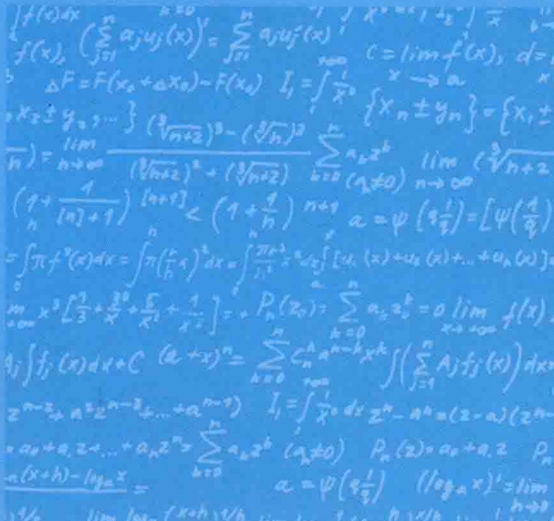
普通高等教育“十二五”规划教材配套用书



微积分学基础

学习指导

第2版

邱小丽 侯晓阳 王文庆
潘建丹 叶 帆 金廷蔚 编

中国科学技术大学出版社

☆大学数学系列教学参考与指导

微积分学基础学习指导

（第2版）

邱小丽　侯晓阳
王文庆　潘建丹　编
叶　帆　金廷蔚

中国科学技术大学出版社
·合　肥·

内 容 简 介

本书是与普通高等教育“十二五”规划教材《大学数学：微积分学基础》(第 2 版，中国科学技术大学出版社)配套的学习指导书，是为适应普通高等学校应用型本科经济管理类专业高等数学课程教学要求而编写的. 全书共 9 章，各章节内容与教材互相对应，包括：函数，极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分及其应用，多元函数及其微积分学，无穷级数，常微分方程. 每节均由学习目标、知识要点、基础例题分析、基础作业题、提高题五部分组成.

本书可作为普通高等学校应用型本科经济管理类专业学生学习高等数学课程的辅导用书，也可作为教授高等数学课程的教师和广大自学者的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

微积分学基础学习指导/邱小丽等编. —2 版. —合肥：中国科学技术大学出版社，2017. 8

ISBN 978-7-312-04281-2

Ⅰ. 微… Ⅱ. 邱… Ⅲ. 微积分—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 165698 号

出版 中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
http://www.press.ustc.edu.cn
https://zgkxjsdxcbs.tmall.com
印刷 合肥华苑印刷包装有限公司
发行 中国科学技术大学出版社
经销 全国新华书店
开本 710 mm×1000 mm 1/16
印张 14.25
字数 296 千
版次 2013 年 8 月第 1 版 2017 年 8 月第 2 版
印次 2017 年 8 月第 2 次印刷
印数 6001—10000 册
定价 28.00 元

前　言

微积分学是经济管理类本科专业学生必修的一门公共基础课程，是提高学生文化素质和学习专业知识的重要基础. 本书是与普通高等教育“十二五”规划教材《大学数学：微积分学基础》(第2版，中国科学技术大学出版社)配套的学习指导书，其目的是帮助普通高等学校应用型本科经济管理类专业的大学生强化课外练习，较好地掌握微积分学知识. 同时，使学生通过对本指导书的学习，进一步加深对微积分学基本概念的理解，强化计算与证明问题的处理技巧. 本书中的例题和习题有一部分来自考研真题，希望为那些想继续深入学习并准备报考研究生的同学提供一本系统、精练的入门指导书.

本书每章节的内容主要由五大部分组成：第一部分是每一节的学习目标与要求，给学生指明了学习的方向. 第二部分是各节的知识要点，是对教材的各重要知识点的小结和补充. 第三部分是基础例题分析，这些例子是根据不同的知识点选出的有较强概念和运算价值的例题，学生通过对这些例题的学习能够较快地掌握知识点，提高课程学习的效率. 第四部分是基础练习题，其目的是测试学生对该节内容的掌握情况，及时了解学习效果. 第五部分是提高型学习内容，不仅包括提高例题的分析与解答，也包含了一定量的提高练习，为更高层次的学习奠定基础.

