吉林财经大学出版资助图书

奇异微分方程边值问题解的研究

曹忠威　祖　力　著

科学出版社

奇异微分方程边值问题解的研究

曹忠威　祖　力　著

吉林财经大学出版资助图书

科学出版社
北京

内 容 简 介

非线性奇异微分方程边值问题与奇异积分方程问题是方程理论中的重要课题，是科学研究和解决技术问题的主要工具，具有广泛的应用价值，它丰富的理论和先进的方法为解决当今科技领域中层出不穷的非线性问题提供了富有成效的理论工具，在处理实际问题中发挥着不可替代的作用，对于这类方程的求解也因此成为了研究的热点和难点之一. 本书在前人研究的基础上，利用不动点定理证明出了弱奇性条件下奇异微分方程周期正解的存在性、奇异积分方程正解的存在性、脉冲微分方程正解的存在性，重点强调的是弱奇性有助于周期解的存在. 为了验证理论，本书还列举了四阶边值问题、$(k,n-k)$共轭边值问题、二阶奇异耦合 Dirichlet 系统、二阶脉冲奇异半正定 Dirichlet 系统等实例来说明，并利用上下解定理和锥不动点定理得到系统存在多个正解的条件. 对于一维 p-Laplace 二阶脉冲奇异微分方程，利用 Schauder 不动点定理和 Leray-Schauder 非线性变换获得一个普遍适用的存在性原则，并利用 Arzela-Ascoli 定理得到正解的存在性.

本书内容充实、研究深入、论证严谨、写作思路清晰，适合数学专业高年级本科生、非线性泛函分析方向或应用微分方程方向研究生及对边值问题研究有兴趣的科研人员阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

奇异微分方程边值问题解的研究/曹忠威，祖力著. —北京：科学出版社，2017.8

ISBN 978-7-03-054047-8

Ⅰ.①奇… Ⅱ.①曹… ②祖… Ⅲ.①微分方程-边值问题-研究 Ⅳ.①O175.8

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017) 第 182974 号

责任编辑：张中兴 梁 清／责任校对：彭 涛
责任印制：徐晓晨／封面设计：迷底书装

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京教图印刷有限公司 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2017 年 8 月第 一 版 开本：720×1000 B5
2017 年11月第二次印刷 印张：11 3/4
字数：251 000

定价：51.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

作 者 简 介

曹忠威, 女, 1981 年 2 月出生. 副教授, 理学博士, 吉林财经大学应用数学学院副院长, 吉林省数学会理事, 荣获吉林财经大学“青年学俊”、“巾帼建功标兵”、“青年教师之星”、“亚泰杯最受欢迎教师”等荣誉称号, 是省级优秀教学团队和校级优秀团队主要参加人, 省级精品课以及省级优秀课主要参加人.

曹忠威副教授的主攻专业为应用数学, 研究方向为微分方程, 近年来以第一作者身份在 *Nonlinear Analysis*, *Journal of Nonlinear Science Applications* 等国际学术刊物上公开发表 SCI 检索论文 5 篇, EI 检索论文 1 篇, 获得吉林省自然科学学术成果奖二等奖和三等奖各 1 项, 校级特等奖和二等奖各 1 项. 主持完成国家自然科学基金项目 1 项, 参与国家自然科学基金项目 1 项; 主持省厅级科研项目 4 项, 教研项目 2 项; 参与吉林省厅级科研项目 8 项, 教研项目 2 项; 公开出版教材 1 部. 获得吉林省教育厅省级二等奖和三等奖各 1 项, 获吉林财经大学优秀教研成果二等奖 1 项, 青年教师教学竞赛三等奖 1 次. 带领本科生参加全国大学生数学建模竞赛多次获得省级一等奖和二等奖. 多年来, 承担微积分、线性代数、高等代数、概率论与数理统计、数学实验等多门通识基础课和专业课的讲授.

