

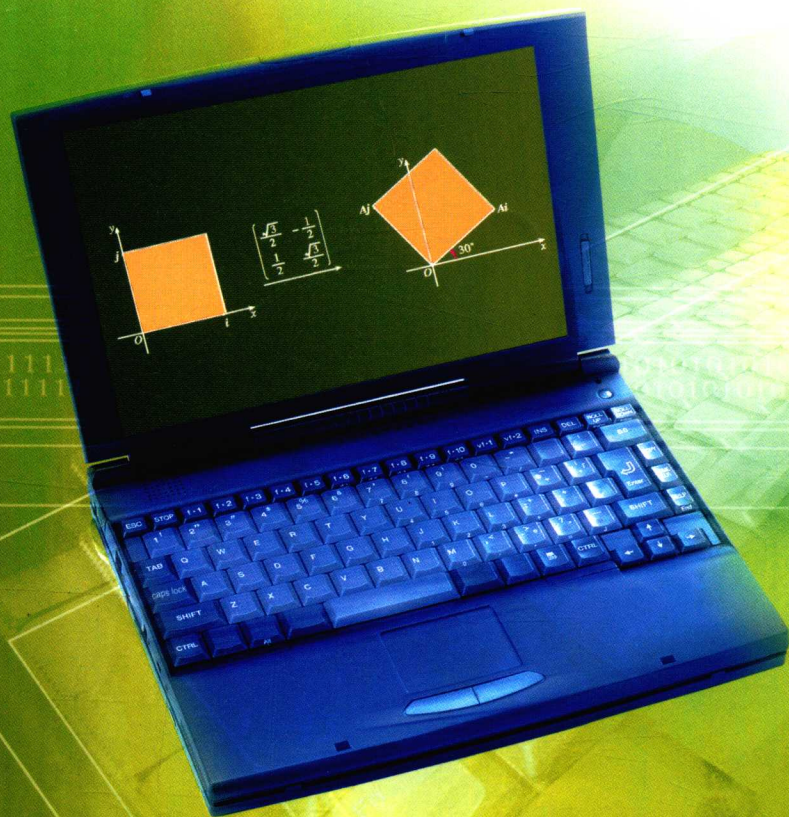
普通高中课程标准实验教科书

# 数学 选修 4-2

## 矩阵与变换

# 教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所 编著  
中学数学课程教材研究开发中心



人民教育出版社  
A版

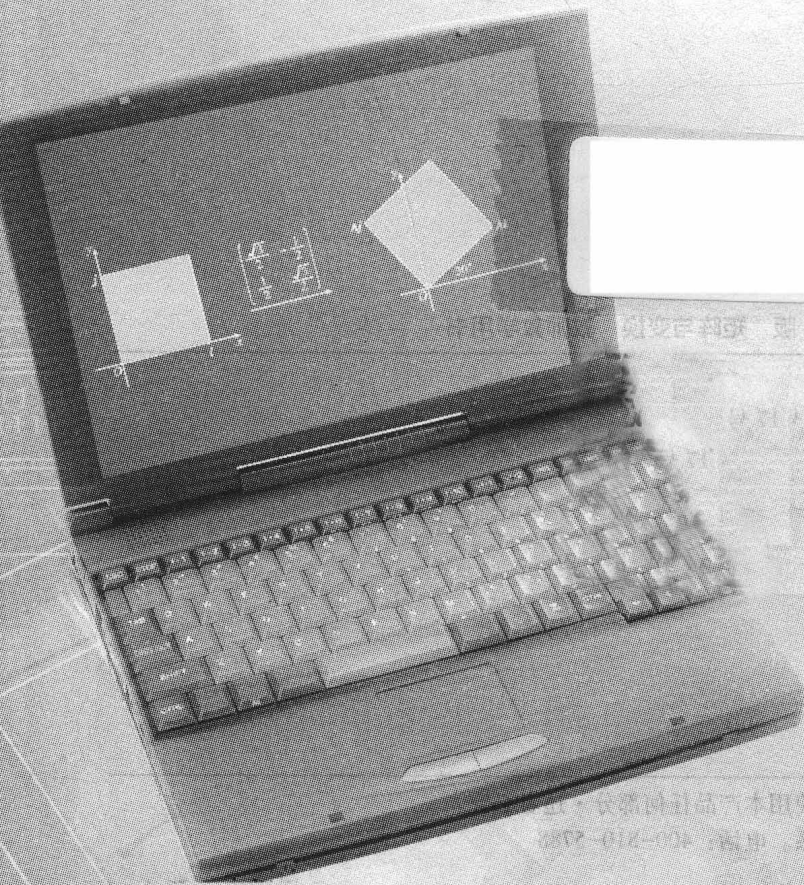
普通高中课程标准实验教科书

# 数学 选修 4-2

## 矩阵与变换

# 教师教学用书

人民教育出版社 课程教材研究所 编著  
中学数学课程教材研究开发中心



人民教育出版社  
**A**版

普通高中课程标准实验教科书 数学 选修 4-2 A 版 矩阵与变换 教师教学用书

图书在版编目 (CIP) 数据

普通高中课程标准实验教科书数学选修 4-2 (A 版) 矩阵与变换教师教学用书/人民教育出版社课程教材研究所中学数学课程教材研究开发中心编著. —2 版. —北京: 人民教育出版社, 2017.12

ISBN 978-7-107-20466-1

I. ①普… II. ①人… III. ①中学数学课—高中—教学参考资料 IV. ①G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 021108 号

普通高中课程标准实验教科书 数学 选修 4-2 A 版 矩阵与变换 教师教学用书  
人民教育出版社 课程教材研究所 中学数学课程教材研究开发中心

普通高中课程标准实验教科书 数学 选修 4-2 A 版 矩阵与变换 教师教学用书

出版发行 人民教育出版社  
(北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼 邮编: 100081)