本书第2版在保持第1版原有框架的基础上，主要在以下两个方面做了进一步的修改和完善：首先，结合配套教材的内容变化，对部分章节的内容进行了适当的调整；其次，根据第1版的使用情况，对部分章节的例题与练习进行了修改，尽量做到由易到难，深入浅出，使其更符合学生的学习规律.

本书编写的具体分工如下：潘建丹、王文庆撰写第1、2章；侯晓阳、王文庆撰写第3、4、7、8章；邱小丽、金廷蔚撰写第5、6章；叶帆撰写第9

章.真诚感谢严忠、杨爱琴、郭常超三位教授,他们审阅了本书的全部内容,并进行了最后的统稿总撰.

限于编者的教学经验和学术水平,加上成书时间较为仓促,书中难免存在疏漏和不足,恳请读者和同行专家批评指正.

编　者

2017年5月

目 录

第1章 函 数

1.1 函数的概念

【学习目标】

理解函数的概念,会求常见函数的定义域.

【知识要点】

1. 函数的定义

设 x,y 是两个变量,D 是一个给定的非空数集,若对于每个数 $x\in D$,按照某个对应法则 f,有唯一确定的 y 值相对应,则称 y 为 x 的**函数**,记作 $y=f(x)$,称 D 为这个函数的**定义域**.

2. 函数的两要素

定义域和对应法则是确定一个函数的两要素.

自然定义域:使函数表达式有意义的一切实数构成的集合.

3. 函数的常用表示法

公式法(解析法),图像法,表格法.

【典型例题选讲——基础篇】

例1 设 $f(x)=\dfrac{\ln(x+4)}{\sqrt{x^2-4}}$,求 $f(x)$ 的定义域.

解 要使函数有意义,则应有:$\begin{cases}x+4>0\\x^2-4>0\end{cases}$,解得:$\begin{cases}x>-4\\x<-2\text{ 或 }x>2\end{cases}$,函数的定义域为:$(-4,-2)\cup(2,+\infty)$.

例2 已知 $f(e^x+1)=e^{2x}+e^x+1$,求 $f(x)$ 的表达式.

解 令 $e^x+1=t$,则 $e^x=t-1$,其中 $t>1$,那么 $f(e^x+1)=f(t)=(t-1)^2+(t-1)+1=t^2-t+1$.即

$$f(x)=x^2-x+1\quad(x>1)$$

例3 设 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant 1\\-1, & 1<x\leqslant 2\end{cases}$,求 $f(x)$,$f(2x)$ 的定义域,并求 $f\left(\dfrac{1}{3}\right)$,

$f(4)$.

解　$f(x)$的定义域为$[0,2]$.

$$f(2x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant 2x\leqslant 1\\ -1, & 1<2x\leqslant 2\end{cases},\quad \text{即}\quad f(2x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant \frac{1}{2}\\ -1, & \frac{1}{2}<x\leqslant 1\end{cases}$$

所以,$f(2x)$的定义域为$[0,1]$. $f\left(\frac{1}{3}\right)=1$,$f(4)$不存在.

【基础作业题】

1. 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{4-x^2}$　　(2) $y=\dfrac{\ln(x+4)}{\sqrt{x-4}}$

2. 已知 $f(x)=x^2-3x+2$,求:$f(1)$,$f(-x)$,$f(x+1)$.

3. 已知 $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$,$(x>0)$,求 $f(x)$的表达式.

1.2　函数的性质

【学习目标】

理解函数的单调性、奇偶性、周期性、有界性等性质,掌握四种性质的判定及

应用.

【知识要点】

1. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,区间 $I\subset D$. 对于 I 中任意点 x_1、x_2,当 $x_1<x_2$ 时,

(1) 若恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 为区间 I 上的**单调增(上升)函数**;

(2) 若恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$ 为区间 I 上的**单调减(下降)函数**.

2. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,且对 $\forall x\in D$ 恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为**偶函数**. 若对 $\forall x\in D$ 恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

3. 函数的周期性

设函数的定义域为 D,如果存在常数 $T>0$,使得对 $\forall x\in D$ 只要 $x+T\in D$,就有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为周期函数,T 称为 $f(x)$ 的周期.

4. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在一个正数 M,使得 $\forall x\in D$ 恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称 $f(x)$ 为**有界函数**(或称函数 $f(x)$ 是**有界的**),并称 M 为该函数的界(M 不是唯一的).

若具有上述性质的正数 M 不存在,则称 $f(x)$ 为**无界函数**(或称函数 $f(x)$ 是**无界的**).

【典型例题选讲——基础篇】

例1 判别函数 $f(x)=\lg(\sqrt{x^2+1}-x)$ 的奇偶性.

解 在 $(-\infty,+\infty)$ 上,$f(x)=\lg(\sqrt{x^2+1}-x)$,因为

$$\begin{aligned}f(-x)&=\lg\left[\sqrt{(-x)^2+1}-(-x)\right]=\lg(\sqrt{x^2+1}+x)\\&=\lg\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}-x}=\lg\frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\\&=-\lg(\sqrt{x^2+1}-x)=-f(x)\end{aligned}$$

所以在 $(-\infty,+\infty)$ 上,函数 $f(x)=\lg(\sqrt{x^2+1}-x)$ 为奇函数.

例2 函数 $y=-x^2-2x$ 在 $[-3,3]$ 上是否有界? 若有界,给出一个上界与一个下界.

解 一元二次函数 $y=-x^2-2x=-(x+1)^2+1$,因为在 $[-3,3]$ 上

$$y_{\max}=y(-1)=1,\quad y_{\min}=y(3)=-15$$

所以在 $[-3,3]$ 上,可取 $y(-1)=1$ 为上界,$y(3)=-15$ 为下界,则函数 $y=-x^2-2x$ 在 $[-3,3]$ 上有界.

【基础作业题】

1. 下列函数中哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些是非奇非偶函数？

(1) $f(x)=x^4-2x^2$　　(2) $f(x)=x-x^2$

(3) $f(x)=x\sin x$　　(4) $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

2. 下列函数在定义域内是否有界？

(1) $y=\sin(x-2)$　　(2) $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$

1.3 初 等 函 数

【学习目标】

理解反函数、复合函数的概念，熟悉基本初等函数的性质及图形.

【知识要点】

1. 反函数

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，值域为 W. 若 $\forall\, y\in W$，有唯一的 $x\in D$ 与之对应，且满足 $f(x)=y$，由此确定一个新的函数，记为 $x=f^{-1}(y)$，称此函数为 $y=f(x)$的**反函数**. 反函数的定义域为 W，值域为 D. 相对于反函数，称函数 $y=$

$f(x)$为**直接函数**.

2. 基本初等函数

包括常值函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数.

3. 复合函数

设函数 $y=f(u)$的定义域为D,函数 $u=\varphi(x)$的值域为 W,若 $D\cap W\neq\varnothing$,则称函数 $y=f[\varphi(x)]$为 x 的**复合函数**,其中 x 称为自变量,u 称为**中间变量**.

注 1:复合函数可以由两个或两个以上的函数构成,但不是任何两个函数都能构成复合函数的,必须使内层函数(例如 $\varphi(x)$)的值域与外层函数(例如 $f(u)$)的定义域的交集非空.

注 2:对于复合函数,需清楚它是由哪些基本初等函数或简单函数复合而成的,因为后续章节中关于复合函数求导、积分中的换元法、分部积分公式都是基于复合函数的分解.

4. 初等函数

由基本初等函数经有限次的加、减、乘、除(分母不为零)及有限次的复合运算,且能用一个解析式表示的函数,称为初等函数.

【典型例题选讲——基础篇】

例 1 设 $f(x)=\dfrac{2x}{1-x}$,求 $f[f(x)]$.

解 因为 $f(x)=\dfrac{2x}{1-x}$,将其中的 x 换成 $f(x)=\dfrac{2x}{1-x}$,得

$$f[f(x)]=f\left(\frac{2x}{1-x}\right)=\frac{2\cdot\dfrac{2x}{1-x}}{1-\dfrac{2x}{1-x}}=\frac{4x}{1-3x}$$

例 2 求下列函数的反函数.