祖力, 女, 1979 年 4 月出生. 2002 年在东北师范大学取得理学学士学位, 2007 年、2013 年在东北师范大学分别取得应用数学专业硕士学位和博士学位. 2002 年 7 月—2014 年 7 月在长春大学理学院任教, 2014 年 8 月至今在海南师范大学数学与统计学院任教. 荣获 2016 年海南省“515 人才工程”第三层次人才称号.

祖力副教授的主攻专业为应用数学, 研究方向为常微分方程和随机微分方程. 自 2007 年以来, 在 *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *Nonlinear Analysis-Real World Applications* 和 *Applied Mathematics and Computations* 等 SCI 检索期刊上发表论文十余篇.

前　言

非线性常微分方程奇异边值问题来源于力学、边界层理论、反应扩散过程、生物学等应用学科, 是常微分方程理论中一个重要的研究课题. 自上世纪以来, 奇异常微分方程经常出现在许多应用学科的数学模型中, 大量的关于特征形式的奇异方程的边值问题的研究结果也随之出现. 由于奇异边值问题在应用数学中的地位越来越重要, 近五十年来, 数学工作者开始系统地研究这类问题. 他们在常微分方程边值问题、泛函微分方程边值问题和定性理论方面, 在非线性力学边界层理论和反应扩散过程方面, 以及在生态学等方面都做出了有一定深度、难度和分量的工作. 对这方面的问题进行理论分析, 即研究边值问题与周期解的存在唯一性、稳定性及渐近性等, 建立先验估计, 可以为数值计算和实际应用提供信息资料. 常微分方程边值问题涉及二阶及高阶常微分方程边值问题, 其中最突出的工作是奇异问题的研究工作, 例如天体力学中的 N 体问题、边界层理论、反应扩散理论、非 Newtonian 流理论等.

本书致力于研究弱奇性场合下半正的微分、积分方程 (组) 周期正解的存在性. 众所周知, 通过对线性齐次的 Hill 方程添加奇异扰动项可构成一般形式的二阶奇异方程, 习惯上称之为奇异扰动方程. 这类方程可用于描述工程、物理和天文学等领域的诸多现象, 如 Brillouin 聚焦、非线性拉伸以及引力场等. 就数学理论本身而言, 非线性扰动方程蕴含着丰富的动力学性质, 如周期性、概周期性、拟周期性与混沌等. 脉冲现象作为一种瞬时突变现象, 在现代科技各领域的实际问题中普遍存在. 这类系统在航天技术、信息科学、控制系统、通信、生命科学、医学、经济领域均被重要应用. 鉴于上述背景, 近二十年来, 许多分析学家逐渐开始关注二阶奇异微分方程的基本数学理论, 尤其是在实践中具有广泛意义的周期解的存在性问题, 以及脉冲现象对系统一个或多个正解存在性的影响. 研究弱奇性理论完全可能发现新的数学现象, 并在这一过程中发展新的分析工具. 从这个意义上讲, 本书从事的研究是分析数学领域里一项很有意义的基础性工作. 将现有结果推广到更一般的扰动方程或耦合系统中去, 同时获得一些更深刻更本质的结果, 尤其是最优条件. 具体地讲, 在借鉴并综合利用现有方法和工具的基础上, 考虑了更加一般的甚至是全

新的微分、积分方程 (组) 周期正解的存在性.

本书共分 6 章, 主要研究工作如下:

(1) 首先利用 Schauder 不动点定理证明了半正情形下奇异微分方程周期解的存在性; 其次, 利用 Leray-Schauder 二择一原则和锥不动点定理证明带有非线性扰动 Hill 方程周期正解的存在性和多重性.

(2) 弱奇性条件下利用 Schauder 不动点定理对奇异积分方程正解的存在性进行讨论; 其次利用锥不动点定理和 Leray-Schauder 非线性二择一定理, 讨论了在正的情形和半正情形下奇异积分方程多重正解的存在性; 最后举例加以说明.

(3) 对于二阶非自治奇异耦合系统周期解的存在性、二阶奇异耦合积分方程组正解、$(k, n-k)$ 耦合边值问题正解的存在性, 构造适当的格林函数, 利用锥不动点定理, 分情况进行深入论证.

