm{F}.\end{cases}$$

$$A=\bigvee_{i=1}^{m}(\bigwedge_{k=1}^{n}P^*_{i,k})$$

又令

$$Q^*_{j,k}=\begin{cases}\neg P_k,\text{若}\ b_{jk}=\mathrm{T},\\ P_k,\ \text{若}\ b_{jk}=\mathrm{F}.\end{cases}$$

$$A'=\bigwedge_{j=1}^{l}(\bigvee_{k=1}^{n}Q^*_{jk})$$

易见 $FV(A)=\{P_1,P_2,\cdots,P_n\}$.

欲证 $H_A=f$，

只需证：令 $v(P_i)=x_i$，有 $f(x_1,\cdots,x_n)=\hat{v}(A)$

只需证：$\hat{v}(A)$=T iff $(x_1,\cdots,x_n)\in T_f$，即 $v\vDash A$ iff $(x_1,\cdots,x_n)\in T_f$

$\because$

$$\begin{aligned}
v\vDash A \text{ iff } & v\vDash \bigvee_{i=1}^{m}\left(\bigwedge_{k=1}^{n}P_{i,k}^{*}\right)\\
\text{iff } & \text{有 } i\leqslant m \text{ 使} v\vDash \left(\bigwedge_{k=1}^{n}P_{i,k}^{*}\right)\\
\text{iff } & \text{有 } i\leqslant m \text{ 使对所有 } k\leqslant n \text{ 有} v\vDash P_{i,k}^{*}\\
\text{iff } & \text{有 } i\leqslant m \text{ 使对所有 } k\leqslant n \text{ 有} \hat{v}(P_{i,k}^{*})=\mathrm{T}\\
\text{iff } & \text{有 } i\leqslant m \text{ 使对所有 } k\leqslant n \text{ 有} v(P_k)=a_{ik}\\
\text{iff } & \text{有 } i\leqslant m \text{ 使对所有 } k\leqslant n \text{ 有} x_k=a_{ik}\\
\text{iff } & \text{有 } i\leqslant m \text{ 使}(x_1,\cdots,x_n)=(a_{i1},\cdots,a_{in})\\
\text{iff } & (x_1,\cdots,x_n)\in T_f
\end{aligned}$$

$\therefore$ $H_A=f$, 同理可证 $H_{A'}=f$. □

例1.5 求 $((P\wedge Q)\to R)\wedge P$ 的 $\wedge\vee$-nf 和 $\vee\wedge$-nf.

解: 不妨设 $P,Q,R\in PS$.

先计算出下列真值表

P	Q	R	$((P\wedge Q)\to R)\wedge P$	$\vee\wedge$-nf	$\wedge\vee$-nf
T	T	T	T	$P\wedge Q\wedge R$	
T	T	F	F		$\neg P\vee\neg Q\vee R$
T	F	T	T	$P\wedge\neg Q\wedge R$	
T	F	F	T	$P\wedge\neg Q\wedge\neg R$	
F	T	T	F		$P\vee\neg Q\vee\neg R$
F	T	F	F		$P\vee\neg Q\vee R$
F	F	T	F		$P\vee Q\vee\neg R$
F	F	F	F		$P\vee Q\vee R$

它的 $\vee\wedge$-nf:

$$(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge \neg R)$$

它的 $\wedge\vee$-nf:

$$(\neg P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee \neg Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q \vee R) \wedge (P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee Q \vee R) \qquad \square$$

定义1.13　设 A，B 为命题，A 与 B 逻辑等价，记为 $A \simeq B$，指对任何赋值 v，

$$v \vDash A \text{ iff } v \vDash B$$

命题1.14

1. $A \simeq A$;

2. 若 $A \simeq B$，则 $B \simeq A$;

3. 若 $A \simeq B$ 且 $B \simeq C$，则 $A \simeq C$;

4. 若 $A \simeq B$，则 $(\neg A) \simeq (\neg B)$;

5. 若 $A_1 \simeq B_1$ 且$A_2 \simeq B_2$，则 $(A_1 * A_2) \simeq (B_1 * B_2)$ ，这里 $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$.

