

TURING
图灵新知

数 + 学 = (女 × 孩) 3

哥德尔不完备定理

Gödel's Incompleteness Theorems

日本数学会出版奖得主
[日] 结城浩 著

丁灵 译



中国工信出版集团



人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

数学II (女孩)

哥德尔不完备定理

Gödel's Incompleteness Theorems

结城浩◇著

丁灵◇译

人民邮电出版社
北京

图书在版编目(CIP)数据

数学女孩. 3, 哥德尔不完备定理 / (日) 结城浩著 ;
丁灵译. — 北京 : 人民邮电出版社, 2017. 11
(图灵新知)
ISBN 978-7-115-46991-5

I. ①数… II. ①结… ②丁… III. ①数学—普及读
物 IV. ①01-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2017)第243195号

内 容 提 要

《数学女孩》系列以小说的形式展开, 重点描述一群年轻人探寻数学中的美。内容由浅入深, 数学讲解部分十分精妙, 被称为“绝赞的数学科普书”。

《数学女孩3: 哥德尔不完备定理》有许多巧思。每一章针对不同议题进行解说, 再于最后一章切入正题——哥德尔不完备定理。作者巧妙地以每一章的概念作为拼图, 拼出与塔斯基的形式语言的真理论、图灵机和判定问题一道被誉为“现代逻辑科学在哲学方面的三大成果”的哥德尔不完备定理的大概证明。整本书一气呵成, 非常适合对数学感兴趣的初高中生以及成人阅读。

-
- ◆ 著 [日] 结城浩
译 丁 灵
责任编辑 杜晓静
执行编辑 高宇涵 侯秀娟
责任印制 彭志环
- ◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市丰台区成寿寺路11号
邮编 100164 电子邮件 315@ptpress.com.cn
网址 <http://www.ptpress.com.cn>
北京隆昌伟业印刷有限公司印刷
- ◆ 开本: 880 × 1230 1/32
印张: 13.25
字数: 342千字 2017年11月第1版
印数: 1-5 000册 2017年11月北京第1次印刷
著作权合同登记号 图字: 01-2016-6552号
-

定价: 52.00元

读者服务热线: (010)51095186转600 印装质量热线: (010)81055316

反盗版热线: (010)81055315

广告经营许可证: 京东工商广登字20170147号

站在巨人的肩上
Standing on Shoulders of Giants



iTuring.cn

版权声明

Sugaku Girl Gödel No Fukanzensei Teiri

Copyright © 2009 Hiroshi Yuki

Originally published in Japan by SB Creative Corp.

Chinese (in simplified character only) translation rights arranged with SB Creative Corp., Tokyo through CREEK & RIVER Co., Ltd.

All rights reserved.

本书中文简体字版由 SB Creative Corp. 授权人民邮电出版社独家出版。
未经出版者书面许可，不得以任何方式复制或抄袭本书内容。
版权所有，侵权必究。

致读者

本书涵盖了形形色色的数学题，从小学生都能明白的简单问题，到震撼整个数学世界的难题。

本书通过语言、图形以及数学公式表达主人公的思路。

如果你不太明白数学公式的含义，姑且先看看故事，公式可以一眼带过。泰朵拉和尤里会跟你一同前行。

擅长数学的读者，请不要仅仅阅读故事，务必一同探究数学公式。如此，便可品味到深埋在故事中的别样趣味。

说不定，你会发现尚未被别人察觉到的秘密呢。

主页通知

关于本书的最新信息，可查阅以下 URL。

<http://www.hyuki.com/girl/>

此 URL 出自作者的个人主页。

序 言

将感谢和友情一并附上，
令大海恩赐之物重归它的怀抱。

——《来自大海的礼物》^[6]