(4) 对于脉冲微分方程, 研究了二阶脉冲奇异半正定 Dirichlet 系统, 并利用上下解定理和锥不动点定理得到系统存在多个正解的条件; 研究了一维 p-Laplace 二阶脉冲奇异微分方程, 利用到 Schauder 不动点定理和 Leray-Schauder 非线性变换获得一个普遍适用的存在性原则, 并利用 Arzela-Ascoli 定理得到正解的存在性.

本书是在国家自然科学基金项目 (项目编号: 11426113)、吉林省科技发展计划项目 (项目编号: 20160520110JH)、吉林财经大学校级重点项目 (项目编号: 0800091602)、吉林财经大学 2016 年专著出版资助计划的资助和支持下完成的.

由于作者水平有限, 书中难免有考虑不周和疏漏之处, 诚请广大读者批评指正.

曹忠威 祖 力

2017 年 3 月

目　　录

第1章　绪　　论

1.1　概　　述

非线性泛函分析理论与应用的研究, 特别是近几十年来, 国内外的很多学者都做了大量而深刻的工作, 取得了丰硕的成果. 例如, 张恭庆教授、陈文原教授、郭大钧教授、章梅荣教授、孙经先教授、蒋达清教授、储继峰教授等都在这个领域做出了深刻的工作. 国外一些著名的数学家, 如 D.O'Regan、E.N.Dancer、F.E.Browder、H.Aman、H.Brezis、J.Nieto、K.Deimling、M.A.Krasnosel'skii、N.S.Trudinger、J.R.L. Webb、R.P.Agarwal 等教授在这一领域也做了许多很好很丰富的结果.

郭大钧先生等在专著 [1] 和综述报告 [2] 中, 介绍了如何利用锥理论研究非线性问题, 在专著 [3] 中研究了非线性分析中的半序方法, 总结了几年来的最新成果. 在专著 [4] 中讨论了各种各样积分方程解的存在性. 在专著 [5] 中研究了非线性常微分方程的函数方法. Deimling 的专著 [6] 包含了非线性泛函分析这一领域各方面的成果. 抽象空间中的常微分方程是近年来新发展起来的数学分支, 它把泛函分析理论和微分方程理论相结合, 借助泛函分析的方法研究抽象空间的微分方程. 国内在这一课题的第一本著作是郭大钧教授和孙经先教授的专著 [7], 概括了 Banach 空间的常微分理论和方法. 文献 [8]—[11] 综述了抽象空间中非线性微分方程各个分支的内容, 包括证明解得存在性所用的方法和解的某些性质. 文献 [12] 是一篇综述报告, 概括了微分方程发展的最新成果. 非线性常微分方程奇异边值问题的研究, 虽然是非线性问题中一个困难而有趣的方面, 但在气体动力学、流体力学、边界层理论及传染病模型等实际问题中始终有着重要而广泛的作用. 著名的爱尔兰数学家 D.O'Regan 在专著 [13] 中对此类问题做了详细系统的论证.

随着科学家对自然界求知欲的增强, 研究微分方程周期解问题的工具和方法层出不穷, 如非线性泛函分析、最优控制论、临界点理论、牛顿连续性方法、连续同伦方法等 [14−34]. 奇异微分方程在伯努利聚焦系统 [35−38] 和非线性拉伸系统 [39, 40] 中都有应用, 文献 [41] 指出了 Ermakov-Pinney 方程正解存在性, 在纯量

牛顿周期解的存在性和稳定性方面所发挥的作用. 近年来, 带有奇异扰动的非自治 Hill 方程的周期正解的存在性和多重正解的存在性吸引了众多科研工作者的注意, 也有了一些文献 [40], [42]—[49]. Fonda、Manásevich 和 Zanolin 在文献 [50] 中利用 Poincaré-Birkhoff 定理在一定条件下, 方程 $x''+g(t,x)=0$ 周期正解的存在性进行了证明. del Pino 和 Manásevich 也在文献 [39] 中给出了方程无穷多个周期解的存在性的证明. 同样地, del Pino, Manásevich 和 Montero 在文献 [40] 中证明了方程 $x''+g(t,x)=h(t)$ 至少存在一个周期正解.

