时代教育·国外高校优秀教材精选

Springer

翻译版

结构优化导论

[瑞典] 彼得 W. 克里斯滕森（Peter W. Christensen）
安德斯·克拉布林（Anders Klarbring） 著

苏文政 刘书田 译

An Introduction to Structural Optimization

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

时代教育·国外高校优秀教材精选

结构优化导论

（翻译版）

An Introduction to Structural Optimization

[瑞典] 波得 W. 克里斯滕森（Peter W. Christensen）
安德斯·克拉布林（Anders Klarbring） 著

苏文政 刘书田 译

机械工业出版社

本书全面介绍了结构优化的三类问题，即尺寸优化、形状优化及拓扑优化。全书内容新颖、取舍合理、自成体系，侧重于优化问题的建模和数值实现方法，重点介绍了前沿的序列显式凸近似计算方法。本书对结构优化的步骤讲解细致，读者学习完本书后可以自行完成求解。本书是瑞典林雪平大学的教材，也被其他多所学校选用。本书内容在一定程度上体现了欧洲大学结构优化课程的教学特点，对我国高校结构优化课程教学可以起到很好的借鉴作用。

本书适合作为力学、土木、机械、航空航天等学科的研究生及高年级本科生的教材，也可供相关工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

结构优化导论：翻译版/（瑞典）彼得 W. 克里斯滕森（Peter W. Christensen），（瑞典）安德斯·克拉布林（Anders Klarbring）著；苏文政，刘书田译. —北京：机械工业出版社，2017. 6

书名原文：An Introduction to Structural Optimization

时代教育·国外高校优秀教材精选

ISBN 978-7-111-56383-9

Ⅰ. ①结… Ⅱ. ①彼… ②安…③苏…④刘… Ⅲ. ①工程结构－结构设计－教材 Ⅳ. ①TU318

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 101093 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）

策划编辑：宋学敏 责任编辑：宋学敏 韩 冰 任正一

责任校对：刘秀芝 封面设计：张 静

责任印制：李 昂

河北鑫兆源印刷有限公司印刷

2017 年 8 月第 1 版第 1 次印刷

180mm×235mm · 12 印张 · 241 千字

标准书号：ISBN 978-7-111-56383-9

定价:39.80 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
服务咨询热线：010－88379833	机 工 官 网：www. cmpbook. com
读者购书热线：010－88379649	机 工 官 博：weibo. com/cmp1952
	教育服务网：www. cmpedu. com
封面无防伪标均为盗版	金 书 网：www. golden－book. com

译者序

今天，结构优化逐渐成为工程结构分析设计的必要环节。结构优化的主要任务是最大限度地提高材料的利用率，或者使结构在满足承载要求的同时尽可能地轻量化。这也是机械和结构工程师的永恒追求。在过去的30年，伴随着计算机软硬件技术的高速发展，结构优化无论是在理论模型方面还是在数值实现方面均有突飞猛进的发展。尤其是20世纪80年代末拓扑优化理论的成熟，更为结构优化在工程设计中的普及应用奠定了坚实的基础。目前，许多大型CAE商用软件纷纷开发了结构优化模块。结构优化已经成功地渗入到诸如航空航天、交通运输、土木建筑、机械装备等工程领域的各个方面。

本书全面介绍了结构优化的三类问题，即尺寸优化、形状优化及拓扑优化。全书风格鲜明，侧重于优化问题的建模和数值实现方法；对结构优化的步骤讲解细致，读者学习后可以自行完成常见问题建模求解。作为一本优秀的教材，本书除了通俗易懂且不失严谨之外，还具有以下特色：

1）内容新颖。既包含了尺寸优化和形状优化问题，也包含了前沿的拓扑优化问题；既包含了结构优化问题的离散数值解法，也包含了连续体结构优化的变分计算方法；既重点阐述了当代最流行的显式序列凸规划算法，也介绍了便捷实用的优化准则法。

2）取舍合理。作者没有像许多同类书籍那样大篇幅地介绍传统的序列线性规划法以及序列二次规划法等经典算法，而是重点介绍了以凸线性化（CONLIN）和移动渐近线法（MMA）算法为代表的计算效率更高、结果更稳定的序列凸规划算法。

3）自成体系。作者由浅入深地介绍了结构优化的三类问题，即尺寸优化、形状优化和拓扑优化。三部分之间层层递进，读者只需具备基本的基础力学知识便可理解结构优化学科的主要特点，并迅速掌握结构优化问题主要的建模和求解方法。

4）贴近工程。书中佐以大量的例题和习题，这些题目均取自工程实际问题。此外，本书的主页（http：//www. mechanics. iei. liu. se/edu _ ug/strop/）附有大量的上机习题和源代码，可供读者免费下载。这些程序完全可以用于科研或者解决实际工程问题，即学即用。

本书可以和我国现有的结构优化教材互为补充。实际上，结构优化在

我国相当受欢迎，我国优化界也做出了很多令世界瞩目的研究成果，其中当然不乏优秀的结构优化专业教材。本书是瑞典林雪平大学的教材，也被其他多所学校选用。其内容在一定程度上体现了欧洲大学结构优化课程的教学特点，对我国高校结构优化课程教学有很好的借鉴作用。

作者之一的安德斯·克拉布林是瑞典林雪平大学固体力学专业的著名教授，力学部主任，从事结构优化、接触力学、计算力学以及非光滑力学等研究，同时也是多家著名国际期刊的编委和审稿人，并曾出版包括本书在内的两本著作。彼得W. 克里斯滕森是瑞典林雪平大学固体力学专业的副教授，从事非光滑力学研究，尤其是结构优化以及摩擦接触问题，讲授结构优化、多体动力学、车辆动力学以及机械零件等课程。

本书适合作为力学、土木、机械、航空航天等学科的研究生及高年级本科生的教材，也可供相关工程技术人员参考。

在本书翻译过程中，研究生陈文炯、李取浩、王奇参与了校对工作，在此予以感谢。同时感谢国家自然科学基金（11002031 和 11332004）对本书出版的支持。

限于译者水平，疏漏及错误之处在所难免，恳请广大读者批评指正，联系方式：wzhsu@ djtu. edu. cn（苏文政），stliu@ dlut. edu. cn（刘书田）。

苏文政 刘书田

2016 年 7 月

作者序

自2009年本书的英文版出版以来，除了我们之外，还有其他一些院校也将其作为结构优化课程的授课教材。事实上，那些院校中的一些面向研究生或者本科生的结构优化课程似乎恰恰正是在这本书的影响和启发下开设的。因此，可以大胆地说本书作为结构优化课程的入门教材是合适的。现在，我们欣喜地看到她即将翻译成另外一种语言，并呈现给庞大的新读者群。

虽然我们对汉语完全不懂，但是数学语言是相通的。本书的翻译非常精细，感谢译者苏文政、刘书田使这一新的版本得以出版。

彼得 W. 克里斯滕森（Peter W. Christensen）
安德斯·克拉布林（Anders Klarbring）
瑞典 林雪平大学
2016年8月

前 言

本书是在瑞典林雪平大学积累的超过15年的学术报告和课程基础上逐渐形成的，初步介绍结构优化的基本问题和求解方法，包括机械结构几何优化的三类基本问题，即尺寸优化、形状优化和拓扑优化。重点为离散的和（有限元）离散化的线弹性结构优化问题的详细数值实现方法。本书写作力求通俗易懂：只对基本定理进行数学证明，其他定理则不加证明地直接引用；但是对于定理的具体应用方法，我们均进行了详细介绍。考虑到本书的重点是几何设计问题，其中的设计变量连续变化且数量通常很大，因此主要采用一阶方法求解。这些方法基于灵敏度分析，即建立在求解目标函数和约束函数的一阶导数的基础上。我们重点介绍经典一阶方法中的 CONLIN 和 MMA，这两种方法均基于显式的凸可分离近似技术。需要注意的是，结构优化中广泛采用的经典方法——优化准则法也属于一阶方法。此外，零阶算法（如响应面法、代理模型方法、神经网络方法、基因算法等）并不适用于本书讨论的优化问题，故未予以介绍。书中的例题均采用程序进行了求解实现，其中一些程序可从本书的主页（http：//www. mechanics. iei. liu. se/edu_ug/strop/）下载。这些程序也可用来求解各章末所附的大量习题。

根据我们的经验，本书主要面向具有有限元方法基础知识的固体结构力学专业的学生，也适用于具有相应数学基础知识的其他读者。了解基本优化理论和凸规划方法有助于增进读者对本书的理解，但没有这些基础也无妨。

本书前三章为入门的基础部分。第 1 章介绍了数学设计优化的基本思想及其在产品设计这一宽泛领域的地位，同时定义了结构优化的基本概念及术语。第 2 章研究了一系列小规模优化问题，这些算例一方面可以使我们熟悉结构优化中这类常见的问题，另一方面也可以作为后续章节所讲方法的范例题目。第 3 章综合叙述了凸分析的基本概念，并从结构优化的角度举例说明。第 4 章介绍了序列显式凸近似的基本思想，并详细介绍了 CONLIN 和 MMA 方法。从算法的角度，这一章是本书的核心内容。第 5 章用 MMA 方法求解桁架结构的刚度优化问题。这是结构优化的一个经典范例，也是我们深入讨论的内容。第 6 章讨论有限元离散结构的灵敏度分析方法。第 7 章介绍形状优化，并在最后结合二维形状表征方法（如贝塞尔样条和 B 样条）介绍了形状改变的灵敏度分析。第 8 章回顾了变分法的一

些经典结果，并推导了分布参数系统刚度优化问题的最优条件。本章本质上是刚度拓扑优化问题方法的准备。在第 9 章，这一问题经过简单的扩展并进行离散化后，为解决连续体结构拓扑优化问题开启了一扇大门。我们把优化准则法作为一般显式凸近似方法的一个特例进行了推导，并讨论了问题的适定性和不同类型的规则化方法。

作为一本入门的初级教材，我们并没有面面俱到地包含全部文献，也没有介绍结构优化的发展历史，对此感兴趣的读者可参考现有的专著，如 Haftka 和 Gürdal[18]、Kirsch[22] 以及 Bendsøe 和 Sigmund[4] 的相关著作。

如前所述，本书植根于林雪平大学的一系列讲座，其中第一场讲座是本书的第二作者在 1992 年所做的。其后，由 Joakim Petersson 负责并规划基本内容的一门独立的结构优化课程在2000 年得以成形。完成两轮授课之后，不幸的事情发生了，Joakim 在2002 年9 月非常突然地离世了[3]。于是本书作者接手并负责了这门课程，开始按照非常接近 Joakim 讲义内容的方式讲授这门课程。令人欣慰的是，从那时起我们一直在讲授这门课程并逐渐写成了本书。根据我们的记忆和理解，本书几乎完全契合了 Joakim 的思想和风格。

特别感谢 Bo Torstenfelt 和 Thomas Borrvall 为本书提供了大量数值解答。Torstenfelt 的傻瓜式有限元程序 TRINITAS 可从本书的主页下载，并可用于求解形状和拓扑优化两类计算机上机习题。此外，主页上还有 Borrvall 开发的一个用于拓扑优化的 Java 应用程序可供下载。诚挚感谢他们对使用其程序的许可。

彼得 W. 克里斯滕森（Peter W. Christensen）
安德斯·克拉布林（Anders Klarbring）
瑞典林雪平大学
2008 年7 月

目　录

第 1 章

引　言

本章介绍了结构优化的基本思想和术语，并讨论了优化设计数学方法在产品设计中的重要性，定义了结构优化的嵌套格式和联立格式，以及结构优化的三类几何设计参数，即尺寸、形状和拓扑。

1.1　基本思想

J. E. Gordon[17]将力学中的“结构”定义为“以承载为目的的任意材料组装体”。而“优化”表示使结构达到最好。由此，“结构优化”则是使材料的某一组装体以最好的方式承载的一门学科。为进一步理解这一思想，以图 1.1 所示的结构为例进行思考，将载荷从空间某一区域传递到固定支座。我们希望设计的结构能够以最好的方式达到这一目标。但是，为了使这一目标有意义，首先需要明确什么是“最好”。我们首先想到的“最好”可能是结构尽可能轻，即重量最小。当然，结构“最好”也可能意味着使结构的刚度尽可能大，还可能是使结构尽可能不发生屈曲，即具有尽可能高的稳定性。显然，如果没有任何约束，这样的最大化或最小化工作将无法实施。例如，如果对许用材料不加限制的话，结构将具有无限的刚度，而我们的优化问题将没有确定解。结构优化中通常用来表述约束的量包括应力、位移及（或）几何形状。需要注意的是，大部分用来描述约束的量同时也可以用来衡量结构是否“最好”，即也可以作为目标函数。这样，我们就可以记下大量描述结构性能的量，如重量、刚度、临界载荷、应力、位移以及几何量等，并可以在此基础

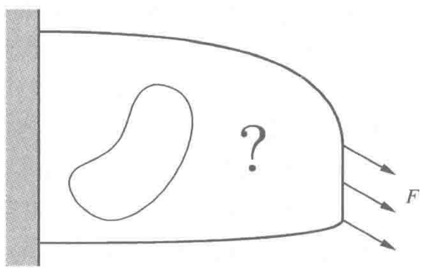

图 1.1　结构优化问题。寻找能将力 F 以最好的方式传递到支座的结构

上形成一个优化问题。在这个优化问题中，选其中的某一个量作为目标函数以实现其最大化或最小化，而另外的一些量将作为约束函数。在1.3节中，我们将从数学角度来描述优化问题。而在1.2节中，我们会先从另一个视角，以更广的视野来观察结构优化。

1.2 设计过程

前面提到的对结构性能的度量仅仅是关于力学性能的，即没有考虑功能性、经济性和美学性。为进一步弄清结构优化和这些无法从数学上定义的量之间的关系，我们仿照Kirsch[22]的描述，对通常的产品设计过程进行简短介绍。从理论上讲，产品设计包含如下步骤：

（1）功能设计 这个产品的用途是什么？例如，设计一座桥时需要考虑：它的长和宽应该是多少？应设计多少条车道？有可能受到什么载荷作用？诸如此类的其他问题有很多。

（2）概念设计 应该采用什么类型的构造概念？如果要设计桥，那么就需要决定建造桁架桥、吊桥还是拱桥等。

（3）优化设计 对于所选的概念，要在满足功能约束的前提下，将产品做得尽可能好。对于桥来说，很自然地应该考虑降低成本，或直接转化为使用最少的材料。

（4）细节设计 这一步通常受市场、社会或美学因素的影响。在建造桥的例子中，可能还需要为其选择一种有趣的颜色。

实现上述步骤（3）的传统的同时也是主流的方法是“直观迭代法”。该方法描述如下：①提出一个特定的设计方案；②审查基于功能的各项要求；③如果不满足要求，如应力过大，则必须重新提出一个设计方案，尽管这个满足要求的设计方案并不是最优的（例如，桥可能过重了），我们仍然需要提出这个新的设计方案；④对新的设计方案重复步骤②。这一方法主要基于直观经验，通过反复迭代，会产生一系列设计，并期望设计方案收敛于可接受的最终结果。

对于机械结构，实现步骤（3）所依赖的“直观迭代法”实现的第②步目前几乎无一例外地使用基于计算机的方法（如有限元法或多体动力学方法）。这些方法使每一设计迭代步均获得了更可信的分析结果，并且几乎总是具有更高的计算效率。然而，这些方法并没有使这个传统的设计体系产生根本改变。

数学设计优化法和直观迭代法之间存在根本上的不同。该方法采用数学优化问题格式，其中基于功能的要求作为约束函数处理，而“尽可能好”的概念则通过严格的数学方式实现。与直观迭代法相比，由数学设计优化法实现步骤（3）的自动化程度更高。

本书研究数学设计优化问题的一个子问题，即研究以承载为主要功能的机械结构。这一子问题称为“结构优化”。

显然，采用数学设计优化法不可能对所有的因素都进行有效的处理。该方法有效的基本要求是所考虑的因素能够采用数学方式度量。通常，力学因素的度量很容易实现，而美学因素的度量则很难实现。

1.3　结构优化问题的一般数学形式

结构优化问题通常包含以下函数和变量：

（1）目标函数（f）　目标函数是指将设计进行归类的函数。对于每一个可能的设计方案，目标函数f会获得一个表征设计好坏的数值。通常，选择目标函数f使其值越小越优（最小化问题）。常见的目标函数包括重量、给定方向的位移、等效应力或产品成本等。

（2）设计变量（x）　设计变量是指描述设计的函数或向量，其在优化过程中可以变化。设计变量可以表征几何特征或表征材料的选择性。当表征几何特征时，设计变量可以与复杂的形状插值函数相关联，也可以是简单的杆件面积或板片厚度。

（3）状态变量（y）　对于给定结构（即给定了设计变量x），状态变量y为反映结构响应的函数或向量。在机械结构中，响应指位移、应力、应变或力。

一般的结构优化问题［Structural Optimization，（SO）］采用如下形式：

$$
(\mathrm{SO})\begin{cases}\text{minimize（最小化，简写为 min）关于 } x \text{ 和 } y \text{ 的函数 } f\ (x,\ y)\\[2ex] \text{subject to（约束条件，简写为 s. t.）}\begin{cases}\text{关于 } y \text{ 的行为约束}\\ \text{关于 } x \text{ 的设计约束}\\ \text{平衡约束}\end{cases}\end{cases}
$$

当然，有的问题也可能同时包含几个目标函数，即所谓的多目标优化或向量优化问题：

$$
\text{minimize}(f_1(x,y),f_2(x,y),\cdots,f_l(x,y)) \tag{1.1}
$$

式中，l表示目标函数个数，约束函数同（SO）一致。因为对于同一组x和y，所有的f_i: s[⊖]通常不可能同时达到最优，式（1.1）并不是标准的优化问题。因此，取而代之的是，我们通常希望上述问题实现所谓的“帕雷托（Pareto）最优”。一个设计称为帕雷托最优，表示不存在其他的解能使所有的目标函数更好。因此，满足约束的解（x^*，y^*）是帕雷托最优解，它表示不存在任何

⊖ 经与原书作者确认，符号f_i: s表示所有函数f_i的集合。——译者注

其他的满足约束的解（x，y）能够使下述不等式成立

$$f_i(x,y)\leqslant f_i(x^*,y^*),\quad \text{对于任意 } i=1,\cdots,l$$
$$f_i(x,y)<f_i(x^*,y^*),\text{对于至少一个 } i\in\{1,\cdots,l\}$$

通常获得式（1.1）描述的优化问题的帕雷托最优解的方法是构造一个标量形式的目标函数

$$\sum_{i=1}^{l} w_i f_i(x,y) \tag{1.2}$$

式中，w_i 称为权重因子，$w_i\geqslant 0$（$i=1$，…，l）并满足 $\sum_{i=1}^{l} w_i=1$。在（SO）中的约束条件下，最小化式（1.2）描述的优化问题是一个标准的标量形式的优化问题，其解就是式（1.1）的帕雷托最优解。改变权重，可以获得不同的帕雷托最优解。然而需要说明的是，用这种简单的方法通常无法获得所有的帕雷托最优解。

在本书中我们只考虑形如（SO）的结构优化问题，即只包含一个标量目标函数的优化问题。关于详尽的多目标优化问题的讨论，读者可查阅 Ehrgott 和 Gandibleux 的著作[14]及其引用的参考文献。

（SO）表明了三类约束：

（1）行为约束 是指关于状态变量 y 的约束。通常表示为 $g(y)\leqslant 0$，其中 g 表示具有某种意义的函数，例如，某一方向的位移。

（2）设计约束 与行为约束类似，设计约束只是包含了设计变量 x。

显然，这两类约束可以归为一类。

（3）平衡约束 在线性的自然离散问题或离散化问题中（将在 1.5 节讨论这两类问题），平衡约束具有如下形式：

$$\boldsymbol{K}(x)\boldsymbol{u}=\boldsymbol{F}(x) \tag{1.3}$$

式中，$\boldsymbol{K}(x)$表示结构刚度矩阵，通常是设计变量的函数；$\boldsymbol{u}$ 表示位移向量；$\boldsymbol{F}(x)$表示载荷向量，它也可能依赖于设计变量。注意位移向量 $\boldsymbol{u}$ 其实就是通常的状态变量 y。对于连续介质问题，平衡约束是典型的偏微分方程。在动力学优化问题中，平衡约束应采用相应的动力学平衡方程的形式。从广义上来说，这里的平衡约束也称为状态问题。