(1) $y=\ln\dfrac{x+5}{x-5}$ (2) $y=-\sqrt{1-x^2}$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$

解 (1) 由 $y=\ln\dfrac{x+5}{x-5}$,解得:$x=\dfrac{5(e^y+1)}{e^y-1}$,反函数为

$$y=\frac{5(e^x+1)}{e^x-1}\quad x\neq 0$$

(2) 由 $y=-\sqrt{1-x^2}$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$,解得:$x=\sqrt{1-y^2}$,反函数为

$$y=\sqrt{1-x^2},\ -1\leqslant x\leqslant 0$$

例 3 将函数 $y=\cos\ln^3\sqrt{x^2+1}$分解为基本初等函数或简单函数.

解 最外层是余弦函数,即 $y=\cos u$,则

$$u=\ln^3\sqrt{x^2+1}=(\ln\sqrt{x^2+1})^3$$

次外层是幂函数，即 $u=v^3$，则 $v=\ln\sqrt{x^2+1}$；从外向里第三层是对数函数，即 $v=\ln w$，则 $w=\sqrt{x^2+1}$；最里层是幂函数，即 $w=\sqrt{t}$，则 $t=x^2+1$. 所以函数 $y=\cos\ln^3\sqrt{x^2+1}$ 由 $y=\cos u, u=v^3, v=\ln w, w=\sqrt{t}, t=x^2+1$ 复合而成.

【基础作业题】

1. 求下列函数的反函数.

(1) $y=\dfrac{e^x}{1+e^x}$　　(2) $y=1+\lg(x+2)$

2. 已知 $f(x)=1+\ln x, g(x)=2+\sqrt{x}$，求 $f[g(x)], g[f(x)]$.

3. 将下列函数分解为基本初等函数或简单函数.

(1) $y=2^{\cos x}$　　(2) $y=\ln\sin^2 x$

(3) $y=e^{\sin(x+1)}$ (4) $y=\arctan\sqrt{1-x^2}$

1.4 常用经济函数

【学习目标】

理解成本函数、收益函数、利润函数、需求函数、供给函数的概念,掌握简单经济问题的函数关系.

【知识要点】

1. 成本函数 $C(x)$, $x\geqslant 0$

成本函数表示一个企业生产某种产品数量为 x 时的总成本. 常常表示为 $C(x)=C_0+C_x$. 其中,C_0 表示固定成本,C_x 表示变动成本.

平均成本函数:$\bar{C}(x)=\dfrac{C(x)}{x}$.

2. 收益函数 $R(x)$, $x\geqslant 0$

收益函数表示销售出某种产品的数量为 x 时的全部收入.

假设单位产品的价格为 p,则 $R(x)=px$.

3. 利润函数 $L(x)$, $x\geqslant 0$

利润函数表示销售出某种产品的数量为 x 时所获得的利润.

利润等于收入减去成本,即 $L(x)=R(x)-C(x)$.

4. 需求函数 $Q(x)$, $x\geqslant 0$

需求函数是指在某一特定时期内,某种产品的价格为 x 时,市场对该产品的需求量. 一般来说,商品价格低,则需求量大;商品价格高,则需求量小. 因此,需求函数$Q(x)$是单调减少函数.

5. 供给函数 $S(x)$, $x\geqslant 0$

供给函数表示商品价格为 x 时市场对该商品的供给量. 一般来说,商品价格

低，生产者不愿生产，则供给少；商品价格高，则供给多. 因此，供给函数 $S(x)$ 是单调增加函数.

【典型例题选讲——基础篇】

例 1　工厂生产某种产品，每月产量为 x（单位：kg）时，总成本（单位：元）为 $C(x)=\frac{x^2}{2}+4x+3\,200$，求平均成本以及产量为 100 kg 时的成本.

解　设平均成本为 $\bar{C}(x)$，则

$$\bar{C}(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{1}{2}x+4+\frac{3\,200}{x}$$

当 $x=100$ 时的总成本为

$$C(100)=\frac{1}{2}\times 100^2+4\times 100+3\,200=8\,600$$

例 2　某商品批量生产的总成本函数是 $C(x)=1\,000+36x$，产品销售价格 p 与产量 x 的函数关系是 $p(x)=100-0.25x$，求收益函数及利润函数.