积分方程是继微分方程之后出现的一个新的重要的近代数学的分支, 与微分方程、计算数学、泛函分析、位势理论和随机分析都有密切的联系 [51−57]. D.HillDert 曾表示 [58], 积分方程对于定积分理论、线性微分方程理论、级数理论、变分法都非常重要 [52, 54]. 积分方程是科学研究和解决工程问题的重要数学工具, 在电动力学、静电学、弹性力学、流体力学、辐射学、电磁场理论、地球物理勘探以及航空航天、机械、土木等领域的研究中, 许多问题都可以转化为求解对应的积分方程, 因而有着非常广泛的应用 [51−57],[59].

一大批研究学者 V.Volterra、I.Fredholm 和 E.Schimidt 等关于积分方程的出色工作, 在相当长一段时间内使得积分方程这门学科的研究与探索成为了世界性的狂热, 也令积分方程的研究从深度和广度都有了巨大的进步和发展, 出现了大量的文献, 具有相当大的应用价值. 在我国, 最早从事积分方程研究的老一辈专家和学者有张世勋教授、陈传璋教授、张石生教授等. 随着泛函分析理论的发展和完善, 科学家把微分方程的研究置于抽象空间的框架里, 令积分方程的理论更加完善, 应用也日益广泛, 进一步为微分–积分方程的研究奠定了基础. 由于实际问题的需要, 非线性积分方程的研究出现了很多的结果. 但是, 对一般的非线性积分方程缺乏系统的理论, 对于方程的可解性的讨论也很困难 [4]. 一段时间内, 因为积分方程本身的复杂性, 学者的研究热度有所下降 [52], 但随着计算机科学技术的迅猛发展, 为科学界和工程界提供了非常有利的计算工具, 借助计算机大容量、高速度的特点, 可以用精确的符号计算, 机械化地实现积分方程求解, 使得积分方程及其应用的研究随之活跃起来, 相关的杂志、会议、出版物不断涌现, 预示着积分方程及其应用的研究又可能出现新的高潮 [54−57].

我们主要感兴趣的是 Hill 方程的扰动

$$x''+a(t)x=f(t,x), \tag{1.1.1}$$

其中 $a(t)$ 连续且是 T-周期函数, 非线性项 $f(t,x)$ 连续且关于 t 是 T-周期的, $f(t,x)$ 在 $x=0$ 有奇性. 由于在天体力学中有重要应用, 方程 (1.1.1) 一直是很多数学工作者关注的对象, 考虑较多的是方程 (1.1.1) 周期正解的存在性, 即方程 (1.1.1) 满足下面边值条件的正解:

$$x(0)=x(T), \quad x'(0)=x'(T). \tag{1.1.2}$$

从物理意义来解释, 方程 (1.1.1) 在 $x=0$ 具有排斥奇性, 如果

$$\lim_{x\to 0^+} f(t,x)=+\infty, \tag{1.1.3}$$

关于 t 一致成立, 方程 (1.1.1) 在 $x=0$ 具有吸引奇性, 如果

$$\lim_{x\to 0^+} f(t,x)=-\infty, \tag{1.1.4}$$

关于 t 一致成立. 总的来说, 方程 (1.1.1) 在 $x=0$ 具有奇性, 如果 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(t,x)=\infty$, 关于 t 一致成立, $f(t,x)$ 在 $x=+\infty$ 处超线性指的是

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(t,x)}{x}=+\infty, \tag{1.1.5}$$

关于 t 一致成立. 奇异性的相互作用最典型的应用是静电学和万有引力. 比如在伯努利聚焦系统 [35−38] 和非线性拉伸系统 [39, 40] 中都有应用, 奇异拉格朗日系统的无碰撞周期轨道的存在性问题也吸引了许多数学家和物理学家的广泛关注. 如文献 [60]–[66] 在这个领域主要分为两大研究主线, 第一条是变异的方法. 对于吸引的情况, 在奇点附近去确定在奇点有没有发生碰撞的临界点, 某些条件是十分必要的. 众所周知的例子是强制性条件, 它第一次是 Gordon 在文献 [67] 中命名的, 虽然这个想法最初时 Poincaré 在文献 [68] 中提出的, 这个条件在吸引情况中, 避免碰撞已经广泛应用起来. 考虑方程

$$x''+g(t,x)=0. \tag{1.1.6}$$

第一种情况, 超线性情形, 当 $g(t,x)=g(x)-h(t)$, 即 (1.1.6) 是线性自治 (即可积) 方程的扰动, 其中 $g\in C((0,\infty),R)$. 在 $x=0$ 满足强制性条件:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=-\infty, \quad \lim_{x\to 0^+}\int^x g(x)dx=+\infty,$$

在 $x=+\infty$ 满足超线性条件: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}=+\infty$. 当 $g(t,x)$ 在 $x=+\infty$ 满足超线性条件且在 $x=0$ 点满足强制性条件: 存在正常数 c,c',μ 使得 $\mu\geqslant 1$ 时, 对于所有的 t 和充分小的 x 有

$$c'x^{-\mu}\leqslant -g(t,x)\leqslant cx^{-\mu}. \tag{1.1.7}$$

显然, 奇异方程 (1.1.6) 的动力学行为和正则情形非常类似.

第二种情况, 当 $g(t,x)$ 在 $x=+\infty$ 满足半线性增长阶条件, del Pino、Manásevich 和 Montero 在 [40] 中证明方程

$$x''+g(t,x)=h(t) \tag{1.1.8}$$

至少存在一个正周期解. 若 $g(t,x)$ 在 $x=0$ 满足 (1.1.7), 在 $x=+\infty$ 满足下面的非共振条件: 存在整数 $k\geqslant 0$ 和充分小的正数 ϵ, 使得

$$\left(\frac{K\pi}{T}\right)^2+\epsilon\leqslant\frac{g(t,x)}{x}\leqslant\left(\frac{(K+1)\pi}{T}\right)^2-\epsilon \tag{1.1.9}$$

对于所有的 $t\in[0,1]$ 和 $x\gg 1$ 成立.

以上关系章梅荣教授在文献 [38] 中有所揭示, 并且对方程 (1.1.8) 在半线性情形做了一些工作, 在文献 [69] 中, 指出周期和反周期特征值在研究方程 (1.1.8) 正周期解存在性的问题中起到了重要的作用, 进一步揭示了与正则情形不一样的现象, 这些结果是应用重合度理论 [49] 得到的, 证明周期解存在性的方法, 除了重合度理论, 还有上下解方法, 如文献 [70]. 上下解理论同样是处理非奇异问题基本又重要的工具, 参考文献 [71]. 对于半线性奇异方程

$$x''+a(t)x=\frac{b(t)}{x^{\lambda}}+e(t), \tag{1.1.10}$$

$a,b,e\in L^1[0,T]$, $\lambda>0$. $e(t)$ 可以取负值. 研究这类方程的兴趣起始于 Lazer 和 Solimini 的论文 [72], 他们证明了当 $a(t)\equiv 0, b(t)\equiv 1, \lambda\geqslant 1$ (即 Gordon 在文献 [67],[73] 中所定义的强制性条件) 时, 正周期解存在的充要条件是 c 的平均值小于 0, 即 $\bar{c}<0$. 另外, 当 $0<\lambda<1$ 时, 他们找到了 $\bar{c}<0$ 并且周期解不存在的例子. 从此, 强制性条件成了相关研究工作中的标准, 相关文献有 [38]—[40], [44], [47], [50], [74]—[79], 最近有文献 [80] 以及它们的参考书. 具有强奇性使原点

附近的能量变成无穷，并且这个事实对于经典的度理论应用中所需要的先验约束和 Poincaré-Birkhoff 定理的快速旋转研究有很大的帮助.