在结构优化问题（SO）中，y 和 x 是相互独立的变量。由于这类优化问题的平衡方程（更多地称为状态问题）求解需要联立优化问题，因此这一形式也称为联立格式。然而，对于给定的设计变量 x，状态问题所定义的 y 通常是唯一确定的。例如，若$\boldsymbol{K}(x)$对于所有 x 都是可逆的，则有 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(x)=\boldsymbol{K}^{-1}(x)\boldsymbol{F}(x)$。将$\boldsymbol{u}(x)$作为已知函数，则平衡约束可以置于（SO）的外面，用该已知函数代替状态变量，将得到

$$(\mathrm{SO})_{\mathrm{nf}}\begin{cases}\min\limits_{x} f(x,\boldsymbol{u}(x))\\ \text{s. t. } g(x,\boldsymbol{u}(x))\leqslant 0\end{cases}$$

假定所有状态约束和设计约束都可以写成$g(x, \boldsymbol{u}(x)) \leqslant 0$的形式。上述优化问题称为“嵌套格式”。本书将首先介绍嵌套格式优化问题的数值求解方法。

通过数值方法求解 $(\mathrm{SO})_{\mathrm{nf}}$优化问题，通常需要$f$和$g$关于设计变量$x$的导数。确定导数的过程称为灵敏度分析。由于函数$\boldsymbol{u}(x)$仅通过隐式给出，因此进行灵敏度分析通常并不轻松。

1.4 结构优化问题的三种类型

本书中，总是约定x代表某一类型的结构几何特征。根据结构的几何特征，结构优化问题可以分为以下三类：

(1) 尺寸优化 x代表某一类型的结构厚度，如桁架杆件的横截面面积或薄片的厚度分布。图 1.2 所示为一个以桁架杆件横截面面积为设计变量的尺寸优化问题。

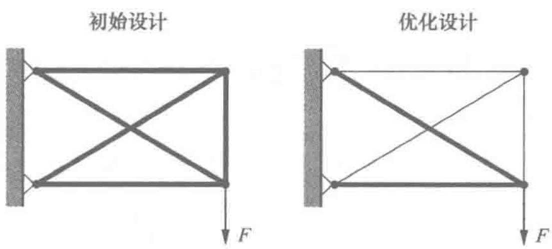

图 1.2 以桁架杆件横截面面积为设计变量的尺寸优化问题

(2) 形状优化 x代表结构主体部分的外形或某些边界轮廓。例如考虑一个固体结构，其状态通过一系列的偏微分方程来描述。形状优化的主要工作是以优化的方式为这些偏微分方程选择积分域。注意形状优化不会改变结构的连通性，即不会产生新的边界。图 1.3 所示为一个二维形状优化问题，确定描述类梁结构形状的函数$\eta(x)$。

(3) 拓扑优化 拓扑优化是最一般形式的结构优化。对于桁架等离散结构，通过将桁架杆件的横截面面积作为设计变量，并允许这些设计变量为零（即可以从桁架结构中删除杆件）来得到。通过这种方法，节点的连通性是可变的，因此可以说桁架的拓扑发生了变化（图 1.4）。除了研究离散结构外，我们也可以研究连续体结构，如二维的薄片结构，此时拓扑的改变可以通过使薄片的厚度为零来实现。如果进行纯粹的拓扑优化，则结果中的最优厚度应该只取两个值：0 和薄片厚度的固定最大值。对于三维问题，使x作为只能取值为 0 或 1 的类密度变量，也可产生类似效果。图 1.5 所示为一个拓扑优化的例子。

理论上，形状优化是拓扑优化的子问题，但是它们的实现方法全然不同，

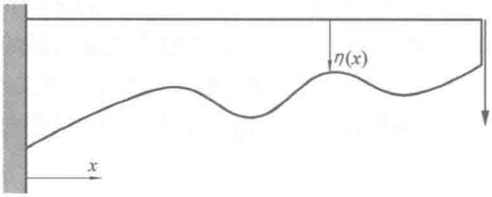

图 1.3　二维形状优化问题。确定描述类梁结构形状的函数 $\eta(x)$

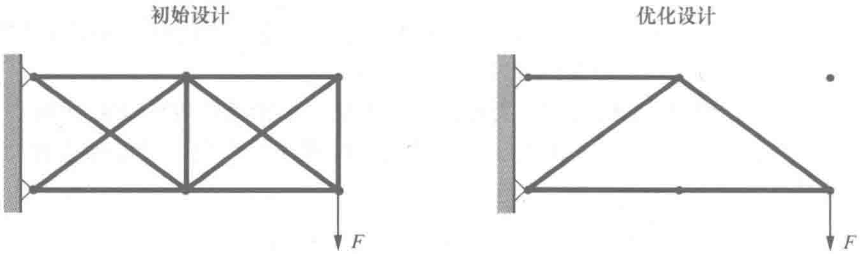

图 1.4　桁架结构拓扑优化。通过使杆件横截面面积为零来实现删除杆件

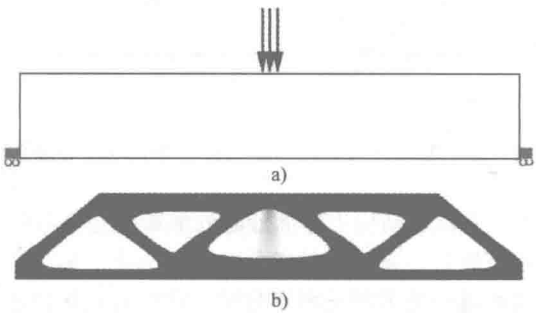

图 1.5　二维拓扑优化。设计区域将填充 50% 的材料。若使图 a 中的结构在载荷和边界条件下具有最优的性能，材料应该如何放置？优化结果如图 b 所示。（Borrvall 供解）

因此本书和其他文献一样，将这两类问题分开讨论。对于拓扑优化和尺寸优化的关系则恰恰相反，虽然从基本观点看二者并不相同，但是实际上二者非常接近。

如果说状态问题是一个偏微分方程的话，那么形状优化关注的是对方程定义域的控制，而尺寸优化和拓扑优化关注的则是对方程参数的控制。

因为结构优化问题具有不同类型，因此就 1.2 节讨论的设计过程而言，有两种不同的实现方法。第一种方法是模糊步骤（2）和步骤（3）之间的界限的拓扑优化，这是最一般的结构优化类型，要求的概念描述比其他问题（如形状优化）要粗略。第二种可行的方法是在结构优化中局部地修改直观迭代

法，即在步骤（3）完成前求解不同类型的结构优化问题。

1.5　离散参数和分布参数系统

前几节提到，根据实际情况，设计变量 x 和状态变量 u 有可能是有限的（即属于 n 维实空间 R^n），也有可能是具有无限自由度的函数（或“场”）。如果设计变量是有限的，则称为“离散参数系统”，典型示例如图 1.2 和图 1.4 所示的桁架，其中状态变量 u 通过节点的位移向量集合给出，设计变量 x 则由有限个数的杆件横截面面积描述。相反，如果设计变量或状态变量是一个场，则称为“分布参数系统”，如图 1.3 所示的形状优化问题和图 1.5 所示的拓扑优化问题。在本书中，我们也经常用连续体问题代指分布参数系统。

需要注意，分布参数系统并不适合计算机求解，力学问题的计算机实现方法是基于有限维空间的代数方法。这就意味着，如果要求解一个分布参数系统的问题，首先需要进行离散化，将其转化为离散参数问题。为了对这类转化的离散参数问题与桁架结构之类的离散参数系统进行区分，称后者为“自然”离散参数系统。理论上，我们期望离散化的问题能够真实反映分布参数问题，即期望能够证明随着离散化过程的逐渐精细，离散化问题的解收敛于分布参数问题的解。然而，实现这一期望需要满足极为苛刻的数学要求，有时候往往得不到收敛的结果。于是结构工程师必须依靠直观经验来将问题离散化以获得接近原始分布参数问题的解。