涌来，又远去的——海浪。

来来去去，反反复复——一浪又一浪。

来去的节奏把意识拉向自己。

反复的节奏把意识推向过去。

那时，每个人都在做准备，想要展翅飞向苍穹。

而我，则在小小的鸟笼里蹲着，把身体蜷成一团。

应该诉说的自己，应该缄默的自己。

应该诉说的过去，应该缄默的过去。

每逢春天降临，我都会想起数学。

2 序 言

在纸上排列符号，描绘宇宙。

在纸上写下公式，推导真理。

每逢春天降临，我都会想起她们。

跟我一起讨论数学这个词语，

跟我一起度过青春的——她们。

这是一个关于令我展翅飞翔的小小契机的故事，

你，愿意听我讲述吗？



序言

第1章 镜子的独白	1
1.1 谁是老实人	1
1.1.1 镜子呀镜子	1
1.1.2 谁是老实人	3
1.1.3 相同的回答	7
1.1.4 回答是沉默	8
1.2 逻辑谜题	9
1.2.1 爱丽丝、博丽丝和克丽丝	9
1.2.2 用表格来想	10
1.2.3 出题者的心思	14
1.3 帽子是什么颜色	15
1.3.1 不知道	15
1.3.2 对出题者的验证	18
1.3.3 镜子的独白	19

第2章 皮亚诺算术	23
2.1 泰朵拉	23
2.1.1 皮亚诺公理	23
2.1.2 无数个愿望	27
2.1.3 皮亚诺公理 PA1	28

2.1.4	皮亚诺公理 PA2	29
2.1.5	养大	32
2.1.6	皮亚诺公理 PA3	34
2.1.7	小的?	35
2.1.8	皮亚诺公理 PA4	36
2.2	米尔嘉	39
2.2.1	皮亚诺公理 PA5	42
2.2.2	数学归纳法	43
2.3	在无数脚步之中	49
2.3.1	有限? 无限?	49
2.3.2	动态? 静态?	50
2.4	尤里	52
2.4.1	加法运算?	52
2.4.2	公理呢?	53
<hr/>		
第3章	伽利略的犹豫	57
3.1	集合	57
3.1.1	美人的集合	57
3.1.2	外延表示法	58
3.1.3	餐桌	60
3.1.4	空集	61
3.1.5	集合的集合	62
3.1.6	公共部分	64
3.1.7	并集	67
3.1.8	包含关系	68
3.1.9	为什么要研究集合	71

3.2	逻辑	72
3.2.1	内涵表示法	72
3.2.2	罗素悖论	74
3.2.3	集合运算和逻辑运算	77
3.3	无限	79
3.3.1	双射鸟笼	79
3.3.2	伽利略的犹豫	83
3.4	表示	86
3.4.1	归途	86
3.4.2	书店	87
3.5	沉默	88
<hr/>		
第4章	无限接近的目的地	91
4.1	家中	91
4.1.1	尤里	91
4.1.2	男生的“证明”	92
4.1.3	尤里的“证明”	93
4.1.4	尤里的“疑惑”	96
4.1.5	我的讲解	97
4.2	超市	99
4.3	音乐教室	104
4.3.1	字母的导入	104
4.3.2	极限	106
4.3.3	凭声音决定音乐	108
4.3.4	极限的计算	111
4.4	归途	119

第5章 莱布尼茨之梦	123
5.1 若尤里, 则非泰朵拉	123
5.1.1 “若……则……”的含义	123
5.1.2 莱布尼茨之梦	126
5.1.3 理性的界限?	128
5.2 若泰朵拉, 则非尤里	129
5.2.1 备战高考	129
5.2.2 上课	131
5.3 若米尔嘉, 则米尔嘉	133
5.3.1 教室	133
5.3.2 形式系统	135
5.3.3 逻辑公式	137
5.3.4 “若……则……”的形式	140
5.3.5 公理	142
5.3.6 证明论	143
5.3.7 推理规则	145
5.3.8 证明和定理	147
5.4 不是我, 还是我	149
5.4.1 家中	149
5.4.2 形式的形式	150
5.4.3 含义的含义	152
5.4.4 若“若……则……”, 则……	153
5.4.5 邀约	157
<hr/>	
第6章 ϵ-δ语言	159
6.1 数列的极限	159