关于全连续算子的锥不动点定理在研究方程正解的存在性问题上，特别是研究可分离边值问题时发挥了非常重要的作用，见文献 [81], [82]. 关于周期问题，参考文献并不是特别丰富，主要是因为应用锥不动点定理需要考虑格林函数的符号，事实上对于周期问题，研究格林函数的符号是很困难的. 值得一提的是，Torres 在文献 [48] 中，根据文献 [84] 所发展的 L^α-反最大值原理成功地克服了困难，并且结合格林函数的性质和锥压缩拉伸不动点定理研究了二阶微分方程周期解的存在性，并将 I.Rachunkova、M.Tvrdy 和 I.Vrkoc 的工作进行了改进，得到了弱奇性条件下的一些结果. 蒋达清教授在文献 [76] 和 [85] 中还得到了超线性排斥奇异周期边值问题多重正解的存在性和超线性排斥奇异方程多重正周期解的存在性，分别研究是正的情形和半正的情形，并给出具体的例子来验证结果. R.P.Agarwal 和 D.O'Regan 关于积分方程作了详细的研究，见文献 [86]—[93]，证明了 Volterra 型和 Fredholm 型奇异积分方程解的存在性或多个解的存在性.

近来，Torres[81] 考虑了二阶半线性奇异方程 (1.1.10) 周期正解存在性的问题. 定义函数 $\gamma(t)=\int_0^T G(t,s)e(s)ds$, $\gamma_*=\min\limits_t \gamma(t)$, $\gamma^*=\max\limits_t \gamma(t)$. 在文献 [81] 中，利用 Schauder 不动点定理证明了在 $\gamma_*>0, \gamma_*=0$ 和 $\gamma^*\leqslant 0$ 情况下，(1.1.10) 周期正解的存在性. 需要指出的是，在 $\gamma_*=0$ 和 $\gamma^*\leqslant 0$ 时，弱奇性有助于周期解的产生，用到了 $0<\lambda<1$ 这个条件. 并且，在强制力条件下，上述结果能不能成立还是未知的. 对照强制性的相关文献，在弱奇性条件下周期解的存在性只是在最近研究了一些，并且参考文献也比较少，第一次关于存在性结果的研究出现在文献 [47] 中. 文献 [81] 中虽然解决了 $e(t)$ 变号的情况，但却没有考虑到无穷远处的性质，没有利用增长阶条件. 文献 [94] 中，储继峰和 Torres 推广了文献 [81] 的结果，考虑了如下二阶半线性奇异方程的周期问题

$$x''+a(t)x=\frac{b(t)}{x^\alpha}+d(t)x^\beta+e(t), \tag{1.1.11}$$

其中，$a,b,d,e\in C[0,T]$ 且 $\alpha,\beta>0$. 利用 Schauder 不动点定理，证明了当 $\gamma^*>0$ 或 $\gamma_*=0$ 时，(1.1.11) 周期正解的存在性. 文献 [16] 中，储继峰，Torres 和章梅荣研究了二阶非自治动力系统周期正解的存在性，并且对如下方程组进行了研究:

$$\begin{cases} x'' + a_1(t)x = \sqrt{(x^2+y^2)^{-\alpha}} + \mu\sqrt{(x^2+y^2)^{\beta}} + e_1(t), \\ y'' + a_2(t)y = \sqrt{(x^2+y^2)^{-\alpha}} + \mu\sqrt{(x^2+y^2)^{\beta}} + e_2(t), \end{cases}$$

其中, $a_1, a_2, e_1, e_2 \in C[0,T], \alpha, \beta > 0, \mu \in R, e_1, e_2$ 不一定是正数.

定义函数 $\gamma_i(t) = \int_0^T G_i(t,s)e_i(s)ds,\ i=1,2.\ \gamma_* = \min\limits_{i,t} \gamma_i(t),\ \gamma^* = \max\limits_{i,t} \gamma_i(t)$. 当 $\gamma_* > 0, \gamma_* = 0$ 时, 给出了弱奇性条件下, 方程组周期正解的存在性. 但是, 并没有真正解决 $e(t)$ 变号的情况, 他所考虑的都是 $e(t) \geqslant 0$ 的情形.