网 址 <http://www.pep.com.cn>  
经 销 全国新华书店  
印 刷 唐山市润丰印务有限公司  
版 次 2009 年 1 月第 2 版  
印 次 2017 年 12 月第 10 次印刷  
开 本 890 毫米 × 1240 毫米 1/16  
印 张 3.75  
字 数 80 千字  
定 价 9.10 元

版权所有·未经许可不得采用任何方式擅自复制或使本产品任何部分·违者必究  
如发现内容质量问题、印装质量问题, 请与本社联系。电话: 400-810-5788

主 编：刘绍学

副 主 编：钱佩玲 章建跃

编 者：李龙才

责任编辑：俞求是

版式设计：王 艾

封面设计：李宏庆

# 中学数学概观

——谈谈我对中学数学的理解

各位老师，感谢大家使用我们的教材。作为主编，为了帮助大家更好地理解我们的教材，我想把自己对中学数学的理解与大家交流一下。这里，我把“中学数学”限定在本套教材的必修系列1~5以及选修1、2中所涉及的基本数学内容内。

在进行具体内容的教学时，对它在中学数学整体结构中的位置有一清晰的认识是重要的，为此需要对中学数学有一个概括的描述。这里我把中学数学分为一些知识点，并选择“数量关系”、“空间形式”、“数形结合”等三条粗线把它们编织起来，以使大家对它有一个粗线条但略有秩序的理解。

事实上，我们可以用不同观点、从不同角度、用不同的呈现方式来观察中学数学。我们这里选择恩格斯观察数学的角度。恩格斯说，数学是研究数量关系与空间形式的科学。这样，数学的研究对象有的可以纳入较单纯状态的“数量关系”或“空间形式”，有的可以纳入两者混合状态的“数形结合”。概率与统计、算法当然也可以纳入上述三条粗线中。但我们考虑到：概率与统计是研究不确定现象的，其他中学数学则是研究确定现象的，因此若把后者称为确定性数学，则概率与统计是以确定性数学为工具来研究不确定现象的数学；“算法”和“理论”是相辅相成地促进数学发展的两条思想路线，“算法”和“理论”同时出现在数学的各个分支，是数学的两个互相协作的方面军。考虑到概率与统计、算法的这些独特地位，以及它们是中学数学新成员的特点，我愿意把它们放在特殊地位，以引起大家的注意。

**集合** 只要研究问题，就有研究对象。这些研究对象都是数学中的元素。把一些元素放在一起作为一个整体看待，就形成一个集合。因而元素、集合是处处存在的。另一方面，从有关自然数的Peano公理，以及关于欧氏几何的公理体系可以看到或感觉到，无论是“数量关系”“空间形式”中涉及的对象和概念，还是“数形结合”中遇到的对象和概念，都能用集合论的语言（元素、集合、属于、子集、映射等）给出它们的定义。在这个意义上，可以说数学研究的很多对象都是元素间具有某些关系的集合。这样，集合论的语言就自然地成为数学的基本语言，并且从这里我们还会看到和相信，为什么数学的研究成果，数学的研究思想、方法等都有可能在其他理论中派上用场，得到广泛应用。

**统计** 统计是研究如何合理收集、整理、分析数据以及由数据分析结果作出决策的科学，它的理论基础是概率论。统计为人们认识客观世界提供了重要的思维模式和解决问题的方法。在中学阶段，我们只通过具体问题背景了解最基本的统计概念与方法，例如随机抽样、统计图表、用样本估计总体、线性相关关系、假设检验思想等。

**概率** 概率论是研究随机现象规律的科学，是统计学的理论基础。在概率理论的研究中，用到大量的（非随机）数学工具。概率是一种度量，用来度量随机事件发生的可能性大小。这和数学中其他的度量相类似（例如直线的长度、平面图形的面积、空间立体的体积等），性质也类似。但是两种度量之间存在如下区别：

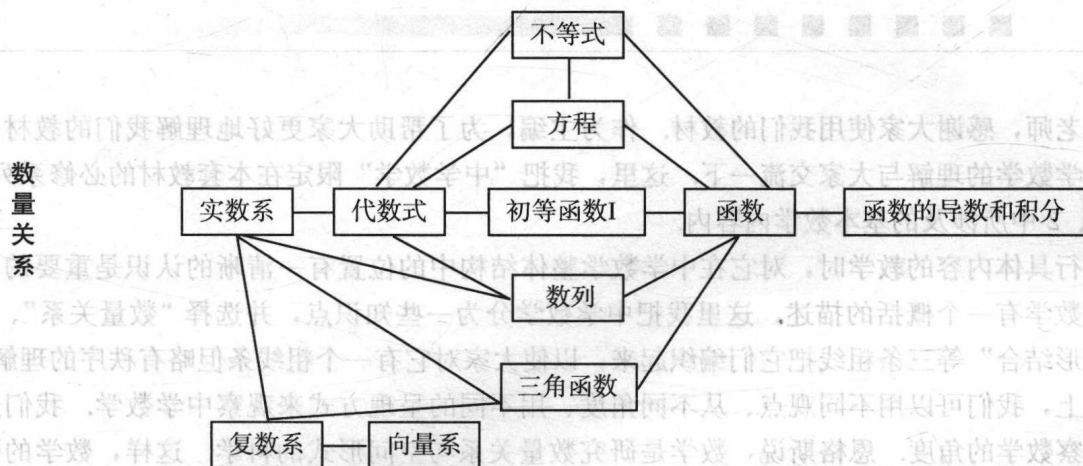
1. 作为概率的这种度量的值永远不会超过1，几何中的度量却不受这种限制。
2. 概率的度量对象是随机事件，几何中的度量对象却是几何图形。