证明留作习题.

命题1.15　设 $FV(A \wedge B) = \{Q_1, \cdots, Q_n\}$ 且 $H_A : \mathbf{B}^n \longrightarrow \mathbf{B}$，$H_B : \mathbf{B}^n \longrightarrow \mathbf{B}$. 我们有 $A \simeq B$ iff $H_A = H_B$.

命题1.16　若 A 为命题，则存在 $\wedge\vee$-nf B 和 $\vee\wedge$-nf B' 使 $A \simeq B$ 且 $A \simeq B'$，这时称 B 和 B' 分别为 A 的 $\wedge\vee$-nf 和 $\vee\wedge$-nf.

证明: 由定理 1.12 和命题 1.15 即得. $\square$

由定理 1.12 知，对于任何 n 元真值函数 f，存在命题 A ，其中仅用联结词 $\neg$，$\wedge$，$\vee$ 使 $f = H_A$.这就说明 $\{\neg, \wedge, \vee\}$ 是联结词的函数完全组. 又由于

- $A \wedge B \simeq \neg(\neg A \vee \neg B)$

- $A \vee B \simeq \neg(\neg A \wedge \neg B)$

故 $\{\neg,\wedge\}$，$\{\neg,\vee\}$，$\{\neg,\rightarrow\}$ 亦为联结词的函数完全组.

例1.6 求 $\neg((P\wedge Q)\rightarrow R)$ 的 $\wedge\vee$-nf 和 $\vee\wedge$-nf.

解:

$$
\begin{aligned}
\because\ & \neg((P\wedge Q)\rightarrow R)\\
&\simeq \neg(\neg(P\wedge Q)\vee R)\\
&\simeq \neg((\neg P\vee\neg Q)\vee R)\\
&\simeq \neg(\neg P\vee\neg Q\vee R)\\
&\simeq (\neg\neg P)\wedge(\neg\neg Q)\wedge\neg R\\
&\simeq P\wedge Q\wedge\neg R
\end{aligned}
$$

$\therefore$ $P\wedge Q\wedge\neg R$ 既为原式的 $\wedge\vee$-nf，又为 $\vee\wedge$-nf. □

1.3 自然推理系统及其性质

定义1.17 一个矢列是一个二元组 (Γ,Δ)，记为 $\Gamma\vdash\Delta$，这里 Γ,Δ 为命题的有穷集合（可为空），称 Γ 为前件，Δ 为后件. 命题逻辑的自然推理系统 G' 由以下公理和规则组成，$\Gamma,\Delta,\Lambda,\Theta$ 表示任何命题有穷集合，A,B 表示任何命题，Γ,A,Δ为集合 $\Gamma\cup\{A\}\cup\Delta$ 的简写.

公理:

$$\Gamma,A,\Delta\vdash\Lambda,A,\Theta$$

规则:

$$\neg L:\frac{\Gamma,\Delta\vdash\Lambda,A}{\Gamma,\neg A,\Delta\vdash\Lambda}\qquad\qquad \neg R:\frac{\Gamma,A\vdash\Lambda,\Theta}{\Gamma\vdash\Lambda,\neg A,\Theta}$$

$$\vee L: \frac{\Gamma, A, \Delta \vdash \Lambda \quad \Gamma, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \vee B, \Delta \vdash \Lambda} \qquad \vee R: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \vee B, \Theta}$$