6.1.1	从图书室出发	159
6.1.2	到达阶梯教室	160
6.1.3	理解复杂式子的方法	164
6.1.4	看“绝对值”	166
6.1.5	看“若……则……”	169
6.1.6	看“所有”和“某个”	170
6.2	函数的极限	174
6.2.1	ϵ - δ	174
6.2.2	ϵ - δ 的含义	177
6.3	摸底考试	178
6.3.1	上榜	178
6.3.2	静寂的声音、沉默的声音	179
6.4	“连续”的定义	181
6.4.1	图书室	181
6.4.2	在所有点处都不连续	184
6.4.3	是否存在在一点处连续的函数	186
6.4.4	逃出无限的迷宫	187
6.4.5	在一点处连续的函数!	188
6.4.6	诉衷肠	192
<hr/>		
第7章	对角论证法	197
7.1	数列的数列	197
7.1.1	可数集	197
7.1.2	对角论证法	201
7.1.3	挑战: 给实数编号	209
7.1.4	挑战: 有理数和对角论证法	213

7.2	形式系统的形式系统	215
7.2.1	相容性和完备性	215
7.2.2	哥德尔不完备定理	222
7.2.3	算术	224
7.2.4	形式系统的形式系统	225
7.2.5	词汇的整理	229
7.2.6	数项	229
7.2.7	对角化	230
7.2.8	数学的定理	232
7.3	失物的失物	233
<hr/>		
第8章	两份孤独所衍生的产物	239
8.1	重叠的对	239
8.1.1	泰朵拉的发现	239
8.1.2	我的发现	245
8.1.3	谁都没发现的事实	246
8.2	家中	247
8.2.1	自己的数学	247
8.2.2	表现的压缩	247
8.2.3	加法运算的定义	251
8.2.4	教师的存在	254
8.3	等价关系	255
8.3.1	毕业典礼	255
8.3.2	对衍生的产物	257
8.3.3	从自然数到整数	258
8.3.4	图	259

8.3.5	等价关系	264
8.3.6	商集	268
8.4	餐厅	272
8.4.1	两个人的晚饭	272
8.4.2	一对翅膀	272
8.4.3	无力考试	275
<hr/>		
第9章	令人迷惑的螺旋楼梯	277
9.1	$\frac{0}{3}\pi$ 弧度	277
9.1.1	不高兴的尤里	277
9.1.2	三角函数	279
9.1.3	$\sin 45^\circ$	282
9.1.4	$\sin 60^\circ$	286
9.1.5	正弦曲线	290
9.2	$\frac{2}{3}\pi$ 弧度	294
9.2.1	弧度	294
9.2.2	教人	296
9.3	$\frac{4}{3}\pi$ 弧度	297
9.3.1	停课	297
9.3.2	余数	298
9.3.3	灯塔	300
9.3.4	海边	303
9.3.5	消毒	304
<hr/>		
第10章	哥德尔不完备定理	307
10.1	双仓图书馆	307

10.1.1	入口	307
10.1.2	氯	308
10.2	希尔伯特计划	310
10.2.1	希尔伯特	310
10.2.2	猜谜	312
10.3	哥德尔不完备定理	316
10.3.1	哥德尔	316
10.3.2	讨论	318
10.3.3	证明的概要	320
10.4	春天——形式系统P	320
10.4.1	基本符号	320
10.4.2	数项和符号	322
10.4.3	逻辑公式	323
10.4.4	公理	324
10.4.5	推理规则	327
10.5	午饭时间	328
10.5.1	元数学	328
10.5.2	用数学研究数学	329
10.5.3	苏醒	329
10.6	夏天——哥德尔数	331
10.6.1	基本符号的哥德尔数	331
10.6.2	序列的哥德尔数	332
10.7	秋天——原始递归性	335
10.7.1	原始递归函数	335
10.7.2	原始递归函数(谓词)的性质	338
10.7.3	表现定理	340