解　收益函数为

$$R(x)=xp(x)=100x-0.25x^2$$

利润函数为

$$L(x)=R(x)-C(x)=64x-0.25x^2-1000$$

例 3　已知某商品的成本函数为 $C(x)=12+3x+x^2$，收入函数为 $R(x)=11x$，试求该商品的盈亏平衡点，并说明盈亏情况.

解　由 $L(x)=R(x)-C(x)=0$，得：$11x=12+3x+x^2$，整理得

$$x^2-8x+12=0$$

从而得到两个盈亏平衡点，分别为 $x_1=2$，$x_2=6$. 由利润函数

$$\begin{aligned}L(x)&=R(x)-C(x)=11x-(12+3x+x^2)\\&=8x-12-x^2=(x-2)(6-x)\end{aligned}$$

可以看出，当 $x<2$ 时，亏损；当 $2<x<6$ 时，盈利；而当 $x\geqslant 6$ 时又转为亏损.

【基础作业题】

1. 某厂生产的电话每台可卖 110 元，固定成本为 7 500 元，可变成本为每台 60 元. 问：

(1) 要卖多少电话，厂家才可保本（收回投资）？

(2) 如果卖掉 100 台电话，厂家盈利或亏损多少钱？

(3) 要获得 1 250 元利润，需要卖多少台电话？

2. 某水泥厂生产水泥 1 000 吨，定价为 80 元/吨，总销售量在 800 吨以内时按定价出售，超过 800 吨时，超过部分打 9 折出售，试将销售收入作为销售量的函数列出函数关系式.

3. 设某商品的需求函数为 $Q=25-p$，供给函数为 $S=\frac{20}{3}p-\frac{40}{3}$，求商品的市场均衡价格和市场均衡数量.

4. 银行向企业发放一笔贷款，贷款额为 100 万元，期限为 4 年，年利率为 6%，试分别用单利和复利两种方式计算 4 年后银行应得的本利和.

5. 设复利的年利率为 8%，如果希望在 9 年后获得 100 万元，那现在应付的本金为多少？

第 1 章 自 测 题

一、选择题

1. 函数 $y=\sqrt{5-x}+\lg(x-1)$ 的定义域是（　　）.

A. $(0,5]$　　B. $(1,5]$　　C. $(1,5)$　　D. $(1,+\infty)$

2. 下列 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是相同函数的是（　　）.

A. $f(x)=x, g(x)=(\sqrt{x})^2$　　B. $f(x)=\sqrt{x^2}, g(x)=|x|$

C. $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$　　D. $f(x)=\lg\sqrt{x}, g(x)=\dfrac{1}{2}\lg|x|$

3. 设 $f(u)=\begin{cases} u+1, & u<0 \\ u-1, & u\geqslant 0 \end{cases}$，$u=\varphi(x)=\lg x$，则 $f[\varphi(10)]=$（　　）.

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

4. 下列函数中为奇函数的是（　　）.

A. $f(x)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)$　　B. $f(x)=x^3\sin x$

C. $f(x)=x+x^2$　　D. $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

5. 函数 $y=\cos^2(3x+1)$ 的复合过程是（　　）.

A. $y=\cos^2 u, u=3x+1$　　B. $y=u^2, u=\cos(3x+1)$

C. $y=u^2, u=\cos v, v=3x+1$　　D. $y=\cos u^2, u=3x+1$

二、填空题

1. 设 $f(x)=3x+5$，则 $f(f(x)-2)=$______.

2. 设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,\pi]$，则 $f(\ln x)$ 的定义域是______.

3. 设 $f(x+1)=x^2+4x+3$，则 $f(x)=$______.

4. 设 $f(x)=1+\ln(x+1)^2, x>-1$，则其反函数为______.

5. 复合函数 $y=(\arcsin\sqrt{1-x^2})^2$ 可分解为______.

三、计算题

1. 已知 $f(t)=\sin t, f(g(t))=1-t^2$，求 $g(t)$ 及其定义域.

2. 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}+1}+\sin\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+2, |x|>1$，求 $f(x)$ 的表达式.

3. 已知 $g(t)-2g\left(\dfrac{1}{t}\right)=t$，求 $g(t)$.

4. 求 $y=\dfrac{1-\sqrt{1+4x}}{1+\sqrt{1+4x}}$ 的反函数.

5. 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求函数 $f(x+a)+f(x-a)$ 的定义域.