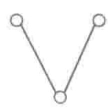
$$\wedge L: \frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \wedge B, \Delta \vdash \Lambda} \qquad \wedge R: \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A, \Theta \quad \Gamma \vdash \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \wedge B, \Theta}$$

$$\to L: \frac{\Gamma, \Delta \vdash A, \Lambda \quad \Gamma, B, \Delta \vdash \Lambda}{\Gamma, A \to B, \Delta \vdash \Lambda} \qquad \to R: \frac{\Gamma, A \vdash \Lambda, B, \Theta}{\Gamma \vdash \Lambda, A \to B, \Theta}$$

$$\text{Cut: } \frac{\Gamma \vdash \Lambda, A \quad \Delta, A \vdash \Theta}{\Gamma, \Delta \vdash \Lambda, \Theta}$$

系统 G' 中只有一条公理，有多条规则，每条规则都有名称，呈形 $\dfrac{S'}{S}$ 或 $\dfrac{S_1, S_2}{S}$，这可以被看作树

或



规则的上矢列S_1, S_2 被称为前提，下矢列S 被称为结论. G' 系统中的规则被称为推理规则，规则中被作用的命题被称为主命题，而不变的命题被称为辅命题.

每个公理和规则都是模式（schema），它们可有无穷多个实例.

例1.7 $\dfrac{A, B \vdash P, D \quad Q, A, B \vdash D}{A, P \to Q, B \vdash D}$ 为 $\to L$ 的实例.

定义1.18 设 Γ 为 $\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$，$\Delta$ 为 $\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$，

1. $\Gamma \vdash \Delta$ 有反例（falsifiable）指存在赋值 v 使 $v \vDash (A_1 \wedge \cdots \wedge A_m) \wedge (\neg B_1 \wedge \cdots \wedge \neg B_n)$，这时称 v 反驳 $\Gamma \vdash \Delta$.

2. $\Gamma \vdash \Delta$ 有效（valid）指对任何赋值 v，$v \vDash (A_1 \wedge \cdots \wedge A_m) \to (B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_n)$，这时称 v 满足 $\Gamma \vdash \Delta$.

3. $\Gamma \vdash \Delta$ 有效也被记为 $\Gamma \vDash \Delta$.

4. 当 $m=0$ 时，$\vdash B_1,\cdots,B_n$ 有反例指 $(\neg B_1 \wedge \cdots \wedge \neg B_n)$ 可满足；$\vdash B_1,\cdots,B_n$ 有效指 $(B_1 \vee \cdots \vee B_n)$ 永真.

5. 当 $n=0$ 时，$A_1,\cdots,A_n \vdash$ 有反例指 $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_m)$ 可满足；$A_1,\cdots,A_m \vdash$ 有效指 $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_m)$ 不可满足.

6. 约定 $\{\} \vdash \{\}$ 非有效.

命题1.19　$\Gamma \vdash \Delta$ 有效 iff $\Gamma \vdash \Delta$ 无反例.

引理1.20　对于 G' 系统的每条异于 Cut 的规则,

1. 赋值 v 反驳规则的结论 iff v 至少反驳规则的一个前提;
2. v 满足规则的结论 iff v 满足规则的所有前提;
3. 对于 G' 系统中的每条异于 Cut 的规则，每个前提有效 iff 结论有效.

证明留作习题.

注：若 v 反驳 Cut 的结论，则 v 至少反驳 Cut 的一个前提，反之不然.

反例:

$$\frac{P_1 \vdash P_2 \quad P_2 \vdash P_3}{P_1 \vdash P_3}\,\mathrm{Cut}$$

取 $v(P_1)=v(P_3)=$T，$v(P_2)=$F 即可.

定义1.21　设 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为矢列，树 T 为 $\Gamma \vdash \Lambda$ 的证明树指:

1. 当 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为 G' 公理，以 $\Gamma \vdash \Lambda$ 为节点的单点树 T 为其证明树.
2. 当 $\dfrac{\Gamma' \vdash \Lambda'}{\Gamma \vdash \Lambda}$ 为 G' 规则，若 T' 为 $\Gamma' \vdash \Lambda'$ 的证明树，则树 T: