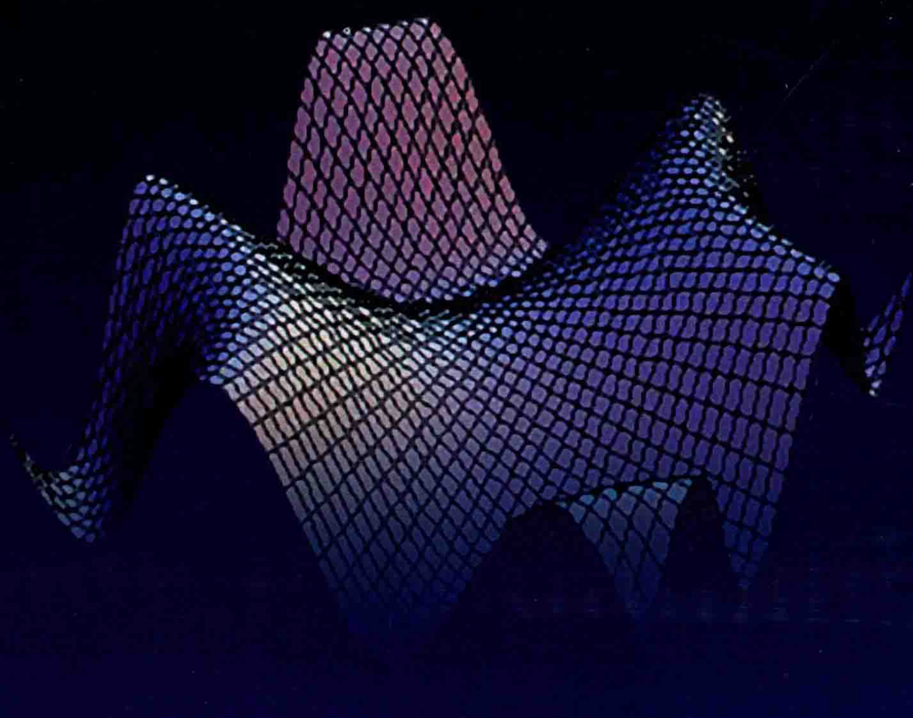
新时期大学数学信息化精品教材丛书

# 医药高等数学

陈丽君　主编



科学出版社

新时期大学数学信息化精品教材丛书

# 医药高等数学

陈丽君 主编

科学出版社

北京

## 内 容 简 介

本书是根据教育部和国家中医药管理局对中医药大学基础课教学的基本要求，紧扣教学大纲，由长期从事高等数学教学工作的教师结合自身多年教学经验编写而成，目的为强化高教本科教育的培养目标，适应高教改革的发展需求. 本书共8章，内容包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学、多元函数积分学、微分方程. 每一章中对基本概念、基本理论、基本方法、基本应用均有归纳和总结，章后安排针对性的习题，书后附有习题答案. 附录中收录了本书中涉及的各类初等数学公式以及相关数学用表. 本书结合科学性与实用性，文字简洁，内容精炼，通俗易学，深入浅出且信息量大，适用面宽，应用性强.

本书主要适用于中医药院校检验学、药学和管理学等专业，还可供中医药大学相关专业不同层次的教学参考，也可作为广大数学爱好者的自学用书.

**图书在版编目(CIP)数据**

医药高等数学/陈丽君主编. —北京：科学出版社，2016.11
(新时期大学数学信息化精品教材丛书)
ISBN 978-7-03-050473-9

Ⅰ.①医… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①医用数学—高等数学—医学院校—教材
Ⅳ.①R311 ②O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2016)第265250号

责任编辑：吉正霞 王 晶／责任校对：董艳辉
责任印制：彭 超／封面设计：苏 波

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
武汉中科兴业印务有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
开本：787×1092 1/16
2016年11月第 一 版 印张：15 3/4
2016年11月第一次印刷 字数：400 000
**定价：36.00元**
(如有印装质量问题，我社负责调换)

# 《医药高等数学》

## 编　委　会


**主　编**　陈丽君

**副主编**　卞　丽　付文娇　花少炎　金国华
周　婷　崔志伟　曾　聃

**主　审**　孙慧娟

**编　委**　（按姓氏笔画排序）
王　艳　卞　丽　付文娇　孙慧娟　花少炎
陈丽君　金国华　周　婷　殷学毅　崔志伟
曾　聃

# 前　　言

随着高等教育改革和创新的不断深入，教学内容和教学方法的改革和创新是巩固和提高教学质量的关键，因此我们始终把教材建设当做十分重要的课题.高等数学作为一门基础学科在自然科学、社会科学及经济活动中有着相当重要的作用和广泛的应用，为此我们组织多位教学经验丰富的教师，结合各专业不同层次对本课程的教学要求和学生实际，对高等数学课程的结构和内容做了认真的研究和探讨，力求"紧扣大纲，易学，实用"，在教学内容的合理取舍，数学概念的深入浅出，及应用数学思想和数学方法分析与解决实际问题的能力培养和训练等方面都做了实实在在富有成效的努力，特别是数学思想和数学现代化手段的应用趋势是我们此次对高等数学课程教学改革新的尝试和一次很有意义的实践.

本教材特点：

(1) 既注重数学学科本身的科学性和系统性，又注重教学内容的深度、广度的适用性，使之有利于学生对本课程的接受和理解.

(2) 注重从实际问题引入基本概念，注重基本概念的几何解释及经济意义和物理意义，教学内容的形象直观便于学生理解、掌握和应用，达到"学以致用，学后会用"的目的，力求全面培养学生的数学素养.

(3) 注重数学知识和数学方法在中医药学科里的广泛应用，凸现数学在现代医药学研究领域的重要作用，促进教学手段的不断改革和创新，同时提高了学生解决数学问题的意识和能力，激发了学生对数学课程的学习兴趣和信心.

(4) 本书共 8 章，适合中医药大学相关专业从 54 学时到 90 学时的不同层次的教学，适用面宽，应用性强，可根据需要侧重选择教学内容.

本书第一章由陈丽君、金国华编写；第二、三章由卞丽编写；第四、五章由付文娇编写；第六章由花少炎、陈丽君编写；第七章由崔志伟编写；第八章由崔志伟编写；附录由陈丽君编写；全书图表设计由曾聃负责；全书审稿由孙慧娟负责.本书在编写、出版过程中得到学校、教务处、学院和科学出版社相关领导和工作人员的全力支持和帮助，在此一并表示衷心的感谢.

教材建设是一项长期艰巨的工作，需要一线教师和经验丰富的教师的实践、积累、思考和参与，需要不断地探索和精益求精，更需要教材使用过程中的反馈而不断完善.由于教材编写的任务重，难度大，加上水平有限，时间紧促，难免有不妥之处，在此恳请专家、同行和读者批评指正，真心希望本教材在教学实践中不断提高和完善.

编　者

2016 年 8 月

# 目　录

# 第一章　函数与极限

函数是描述客观世界中量与量之间的一种依赖关系.高等数学的主要研究对象是函数,研究的基本方法是极限方法.本章在复习和加深函数有关知识的基础上,着重讨论函数的极限及其运算法则,并介绍函数的连续性.它是客观世界中广泛存在的连续变化这一现象的数学描述.

## 第一节　函　数

### 一、函数的概念

在研究某一变化过程时,常常会遇到各种不同的量,如面积、体积、浓度、容量等.在过程中,保持一定数值不变的量称为**常量**,通常记为 $a,b,c$;过程中可以取不同数值的量称为**变量**,通常记为 $x,y,z$.

**例 1**　球的体积公式为 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$,其中 $\pi$ 是固定不变的量,为常量;$r$,$V$ 是变化的量,为变量.

在实际问题中,一个量是常量还是变量,要视情况而定.精确度要求不高时,整个地球上的重力加速度可以看成常量;要求比较精确时,整个地球上不同地点的重力加速度就是变量,同一地点的重力加速度可以看成常量.若考虑地层运动引起重力加速度变化,则同一地点的重力加速度也是变量.

在例 1 球的体积公式中,当半径 $r$ 在 $(0,+\infty)$ 范围内变化时,体积 $V$ 按公式确定的值与之对应.两个变量间的这种依存关系称为函数关系.

在生物、医药、物理、化学中通常需要研究在同一个过程中有相互依赖关系的变量,例如,一定容积一定质量气体的温度与压强、血药浓度与时间、角度与三角函数值、质点运动的位移与时间等.我们来探讨以下几个例子.

**例 2**　一定容积下,气体的温度 $T$ 与压强 $p$ 的关系:

$$p=R\frac{T}{V}\quad (R\text{ 为常数})$$

**例 3**　特殊角正弦三角函数值见表 1-1-1.

**表 1-1-1**

| $\alpha$ | … | 30° | 45° | 60° | 90° | 180° | 270° | … |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | … | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 | $-1$ | … |

**例 4**　成人口服一定量的头孢地尼后血药浓度 - 时间曲线,如图 1-1-1 所示.

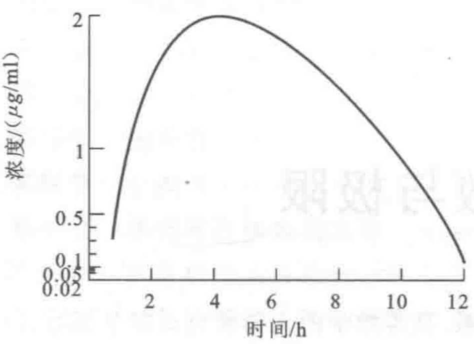



图 1-1-1

以上几个例子,虽然实际意义不同,变量间的对应关系也是不同的方式,但它们都表达了两个变量之间的相互依赖的关系.当一个变量在一定的范围取一个数值时,按照某个规律,另一个变量就有一个确定的值与之对应.这种变量间的依赖关系就是函数关系,于是得到如下函数的定义.

**定义** 设 $x,y$ 为同一过程中的两个变量,若对非空数集 $D$ 中任一 $x$,按照一定对应法则 $f$,总有一个确定的实数 $y$ 与之对应则称 $y$ 与 $x$ 的关系为函数关系,也称 $f$ 是定义在非空数集 $D$ 上的**函数**,记为 $y=f(x)$. $x$ 称为**自变量**,$y$ 称为**因变量**.自变量的取值范围 $D$ 称为**定义域**.

当 $x=x_0$ 时对应的 $y$ 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处的**函数值**,记为 $f(x_0)$,$y|_{x=x_0}$.所有函数值的集合 $M=\{y \mid y=f(x), x\in D\}$ 称为函数的**值域**.

关于函数定义有以下几点说明:

(1) 构成函数的要素是:定义域 $D$ 及对应法则 $f$.如果两个函数的定义域相同,对应法则也相同,那么这两个函数就是同一函数.否则就是不同的.例如,函数 $f(x)=|x|$ 与函数 $g(x)=\sqrt{x^2}$ 两要素都相同,所以是同一函数;而函数 $f(x)=\ln x^2$ 和函数 $g(x)=2\ln x$ 定义域不同,因此不是同一个函数.

(2) 在定义中称对应法则 $f$ 为函数,但习惯上经常称"$y=f(x)$"或者是"$y$"为函数,此时应理解为"由对应关系 $y=f(x)$ 所确定的函数 $f$".

(3) 一般函数的定义域是指自变量所能取的使解析式有意义的一切实数值的集合.在实际问题中,定义域也可根据函数的实际意义来确定.例如,若自变量表示时间 $t$,则通常要求 $t$ 非负.

(4) 函数的表示法有解析法、列表法、图像法.解析法用包含变量的方程来表示函数关系,优点是便于计算和理论分析,如例 2;列表法用表格列出变量间的函数关系,优点是可以不用计算直接从表上读出函数值,如例 3;图像法用坐标系中的图形表示变量间的函数关系,优点是直观、明显,如例 4;在讨论函数的时候,三种表示方法通常结合使用.

如果一个对应法则在定义域 $D$ 的不同变化范围内用不同的式子表示,这样的函数称为分段函数.下面给出几个常见的分段函数.

**例 5** 绝对值函数

$$y=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases} \tag{1-1-1}$$

符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ -1, & x<0 \end{cases} \tag{1-1-2}$$

取整函数 $y=[x]$ 表示不超过 $x$ 的最大整数.

当 $x$ 属于不同区间时，函数的解析式不同. 因而，它们都是分段函数，图形分别如图 1-1-2 ～ 图 1-1-4 所示.

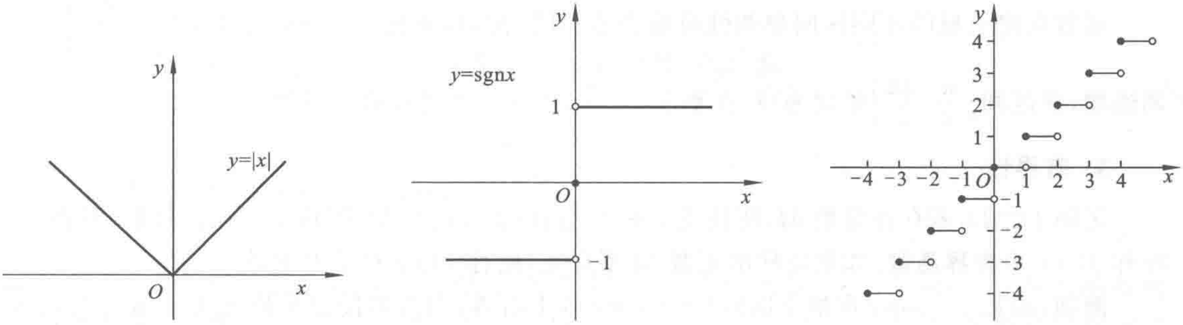



图 1-1-2　　图 1-1-3　　图 1-1-4

在函数的定义中，对每个 $x \in D(f)$，对应的函数值 $y$ 总是唯一的，这样定义的函数称为单值函数. 若给定一个对应法则 $g$，对每个 $x \in D(g)$，总有确定的 $y$ 值与之对应，但这个 $y$ 不总是唯一的，我们称这种法则 $g$ 确定了一个多值函数. 例如，设变量 $x$ 与 $y$ 之间的对应法则由方程 $x^2+y^2=1$ 给出，显然，对每个 $x \in [-1,1]$，由方程 $x^2+y^2=1$ 有确定的 $y$ 值与之对应. 当 $x=1$ 或 $-1$ 时，对应的函数值都只有一个 $y=0$；当 $x \in (-1,1)$ 时，对应的函数值 $y$ 有两个值. 所以这个方程确定了一个多值函数. 在本书中，如果没有特殊说明，所指的函数均指单值函数.

## 二、函数的几个特性

### 1. 奇偶性

设 $f(x)$ 的定义域 $D$ 关于原点对称(即若 $x \in D$，必有 $-x \in D$)，若任意 $x \in D$，总有 $f(-x)=-f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为**奇函数**；若任意 $x \in D$，总有 $f(-x)=f(x)$ 成立，则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

偶函数的图形关于 $y$ 轴对称；奇函数图形关于原点对称.

常见函数有奇函数，有偶函数，也有的既非奇函数也非偶函数. 例如，$y=\dfrac{1}{x}$ 及 $y=\sin x$ 是奇函数；$y=x^2$ 及 $y=\cos x$ 是偶函数；$y=x+\cos x$ 既非奇函数，也非偶函数.

**例 6**　讨论函数 $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ 的奇偶性.

**解**　函数 $f(x)$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 是对称区间，因为

$$
\begin{aligned}
f(-x) &= \ln(-x+\sqrt{1+x^2}) = \ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right) \\
&= \ln(x+\sqrt{1+x^2})^{-1} \\
&= -\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = -f(x)
\end{aligned}
$$

所以，$f(x)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的奇函数.

### 2. 单调性

设函数 $f(x)$ 定义域为 $D$，区间 $I \subset D$，若对 $I$ 中任意两点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$，恒有

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) \quad [\text{或 } f(x_1) \geqslant f(x_2)]$$

则称函数 $f(x)$ 在 $I$ 上是**单调增加**(或**单调减少**)的.

函数在定义域的不同区间单调性可能会不相同.例如,函数 $y = \sin x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 单调递增,在区间 $\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ 单调递减,在整个 $(-\infty,+\infty)$ 区间单调性不唯一.

**3. 有界性**

区间 $I \subset D$,若存在常数 $M$,使任意 $x \in I$,总有 $|f(x)| \leqslant M$,则称 $f(x)$ 在区间 $I$ 有界.此时称 $f(x)$ 为**有界函数**.如果这样的正数 $M$ 不存在,则称 $f(x)$ 在 $I$ 上无界.

例如,函数 $y = \sin x$ 在整个区间 $(-\infty,+\infty)$ 上有界,因为对任意实数 $x$,有 $|\sin x| \leqslant 1$;函数 $y = \frac{1}{x}$ 在区间 $[1,+\infty)$ 上有界,但在区间 $(0,1)$ 上无界.

从几何上看,有界函数的图像介于直线 $y = \pm M$ 之间.

**4. 周期性**

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$,若存在一个不为零的常数 $T$,使得对任意 $x \in D$,有 $(x \pm T) \in D$,且 $f(x+T) = f(x)$,则称 $f(x)$ 为**周期函数**,其中使上式成立的常数 $T$ 称为 $f(x)$ 的**周期**.通常,函数的周期中最小的正数是指它的最小正周期.

例如,三角函数 $y = \sin\omega x$ 是以 $\frac{2\pi}{|\omega|}$ 为最小正周期的周期函数.常数函数 $y = C$ 是以任意常数为周期的周期函数,但由于没有最小的正数,所以常数函数没有最小正周期.

## 三、反函数

前面例 1 提到球的体积公式 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$,对每一个半径 $r$,可以通过规则 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ 确定球的体积.反过来,对一个给定的体积 $V$,则可以通过规则 $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$ 确定该球的半径.在这里称后一个函数 $\left(r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}\right)$ 是前一个函数 $\left(V = \frac{4}{3}\pi r^3\right)$ 的反函数,也可以称它们互为反函数.

一般地,设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $D$,值域为 $M$,若对任一 $y \in M$,能由解析式 $y = f(x)$ 唯一确定 $x \in D$ 与之对应,得到的函数 $x = g(y)$(或记为 $x = f^{-1}(y)$)称为 $y = f(x)$ 的**反函数**,或称它们**互为反函数**;相对于反函数 $x = g(y)$ 或 $x = f^{-1}(y)$ 来说,$y = f(x)$ 称为**原函数**或**直接函数**.此时反函数 $x = f^{-1}(y)$ 的定义域为 $M$,值域是 $D$.

习惯上,自变量用 $x$ 表示,因变量用 $y$ 表示.所以 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 通常写为 $y = f^{-1}(x)$.因此反函数 $y = f^{-1}(x)$ 与直接函数 $y = f(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称.

常见的函数中,例如,对数函数 $y = \ln x$ 与指数函数 $y = e^x$ 互为反函数;三角函数 $y = \sin x$ 与反三角函数 $y = \arcsin x$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 上互为反函数.

直接函数 $y = f(x)$ 单调时,其反函数 $x = f^{-1}(y)$ 是唯一的.直接函数单调性不唯一时,与之对应的反函数可能是多个.例如,$y = x^2$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,在定义区间单调性不唯

一，由 $y=x^2$ 解出 $x=\pm\sqrt{y}$ 所以它在区间 $[0,+\infty)$ 上对应一个反函数 $x=\sqrt{y}$；在区间 $(-\infty,0]$ 上对应另一个反函数 $x=-\sqrt{y}$. $x=\sqrt{y}$ 和 $x=-\sqrt{y}$ 各称为 $y=x^2$ 反函数的一个分支.

# 第二节　初等函数

## 一、基本初等函数

初等数学里已学习过幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数，这几类函数我们统称为**基本初等函数**. 它们是研究各种函数的基础. 为了读者学习的方便，下面我们再对这几类函数作简单地介绍.

**1. 幂函数**

函数

$$y=x^a\ (a\text{ 是常数})$$

称为**幂函数**.

幂函数 $y=x^a$ 的定义域由 $a$ 的取值而定，但不论 $a$ 取什么值，函数在 $(0,+\infty)$ 内总有定义.

当 $a>0$ 时，$y=x^a$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的，其图像过点 $(0,0)$ 及点 $(1,1)$；当 $a<0$ 时，$y=x^a$ 在 $(0,+\infty)$ 上是单调减少的，其图像通过点 $(1,1)$. 图 1-2-1 列出了 $a=-1,a=1,a=2,a=3$ 时幂函数的图像.

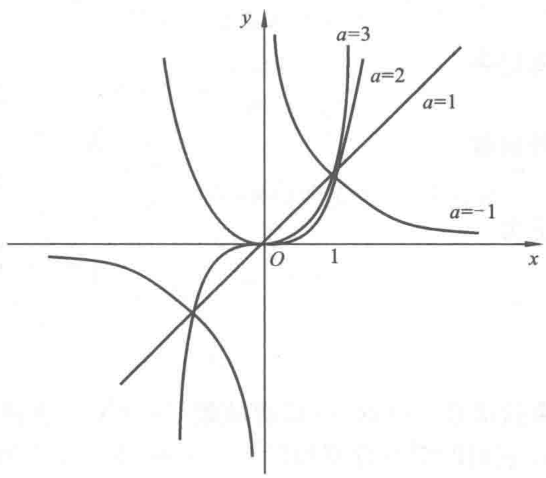



图 1-2-1

**2. 指数函数**

函数

$$y=a^x\ (a\text{ 是常数且 }a>0,a\neq 1)$$

称为**指数函数**.

指数函数 $y=a^x$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，图像通过点 $(0,1)$，且总在 $x$ 轴上方.

当 $a>1$ 时，$y=a^x$ 单调增加；当 $0<a<1$ 时，$y=a^x$ 单调减少，如图 1-2-2 所示.

以常数 $\mathrm{e}=2.71828182\cdots$ 为底的指数函数

$$y=e^x$$

是科学技术中常用的指数函数.

**3. 对数函数**

函数

$$y=\log_a x\quad(a\text{ 是常数且 }a>0,a\neq 1)$$

称为**对数函数**,它是指数函数 $y=a^x$ 的反函数.

对数函数 $y=\log_a x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$,图像过点 $(1,0)$. 当 $a>1$ 时,$y=\log_a x$ 单调增加;当 $0<a<1$ 时,$y=\log_a x$ 单调减少,如图 1-2-3 所示.

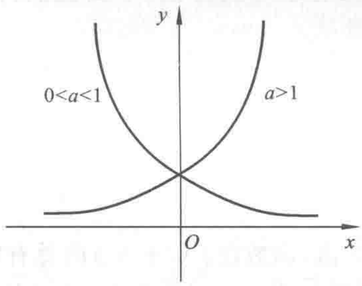



图 1-2-2

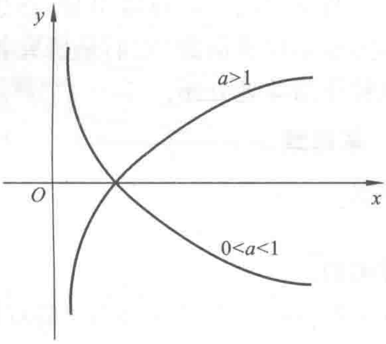



图 1-2-3

科学技术中常用以 e 为底的对数函数

$$y=\log_e x$$

它被称为**自然对数函数**,简记为

$$y=\ln x$$

另外以 10 为底的对数函数

$$y=\log_{10} x$$

也是常用的对数函数,简记为

$$y=\lg x$$

**4. 三角函数**

常用的三角函数有:

**正弦函数** $y=\sin x$;**余弦函数** $y=\cos x$;**正切函数** $y=\tan x$;**余切函数** $y=\cot x$. 其中自变量 $x$ 以弧度作单位来表示. 它们的图形分别如图 1-2-4 ~ 图 1-2-7 所示.

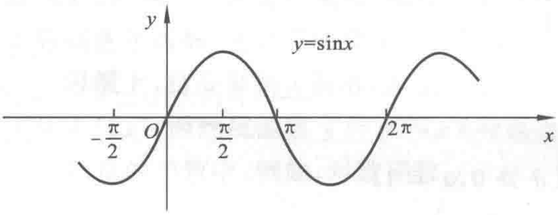



图 1-2-4

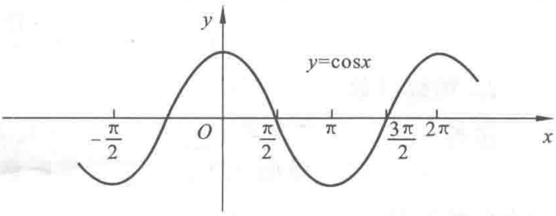



图 1-2-5

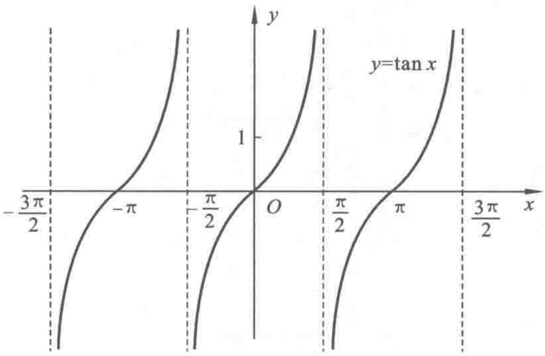



图 1-2-6

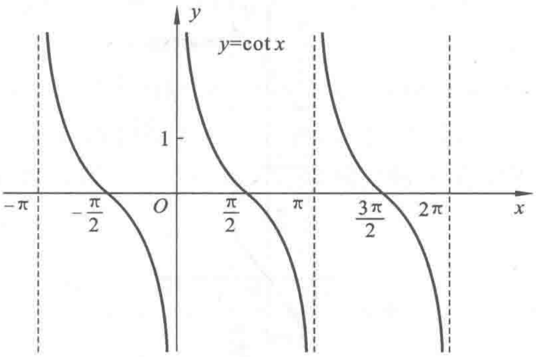



图 1-2-7

正弦函数和余弦函数都是以 $2\pi$ 为周期的周期函数,它们的定义域都为 $(-\infty,+\infty)$,值域都为 $[-1,1]$. 正弦函数是奇函数,余弦函数是偶函数.

正切函数 $y=\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ 的定义域为

$$D(f)=\{x \mid x\in \mathbf{R}, x\neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \text{ 为整数}\}.$$

余切函数 $y=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ 的定义域为

$$D(f)=\{x \mid x\in \mathbf{R}, x\neq n\pi, n \text{ 为整数}\}.$$

正切函数和余切函数的值域都是 $(-\infty,+\infty)$,它们都是以 $\pi$ 为周期的函数,且都是奇函数.

另外,常用的三角函数还有:

**正割函数** $y=\sec x$; **余割函数** $y=\csc x$.

$\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$, $\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$,它们都是以 $2\pi$ 为周期的周期函数.

**5. 反三角函数**

常用的反三角函数有:

**反正弦函数** $y=\arcsin x$; **反余弦函数** $y=\arccos x$;

**反正切函数** $y=\arctan x$; **反余切函数** $y=\operatorname{arccot} x$.

它们分别是三角函数 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 的反函数. 由于这四个三角函数均不是单调性唯一的函数,因此按照下列的区间各取它们的一个单调分支,称为主值分支,分别记为

$$y=\arcsin x, x\in[-1,1], y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] \qquad y=\arccos x, x\in[-1,1], y\in[0,\pi]$$

$$y=\arctan x, x\in(-\infty,+\infty), y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) \qquad y=\operatorname{arccot} x, x\in(-\infty,+\infty), y\in(0,\pi)$$

它们的图形如图 1-2-8 ～ 图 1-2-11 中实线所示.

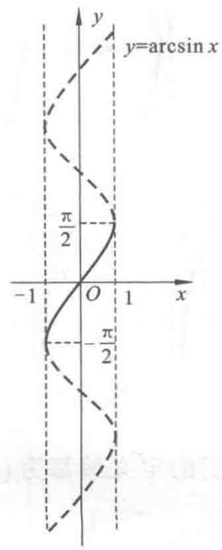



图 1-2-8

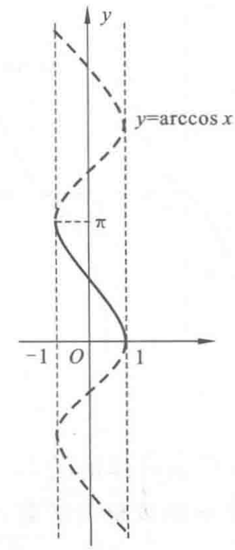



图 1-2-9

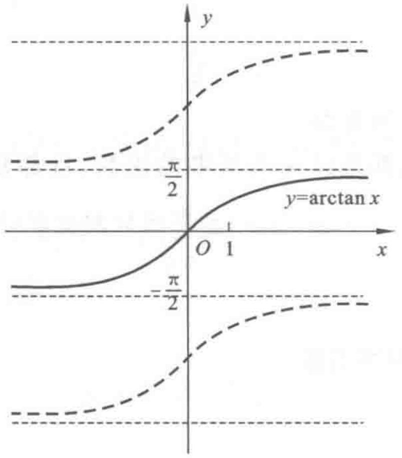



图 1-2-10

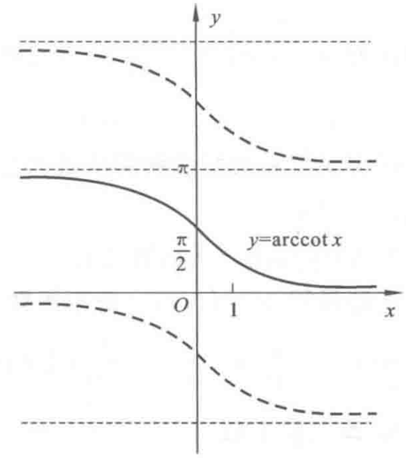



图 1-2-11

## 二、复合函数

一般地，对函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$，若 $x$ 在 $\varphi(x)$ 的定义域或定义域的一部分上取值时，对应的 $u$ 值使 $y=f(u)$ 有意义，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**. $f(u)$ 称为**外层函数**，$\varphi(x)$ 称为**内层函数**，$u$ 称为**中间变量**.

例如，函数 $y=\sin^3 x$ 是由函数 $y=u^3$，$u=\sin x$ 复合而成，其定义域为$(-\infty,+\infty)$.

复合函数的中间变量可以不止一个. 例如，函数 $y=e^{\sqrt{x^2+1}}$是由函数 $y=e^u$，$u=\sqrt{v}$，$v=x^2+1$ 复合而成.

关于复合函数的几点说明：

(1) $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 构成复合函数的条件：$u=\varphi(x)$ 的值域 $M_\varphi$ 与 $y=f(u)$ 的定义域 $D_f$ 交集非空，即 $M_\varphi \cap D_f \neq \varnothing$.

值得注意的是：不是任何两个函数都能复合成一个复合函数. 例如，$y=\arcsin u$，$u=x^2+2$ 就不能复合成一个复合函数. 因为 $u=x^2+2$ 大于 1，从而使 $y=\arcsin u$ 没有意义.

(2) 复合函数的定义域是使 $u=\varphi(x)$ 的函数值落在 $y=f(u)$ 的定义域内的 $x$ 的全体.

**例 1**　求复合函数 $y=\arccos\dfrac{2x-1}{3}$ 的定义域.

**解**　$y=\arccos\dfrac{2x-1}{3}$ 由 $y=\arccos u$，$u=\dfrac{2x-1}{3}$ 复合而成. $y=\arccos u$ 要求 $|u|\leqslant 1$，即 $\left|\dfrac{2x-1}{3}\right|\leqslant 1$，因此 $-1\leqslant x\leqslant 2$. 因此得出 $y=\arccos\dfrac{2x-1}{3}$ 的定义域为 $[-1,2]$.

(3) 以上我们给出了复合函数的概念以及复合函数的条件，反之给出一个复合函数. 我们要知道这个复合函数是由哪几个函数复合而成，即复合函数的分解.

**例 2**　指出下列函数是怎样复合而成的.

(1) $y=3^{\cos x}$；　(2) $y=\lg\dfrac{x-1}{x+1}$；

(3) $y=\ln^3(x^2)$；　(4) $y=\mathrm{e}^{\arctan\sqrt{x^2+1}}$.

**解**　(1) $y=3^{\cos x}$ 是由 $y=3^u$，$u=\cos x$ 复合而成；

(2) $y=\lg\dfrac{x-1}{x+1}$ 是由 $y=\lg u$，$u=\dfrac{x-1}{x+1}$ 复合而成；

(3) $y=\ln^3(x^2)$ 是由 $y=u^3$，$u=\ln v$，$v=x^2$ 复合而成；

(4) $y=\mathrm{e}^{\arctan\sqrt{x^2+1}}$ 是由 $y=\mathrm{e}^u$，$u=\arctan v$，$v=\sqrt{w}$，$w=x^2+1$ 复合而成.

复合函数的分解对今后研究导数、微分和积分非常重要. 对复合函数的分解，应按从外到内的复合层次逐层进行，分解出的每一复合层次或每一步骤，都是基本初等函数或者基本初等函数由四则运算所构成的函数.

## 三、初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次四则运算以及有限次复合运算构成的，能用一个解析式表示的函数，称为**初等函数**.

如函数 $y=\ln\tan(x^2+1)+\sin(3x-1)$，多项式函数 $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$，双曲正弦函数 $y=\dfrac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{x}}{2}$ 等都是初等函数. 但函数 $y=1+x+x^2+x^3+\cdots$ 与符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

均不是初等函数. 因为函数 $y=1+x+x^2+x^3+\cdots$ 不是有限次运算构成的函数，而符号函数不是用一个解析式表示，故它们都不是初等函数.

# 第三节　函数的极限

极限理论是高等数学的重要推理工具. 它是研究函数关系中当自变量按某种方式变化时，

相应因变量的变化趋势问题，而极限概念是由求某些实际问题的精确值而产生. 例如我国古代用圆内接正多边形来推算圆的面积. 半径为 $r$ 的圆内接正 $n$ 边形面积为 $S_n = f(n)$，当边数 $n$ 越来越大时，$S_n$ 就越来越接近圆的面积. 当 $n$ 无限增大时，$S_n$ 无限接近圆的面积 $\pi r^2$. 这种解决问题的思路和方法叫做极限思想. 所谓极限思想就是用初等方法求近似值，再以无限接近的方式求得精确值. 这种方法在实践中逐渐成为高等数学的基本推理工具，在后续许多实际问题中都得到广泛应用.

## 一、数列的极限

按一定顺序排列的无穷多个数 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$ 称为**数列**；数列中的每一个数称为数列的**项**，第 $n$ 项 $x_n$ 称为**通项**，数列可简记为 $\{x_n\}$. 按照函数的定义，数列也是一种特殊形式的函数 $x_n = f(n), n \in \mathbf{N}$.

我们看下列例子：

(1) $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \cdots, \frac{n+1}{n}, \cdots$

(2) $2, 4, 8, \cdots, 2^n, \cdots$

(3) $1, 0, 1, \cdots, \frac{1+(-1)^{n-1}}{2}, \cdots$

(4) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \cdots$

(5) $2, 2, 2, \cdots, 2, \cdots$

对于一个数列，我们感兴趣的是当 $n$ 无限增大时，$x_n$ 的变化趋势. 对于数列(1)，$n$ 增大时数列的项越来越接近 1；对于数列(2)，$n$ 增大时数列各项值越来越大；对于数列(3)，数列中的各项交替地取 1 与 0；对于数列(4)，各项值虽在 0 的两边交替出现，但越来越接近 0；对于数列(5)，各项的值均相同.

在观察数列变化趋势时，发现有些数列随着 $n$ 不断增大，通项 $x_n$ 趋于某个特定常数. 这个常数称为数列的极限. 这就是数列极限的观察法. 极限的描述性定义，即“如果当项数 $n$ 无限增大时，无穷数列 $\{x_n\}$ 的一般项 $x_n$ 无限地趋近于某一个常数 $a$，那么就说 $a$ 是数列 $\{x_n\}$ 的极限”. 用观察法可以判断数列(1)(4)(5)都有极限，分别为 1，0，2. 那么什么叫做“$x_n$ 无限地接近 $a$”呢？如何对这句话作出精确的数学描述呢？

我们知道，两个数 $a$ 与 $b$ 之间的接近程度可以用这两个数差的绝对值 $|b-a|$ 来度量. 在数轴上 $|b-a|$ 表示点 $a$ 与点 $b$ 之间的距离，$|b-a|$ 越小，则 $a$ 与 $b$ 就越接近. 以数列(1)为例，因为

$$|x_n - 1| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

当 $n$ 越来越大时，$\frac{1}{n}$ 越来越小，$x_n$ 越来越接近 1. 因此只要 $n$ 足够大，$|x_n - 1| = \frac{1}{n}$ 就可以小于任意给定的正数，如现在给出一个较小的正数 $\frac{1}{10}$，只要 $n > 10$ 即可得

$$|x_n - 1| < \frac{1}{10}, n = 11, 12, 13, \cdots$$

如果给定更小的正数 $\frac{1}{100}$，则从第 101 项起，都有下面不等式