**算法** 实现具体计算数量关系的手段。机械地按照某种确定的步骤行事，通过一系列小的简单计算操作完成复杂计算的过程称为“算法”过程。在数学中，现代意义上的“算法”通常是指可以用计

算机来解决的某一类问题的程序或步骤，这些程序或步骤必须是明确和有效的，而且能够在有限步之内完成。

### “数量关系”

“数量关系”所涉及的内容可概括为如下结构图：



**实数系** 实数及其运算和大小关系。实数是度量大小的绝好工具，实数系是一切具有运算的体系的标兵，任何具有运算的体系中的内容、方法与思想，都能在与实数系的类比中得到启发。

**复数系** 复数及其运算。复数系由实数系扩张而得，是人类能创造出的最大、最佳数系，这是因为：把复数系再扩张时，就不再存在像复数系这样方便完美的运算了；对复数系，我们有代数基本定理（每一个复系数一元  $n$  次多项式至少有一个复数根，其中  $n$  为正整数）。

**向量系** 向量及其运算。直线上的向量的坐标是一个实数，平面中的向量的坐标是实数对  $(x, y)$ ，而空间中向量的坐标是三实数组  $(x, y, z)$ 。在这个意义上，向量可以看作实数的一种推广。另一方面，在历史上，复数  $(a+bi)$  曾被推广到四元数  $(a+xi+yj+zk)$ ，而其中的  $xi+yj+zk$  被发展成现在的向量。从这里看到，向量的确是“数”（即四元数）的一部分。当然，在谈论向量时永远应记住它在几何上和物理中的背景（有向线段，位移，力等）。

在研究几何时，作为工具，向量系和实数系有异曲同工之妙。

**代数系** 用文字代表数，我们有了变量  $a, b, c, x, y, z$  等。数和变量一起运算的结果，我们得到代数式，代数式之间也有加、减、乘、除等运算，这样就有了代数式及其运算。代数式及其运算可看成是数与数的运算的一种推广，它大大拓宽了运算对象的范围。

**方程** 令两个含变数的代数式相等便得到方程。方程是变量间数量关系的直接体现，而数和代数式是不可缺少的准备。由算术到代数的转化，我们可以看到方程、代数式及其运算的力量和美妙。

**不等式** 把方程中的“=”换成实数系所特有的“>”（或“<”）便得到不等式，因而两者有类似的地方。如方程有同解变换，不等式也有“同解”变换；由函数观点，方程  $f(x)=0$  的解可以看成函数  $y=f(x)$  的零点，而不等式  $f(x)>0$  的解集可以看成使函数  $y=f(x)$  取正值的  $x$  的全体。另一方面，两者关系密切：和函数的零点可看成是函数不等于 0 处的“边界点”类似，方程  $f(x, y)=0$  可设想为不等式  $f(x, y)>0$  的“边界”。“>”的性质比“=”的性质“坏”许多，我们应非常小心地对待不等式。

**初等函数 I** 令变量  $y$  等于含变量  $x$  的代数式  $p(x)$ ，即  $y=p(x)$ ，就得到  $x$  的函数  $y$ 。这是人们知道的第一批函数中的一类。其中最简单、最基本的就是幂函数，多项式函数，指数函数及其反函数即对数函数。

**数列** 数列及数列的运算. 在中学只讨论最简单、最基本的两类数列: 等差数列及等比数列. 我们可以把数列想象成数的推广, 也可以把数列看成是一类特殊的函数, 从而可以把等差数列与一次函数作类比, 把等比数列与指数函数作类比. 不可忽略的是数列的“影子”在中学数学中多次出现: 在用有理数逼近无理数中, 在求圆的面积或球的体积中, 在指数为无理数时的指数定义中, 在求函数的导数的过程中……

**三角函数** 描述周期现象的重要数学模型. 为解直角三角形而引入锐角三角函数; 为解任意三角形而推广到钝角三角函数; 为了刻画一些简单的周期运动(已和解三角形毫无关系了)而再次推广到任意角的三角函数, 后者成为非常重要的函数, 是描述一般周期函数的基石. 三角函数是数形结合的产物.

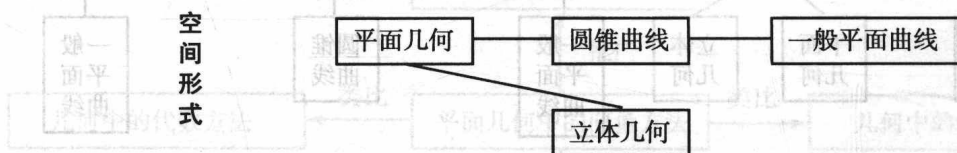
**函数** 函数及函数的运算(+、-、×). 函数描写运动, 刻画一个变量随着另一个变量的变化状态, 给出一个数集到另一个数集的对应关系. 它是覆盖面广、有统帅作用的概念: 数可以看成特殊函数; 数的运算可以看成特殊的二元函数; 代数式可以容易地被改造成一个函数; 数列是特殊的函数; 解一元方程就是求一个函数的零点, 因而解方程也可纳入函数问题的讨论中; 平面曲线在历史上曾为函数概念提供最初的例子, 而今天函数和曲线具有人和影子一样的密不可分关系; 解三角形化归为一个三角函数的问题……

从数和数的运算的角度, 从函数的角度以及数形结合的角度来观察中学数学, 是弄清中学数学脉络, 搞活中学数学的三个重要观点.

**函数的导数和积分** 虽然函数  $f(x)$  的导数和积分可以用极限概念“纯数量”地去定义, 但在中学里我们强调在实际背景下直观地、实质地去给出导数与积分的描述, 因而我们宁愿把这两个概念看成是数形结合的产物. 这里, 重要的是微积分基本定理, 它使求导函数和求积分真正成为互逆运算, 因而大大简化了这两种运算.

### “空间形式”

“空间形式”所涉及的内容可概括为如下结构图:



**平面几何** 讨论点, 直线, 直线的平行和垂直, 三角形, 圆等. 这是平面图形中最基本、最简单者, 然而也是培养学生的几何直观能力和进一步用坐标法讨论曲线的基础.

**圆锥曲线** 在中学, 给出它们的几何定义后, 便用数形结合的代数方法——“坐标法”来讨论它们. 这些基本、简单而又很有用的平面曲线使我们对平面曲线有了更多的感性认识, 同时“坐标法”也为用数形结合的微积分方法去研究一般曲线打下了一个很好的基础.

**立体几何** 线线、线面、面面之间的位置关系. 特别重要的是垂直和平行关系. 对于空间图形, 只是看看锥面和球面, 从直观上去感知它们的结构特征, 凭借最简单、最基本的直线、平面的位置关系, 以及三视图、透视图, 以使我们获得一定的空间形体的直观感觉.

**一般平面曲线** 虽然只在最后时刻用微积分方法专门讨论了它, 但在整个中学数学中, 与函数结伴几乎出现在所有的地方. 想到函数概念的无比重要性, 对帮助我们形象地看到函数的曲线是非常亲切的.

**“数形结合”**

**用三角函数解三角形** 参看 **三角函数**. 把几何中的定性定理转化为可计算的定量结果. 举例说, 已知三角形的两邻边  $a, b$  及其夹角  $C$ , 依边角边定理, 第三边  $c$  完全确定, 因而有函数  $c=f(a, b, C)$ . 如何具体给出这个函数? 这里引入三角函数以具体表示这个函数, 编制三角函数值表以使它可计算.

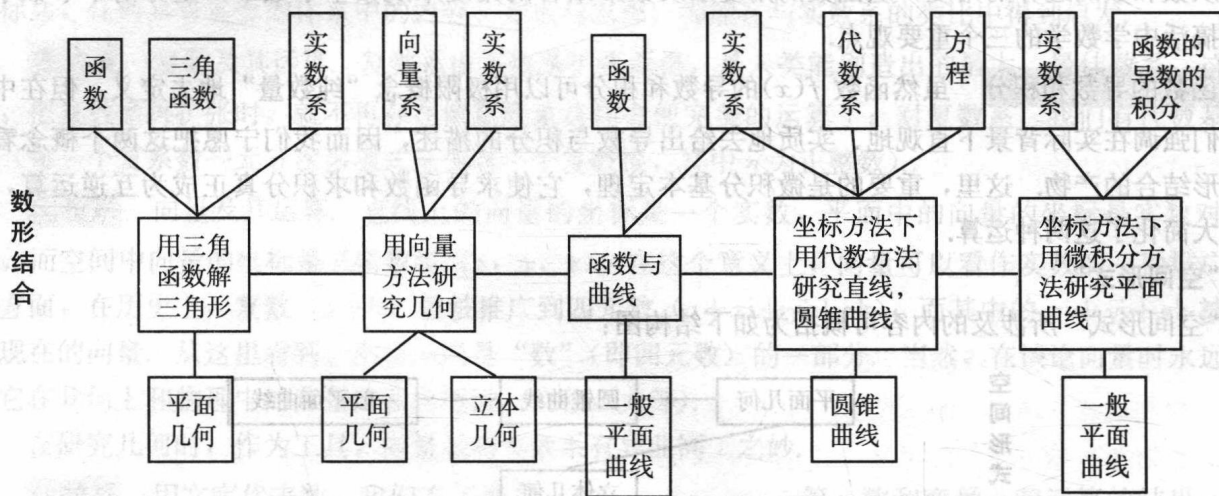
**用向量来研究几何** 用向量及其运算为工具. 用向量方法研究几何, 可概括为“三步曲”: 用向量表示出问题中关键的点、线、面; 进行向量计算得出结果; 对所得结果给予几何的解释而将问题解决.

**函数与曲线** 贯穿中学数学的一对孪生姐妹.

**坐标方法下用代数方法研究直线, 圆锥曲线** 用数及其运算为工具. 用代数方法研究几何, 可概括为“三步曲”: 用数(坐标), 代数式, 方程表示出问题中关键的点、距离、直线, 圆锥曲线; 对这些数, 代数式, 方程进行讨论; 把讨论结果给予几何的解释而将问题解决.

**坐标方法下用微积分方法研究平面曲线** 用导数和积分为工具. 用分析方法研究曲线. 在坐标系下, 函数对应曲线, 导数就是曲线切线的斜率, 积分就是曲线下覆盖的面积. 而微积分基本定理把这两个在几何上看不出有什么关系的几何量紧密地联系起来. 微积分是研究曲线的强大工具.

为了醒目, 把它们放在下面的框图中:



最后, 作为补充, 提出几点想法. 它们是把不同内容串联起来的一些细线, 有了它们, 不同内容的类比、联系就容易了.

1. 数和数的运算是一切运算系统的标兵. 让任意运算的对象和数类比, 让任意对象的运算和数的运算对比, 不仅能使我们获得需要研究的问题, 而且能使我们产生研究方法的灵感.

2. 函数观点是把不同对象联系起来的一个好观点. 参看 **函数**.

3. 把遇到的数量关系设法用几何图形表示出来: 函数的曲线, 方程与曲线, 实数与直线, 复数与平面, 向量与有向线段, 不等式的图象, 数据的图象等.

4. 把定性的结果变成定量的结果, 把存在的東西具体表示出来: 参看用三角函数解三角形. 直线用方程表示出来, 直线上的点用满足方程的两个实数表示出来; 一元二次方程的根用系数表示出来, 曲线的切线斜率用导数表示出来等等. 一旦定性的东西得到定量的表示, 操作起来就容易多了.

5. “恒等”变换是只变其形不变其质的数学推理, 目的是为了从“好”的形式中看出其本质. 这在数学中经常出现: 如一元二次多项式分解成一次因式的乘积, 代数式的恒等变换, 三角函数的恒等变换, 方程的同解变换, 一组数据的各种不同形式的组合, 整数(或一元多项式)的带余除法等等.



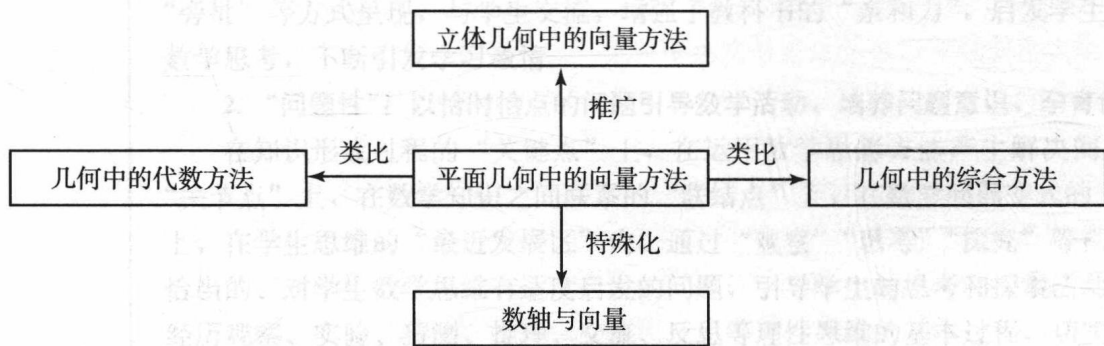
6. 相等的定义处处都有. 我们通过相等定义说明在所讨论的事物中什么是自己最关心的. 例如, 如果两个三角形能够重合放在一起, 就说它们全等, 这表明我们只注意三角形的形状和大小而对它的位置不感兴趣; 两个有向线段相等是指它们有相同的起点、相同的长度和相同的方向, 但如果对有向线段引入新的相等定义: 规定有相同长度相同方向的两个有向线段是相等的, 我们就将得到一个新对象——向量; 在函数的相等和方程的等价中, 我们都清楚地看到, 什么是这些概念中我们最关心的.

7. 逻辑结构编织着中学数学: 中学数学中虽然没有明确的公理体系形式, 但在每一次推理时, 我们都有明确的推理根据. 在这个意义下, 我们心目中都有一个“公理体系”, 并在其中进行推理. 这种潜移默化的逻辑结构的熏陶是中学数学的“灵魂”, 是培养学生的理性精神的特有载体. 如在概率中, 根据概率的定义, 经实验、观察得出概率的一系列性质; 后来在推导古典概型的概率计算公式时, 就是从这些性质出发, 经演绎推理而得; 在立体几何中, 明确了线线、线面、面面之间的平行、垂直定义, 并归纳出一些判定定理之后, 经推理得出一些性质定理; 在向量中, 有了向量的相等定义和运算定义后, 根据这些定义推导出了向量运算的运算律, 等等.

8. 从数学学习、研究过程来看, 经常使用如下的逻辑思考方法:



其中突出显示了联系的观点, 通过类比、推广、特殊化等, 可以极大地促进我们的数学思考, 使我们更有效地寻找出自己感兴趣的问题, 从中获得研究方法的启示. 例如, 关于平面几何中的向量方法, 我们可以有如下的“联系图”:



这个图把一些看似距离甚远的内容联系在一起, 不同的方法相互促进, 可以使我们提出更多的问题, 在更加广阔的思维空间中进行思考. 例如, 我们非常熟悉用代数方法研究圆锥曲线, 在上述“联系图”的引导下, 就会自然地提出“能否用向量方法研究圆锥曲线”“能否用综合法研究圆锥曲线”这样的问题.

# 说明

人教版普通高中课程标准实验教材·数学(A版),是以教科书为基础的系列化教材,包括基本教材和配套教学资源。基本教材是教科书和教师教学用书,配套教学资源包括新课程导学·数学、教学设计与案例、教学投影片、信息技术支持系统等。

人教版《普通高中课程标准实验教科书·数学(A版)》包括教育部制定的《普通高中数学课程标准(实验)》中规定的全部内容。本套教科书在坚持我国数学教育优良传统的前提下,认真处理继承、借鉴、发展、创新之间的关系,体现基础性、时代性、典型性和可接受性等,具有如下特点:

## 1. “亲和力”:以生动活泼的呈现方式,激发兴趣和美感,引发学习激情。

尽量选取与内容密切相关的、典型的、丰富的和学生熟悉的素材,用生动活泼的语言,创设能够体现数学的概念、结论及其思想方法发生发展过程的学习情境,使学生感到数学是自然的,水到渠成的,激发学生对数学的亲切感,引发学生“看个究竟”的冲动,兴趣盎然地投入学习。

在体现知识归纳概括过程中的数学思想、解决各种问题中数学的力量、数学探究和论证方法的优美和精彩之处、数学的科学和文化价值等地方,将作者的感受用“旁批”等方式呈现,与学生交流,增强了教科书的“亲和力”,启发学生更深入的数学思考,不断引发学习激情。

## 2. “问题性”:以恰时恰点的问题引导数学活动,培养问题意识,孕育创新精神。

在知识形成过程的“关键点”上,在运用数学思想方法产生解决问题策略的“关节点”上,在数学知识之间联系的“联结点”上,在数学问题变式的“发散点”上,在学生思维的“最近发展区”内,通过“观察”“思考”“探究”等栏目,提出恰当的、对学生数学思维有适度启发的问题,引导学生的思考和探索活动,使他们经历观察、实验、猜测、推理、交流、反思等理性思维的基本过程,切实改进学生的学习方式。

提问是创新的开始。“看过问题三百个,不会解题也会问”。通过恰时恰点地提出问题,提好问题,给学生示范提问的方法,使他们领悟发现和提出问题的艺术,引导他们更加主动、有兴趣地学,富有探索性地学,逐步培养学生的问题意识,孕育创新精神。

## 3. “思想性”:螺旋上升地安排核心数学概念和重要数学思想,加强数学思想方法的渗透与概括。

以数及其运算、函数、空间观念、数形结合、向量、导数、统计、随机观念、算法等数学核心概念和基本思想为贯穿整套教科书的“灵魂”,体现寻求一般性模式的思想 and 追求简洁与形式完美的精神等,引导学生领悟数学本质,体验数学中的理性精神,加强数学形式下的思考和推理训练,从而提高教科书的“思想性”。

**图 4. “联系性”：**通过不同数学内容的联系与启发，强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法的运用，学习数学地思考问题的方式，提高数学思维能力，培育理性精神。

利用数学内容的内在联系，使不同的数学内容相互沟通，提高学生对数学的整体认识水平。特别地，在教科书中强调类比、推广、特殊化、化归等思想方法，尽可能展示以下常用的逻辑思考方法：



使学生体会数学探索活动的基本规律，逐步学会借助数学符号和逻辑关系进行数学推理和探究，推求新的事实和论证猜想，从而发展学生认识事物的“数”、“形”属性和规律、处理相应的逻辑关系的悟性和潜能，养成逻辑思维的习惯，能够有条理地、符合逻辑地进行思考、推理、表达与交流。

教科书力求使数学内容的呈现做到脉络清晰，重点突出，体系简约，在学生原有认知结构基础上，依据数学学习规律、相关内容在不同模块中的要求以及数学内在的逻辑联系，以核心知识（基本概念和原理，重要的数学思想方法）为支撑和联结，循序渐进、螺旋上升地组织学习内容，形成结构化的教材体系。

选修系列4的教师教学用书，按照相应教科书的内容顺序编排，包括总体设计、教科书分析、习题解答、教学设计案例、自我检测题、拓展资源等栏目。

1. 总体设计是对整个专题作概括性介绍，重点说明教科书设计思想，包括：课程目标、学习目标、内容安排（知识结构框图及说明）、课时分配等。

(1) 课程与学习目标说明学生通过学习本专题内容应达到的要求，表述时关注了目标的可测性；

(2) 内容安排中给出了本专题的知识结构框图及其对内容安排的概括性说明，以利于教师从整体上把握本章知识发生、发展的脉络；

(3) 课时分配根据具体内容的分量提出课时分配的建议，教师可以根据自己的教学实际进行调整。

2. 教科书分析按照教科书内容顺序、以讲为单位进行分析，着重说明了编写意图，主要包括：本讲知识结构、重点与难点、编写意图与教学建议等。

(1) 本讲知识结构说明本讲知识点及其发生、发展过程（逻辑关系），说明学习本讲内容时，涉及的前后相关知识，采用“知识框图”或“表格”的方式表述；

(2) 重点不仅指数学概念、数学结论，而且包括数学思想方法、数学能力等方面的内容；难点说明学生在学习过程中可能遇到的困难和问题；

(3) 编写意图与教学建议主要对教科书“为什么要这样写”进行分析，包括学习相应内容应具备的认知发展基础，如何理解其中的一些关键概念，知识中蕴含的数学思想方法，突破重点、难点的建议，如何激发学生学习兴趣，渗透能力培养，以及数学应用意识、创新意识的培养等；对例题要达到的目的进行说明；对“观察”“思考”“探究”中的内容以及边空的问题，给出解释或解答。

教学建议主要对教师如何引导学生学习进行分析，从教科书编写者的角度结合具体内容给教师提出一些建议。

3. 教学设计案例选取了一些具有典型性的、教学难度大、新增知识、适宜使用信息技术的内容，包括概念课、研究（探究）课、习题课、复习课等不同课型。具体包括了下面一些内容：

- (1) 教学任务分析重点对学习相应内容时的认知要求进行分析；
- (2) 教学基本流程以框图的形式表示出教学的基本进程；
- (3) 重点和难点表述了本课内容的重点，以及学习中可能碰到的困难；
- (4) 教学情境设计以“问题串”为主线，在提出问题的同时，说明了设计意图。

4. 习题解答不仅给出解答过程，讲清楚“可以这样解”，而且还对一些典型问题分析了解答中的数学思想方法，说明“为什么可以这样解”，从而体现了习题作为巩固知识，深化概念学习，深刻理解知识，开展研究性学习，应用知识解决实际问题，培养学生的数学能力、创新精神和实践能力等功能。

5. 拓展资源为教师提供了一些教学中有用的资料，既有知识性的，又有数学历史、数学文化方面的资料。同时，在适当的地方，对数学教学中如何使用科学计算器、计算机、网络等进行说明或解释。

本书是选修课程数学 4-2 的教师教学用书，包含线性变换与二阶矩阵、变换的复合与二阶矩阵的乘法、逆变换与逆矩阵、变换的不变量与矩阵的特征向量等四讲内容。全书共 18 课时，具体分配如下（仅供参考）：

|     |                |        |
|-----|----------------|--------|
| 第一讲 | 线性变换与二阶矩阵      | 约 5 课时 |
| 第二讲 | 变换的复合与二阶矩阵的乘法  | 约 4 课时 |
| 第三讲 | 逆变换与逆矩阵        | 约 5 课时 |
| 第四讲 | 变换的不变量与矩阵的特征向量 | 约 4 课时 |

我们在广泛听取广大教师、教学研究人员意见的基础上，对教师教学用书进行了较大的改进，希望它能够较好地满足广大教师的教学需要。由于是对教师教学用书编写工作的一次新尝试，其中肯定存在许多值得改进的地方，希望广大教师在使用过程中提出宝贵意见，我们愿意根据大家的意见作出修正，使其更好地为教师服务。

# 目录

## I 总体设计 1

## II 教科书分析 4

### 第一讲 线性变换与二阶矩阵 4

一、本讲知识结构 4

二、教学重点与难点 4

三、编写意图与教学建议 4

(一) 线性变换与二阶矩阵 5

(二) 二阶矩阵与平面向量的乘法 5

(三) 线性变换的基本性质 6

四、教学设计案例 8

五、习题解答 10

### 第二讲 变换的复合与二阶矩阵的乘法 17

一、本讲知识结构 17

二、教学重点与难点 17

三、编写意图与教学建议 17

(一) 复合变换与二阶矩阵的乘法 17

(二) 矩阵乘法的性质 18

四、教学设计案例 19

五、习题解答 21

### 第三讲 逆变换与逆矩阵 23

一、本讲知识结构 23

二、教学重点与难点 23

三、编写意图与教学建议 23

(一) 逆变换与逆矩阵 23

(二) 二阶行列式与逆矩阵 25

(三) 逆矩阵与二元一次方程组 26

四、习题解答 28

### 第四讲 变换的不变量与矩阵的特征向量 33

一、本讲知识结构 33

|                     |    |
|---------------------|----|
| 二、教学重点与难点           | 33 |
| 三、编写意图与教学建议         | 33 |
| (一) 变换的不变量——矩阵的特征向量 | 33 |
| (二) 特征向量的应用         | 35 |
| 四、习题解答              | 36 |

**III 自我检测题** 40

# I 总体设计

## 一、课程目标与学习目标

### (一) 课程目标

矩阵是研究图形(向量)变换的基本工具,有着广泛的应用,许多数学模型都可以用矩阵来表示.本专题通过平面图形的变换讨论二阶方阵的乘法及性质、逆矩阵和矩阵的特征向量等概念,并以变换的观点理解解线性方程组的意义,初步展示矩阵应用的广泛性.

### (二) 学习目标

#### 1. 通过实例,了解二阶矩阵的概念

#### 2. 二阶矩阵与平面向量(列向量)的乘法、平面图形的变换

(1) 以变换的观点认识矩阵与向量乘法的意义.

(2) 证明矩阵变换把平面上的直线变成直线,即证明

$$A(\lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta) = \lambda_1 A\alpha + \lambda_2 A\beta.$$

(3) 通过大量具体的矩阵对平面上给定图形(如正方形)的变换,认识到矩阵可表示如下的线性变换:恒等、反射、伸压、旋转、切变、投影.

#### 3. 变换的复合——二阶方阵的乘法

(1) 通过变换的实例,了解矩阵与矩阵的乘法的意义.

(2) 验证二阶方阵乘法满足结合律.

(3) 通过具体的几何图形变换,说明矩阵乘法不满足交换律和消去律.

#### 4. 逆矩阵与二阶行列式

(1) 通过具体图形变换,理解逆矩阵的意义;通过具体的投影变换,说明逆矩阵可能不存在.

(2) 会证明逆矩阵的唯一性和  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$  等简单性质,并了解其在变换中的意义.

(3) 了解二阶行列式的定义,会用二阶行列式求逆矩阵.

#### 5. 二阶矩阵与二元一次方程组

(1) 能用变换的观点认识解二元一次方程组的意义.

(2) 会用系数矩阵的逆矩阵解系数矩阵可逆的二元一次方程组.

(3) 会通过具体的可逆的系数矩阵,从几何上说明线性方程组解的存在性、唯一性.

#### 6. 变换的不变量

(1) 掌握矩阵特征值与特征向量的定义,能从几何变换的角度说明特征向量的意义.

(2) 会求二阶方阵的特征值与特征向量(只要求特征值是两个不同实数的情形).

#### 7. 矩阵的应用

(1) 利用矩阵  $A$  的特征值、特征向量给出  $A^n \alpha$  简单的表示,并能用它来解决问题.

(2) 初步了解三阶或高阶矩阵.

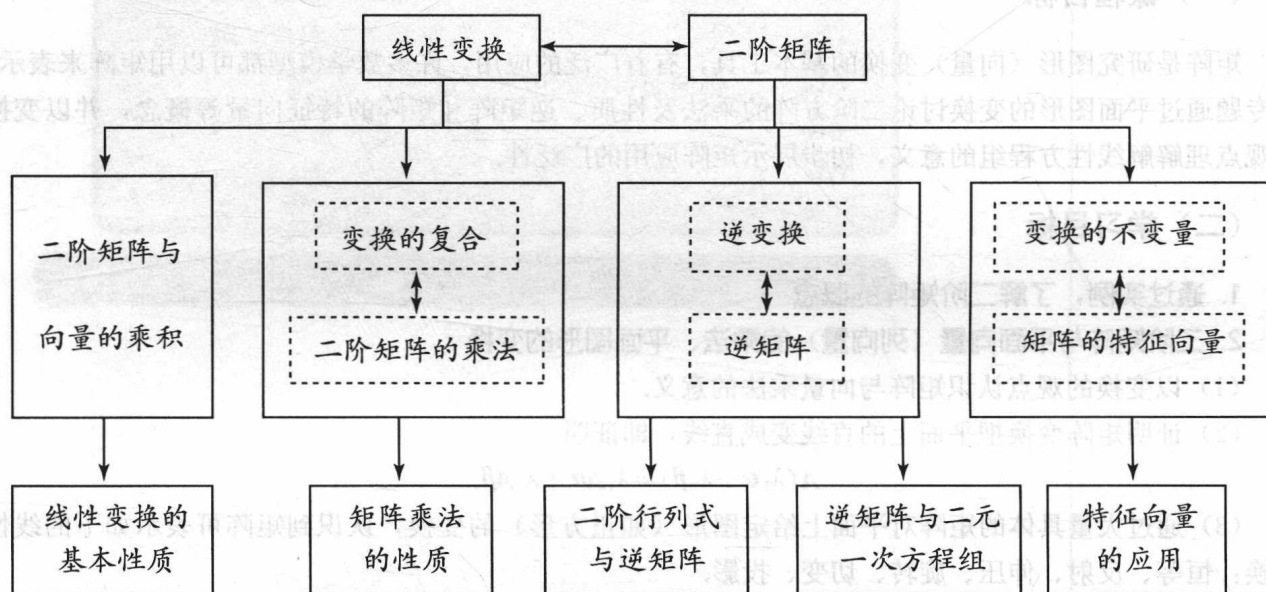
(3) 了解矩阵的应用.

## 8. 完成一个学习总结报告

报告应包括三方面的内容：(1) 知识的总结，理解本专题的整体思路、结构和内容，进一步认识变换的思想；(2) 拓展，通过查阅资料、调查研究、访问求教、独立思考，对矩阵变换及其应用做进一步探讨；(3) 学习本专题的感受、体会。

## 二、内容安排

## 1. 本专题知识结构框图



## 2. 对内容安排的说明

本专题分为四讲：第一讲，线性变换与二阶矩阵，内容包括：线性变换与二阶矩阵、二阶矩阵与平面向量的乘法、线性变换的基本性质；第二讲，变换的复合与二阶矩阵的乘法，内容包括：复合变换与二阶矩阵的乘法、矩阵乘法的性质；第三讲，逆变换与逆矩阵，内容包括：逆变换与逆矩阵、二阶行列式与逆矩阵、逆矩阵与二元一次方程组；第四讲，变换的不变量与矩阵的特征向量，内容包括：变换的不变量——矩阵的特征向量、特征向量的应用。

(1) 在本书引言中，首先回顾学生熟悉的平面图形的轴对称变换，然后用映射的语言重新叙述，接着在平面直角坐标系中进一步进行研究，得到这个变换的坐标变换公式，从而明确形如  $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$  (其中  $a, b, c, d$  均为常数) 的变换可以由一个二阶矩阵完全确定，并给出本专题中研究问题的基本思想——类比解析几何中对曲线与方程的讨论，对二阶矩阵与某些几何变换进行类似的研究，最后明确本专题的主要内容。

(2) 在平面直角坐标系中，线性变换与二阶矩阵是一一对应的，因此既可以通过二阶矩阵来研究对应的线性变换，也可以通过线性变换来研究对应的二阶矩阵。本专题中，总是先通过具体的线性变换从几何直观上获得感知，进而抽象出矩阵中的概念或结论。线性变换与二阶矩阵之间的一一对应关系是本专题研究线性变换与二阶矩阵的基本出发点。



(3) 本专题注重在呈现知识时渗透数学思想方法,除了(2)中提及的充分利用几何直观(数形结合)外,还特别强调以下两种思想方法:第一,从特殊到一般的思想方法.本讲中几乎所有的知识都是通过这种方式引入的.第二,类比的方法.例如,类比实数乘法的运算律研究二阶矩阵乘法的运算律;类比实数的乘法运算中的一条重要性质“如果 $a \neq 0$ ,则 $\frac{1}{a} \cdot a = a \cdot \frac{1}{a} = 1$ ”,通过线性变换引入逆矩阵;等等.

### 三、课时分配

本专题教学时间约为 18 课时,具体分配如下(仅供参考):

#### 第一讲 线性变换与二阶矩阵

- 一 线性变换与二阶矩阵 约 2 课时
- 二 二阶矩阵与平面向量的乘法 约 1 课时
- 三 线性变换的基本性质 约 2 课时

#### 第二讲 变换的复合与二阶矩阵的乘法

- 一 复合变换与二阶矩阵的乘法 约 2 课时
- 二 矩阵乘法的性质 约 2 课时

#### 第三讲 逆变换与逆矩阵

- 一 逆变换与逆矩阵 约 2 课时
- 二 二阶行列式与逆矩阵 约 1 课时
- 三 逆矩阵与二元一次方程组 约 2 课时

#### 第四讲 变换的不变量与矩阵的特征向量

- 一 变换的不变量——矩阵的特征向量 约 2 课时
- 二 特征向量的应用 约 2 课时