基于上述文献的思想, 本书是 Torres 和储继峰工作的延续, 重点研究了弱奇性条件下微分方程周期正解的存在性, 并且考虑到增长阶条件, 研究二阶半线性奇异方程 (1.1.11), 当 $\gamma^* \leqslant 0$ 或者 $\gamma_* < 0 < \gamma^*$ 时, 周期正解的存在性, 并随之推广到弱奇性条件下的二阶奇异耦合方程组周期正解的存在性, 得到了非常漂亮的结果. 可以说, 方程组解决半正问题少之又少, 解决耦合方程组的实际例子也很难找到. 并且, 我们是在 $G(t,s) \geqslant 0$ 的条件下证明的. 不能用传统的锥不动点定理实现, 锥不动点定理只能解决正的问题, 我们巧妙地利用了 Schauder 不动点定理来证明. 随后, 在 $G(t,s) > 0$ 条件下, 我们没有利用传统的重合度理论和上下解的方法, 而是利用 Leray-Schauder 二择一定理和锥不动点定理, 得到了奇异非线性 Hill 方程多重周期正解的存在性, 并给出了一个最经典的例子. 这是在之前文献中所没有的, 它指出了半正情形下带有增长阶的奇异微分方程周期正解的存在性.

接下来, 我们把微分方程得到的结果推广到积分方程, 同样在 $G(t,s) \geqslant 0$ 的条件下得到了弱奇性奇异积分方程和耦合方程组正解的存在性, 在 $G(t,s) > 0$ 的条件下得到了奇异积分方程多重正解的存在性. 不同的是, 多了可积性条件才能实现, 这一点要格外注意. 计算过程有些复杂, 但我们还是做到了, 为了验证理论, 我们还列举了四阶边值问题, $(k, n-k)$ 共轭边值问题等实例来说明. 特别地, 关于二阶奇异耦合 Dirichlet 系统周期正解的存在性也进行了详细说明.

全书共分 6 章.

第 1 章, 简要综述微分方程、积分方程的发展历史, 并且给出了本书要用到的相关知识内容, 介绍本书的主要工作.

第 2 章, 首先利用 Schauder 不动点定理证明了半正情形下奇异微分方程周期解的存在性以及二阶非自治奇异耦合系统周期解的存在性; 其次, 利用 Leray-Schauder 二择一原则和锥不动点定理证明带有非线性扰动 Hill 方程周期正解的存

在性和多重性, 给出具体例子, 对于储继峰之前所研究的弱排斥 Hill 方程多重正周期解存在性给出更具普遍性的例子进行解释说明.

第 3 章, 首先在弱奇性条件下利用 Schauder 不动点定理对奇异积分方程和耦合方程组正解的存在性进行讨论; 其次我们利用锥不动点定理和 Leray-Schauder 非线性二择一定理, 讨论了在正的情形和半正情形下奇异积分方程多重正解的存在性; 最后举例加以说明.

第 4 章, 先研究了弱奇性二阶奇异耦合微分方程组周期正解的存在性并针对弱奇性二阶奇异耦合积分方程组给出正解存在性的充分条件. 对于弱奇性 $(k, n-k)$ 耦合边值问题, 利用 Schauder 不动点定理得到正解的存在性.

第 5 章, 主要研究了脉冲微分方程. 对于二阶脉冲奇异半正定 Dirichlet 系统, 利用锥不动点定理得到了多个正解存在的充分条件, 并讨论了一维 p-Laplace 二阶脉冲奇异微分方程正解的存在性.

第 6 章, 给出了一个具体实例, 即二阶奇异耦合 Dirichlet 系统正解的存在性, 然后给出结论.

1.2 预 备 知 识

定义 1.2.1 设 X 为实 Banach 空间, K 是 X 中的闭凸子集, 如果它满足

(1) 若 $x \in K, \lambda \geqslant 0$, 则 $\lambda x \in K$;

(2) 若 $x \in K, -x \in K$, 则 $x = 0$.

则称 K 是 X 中的闭锥 (简称锥).

若假设 Hill 方程

$$x'' + a(t)x = 0 \tag{1.2.1}$$

满足下面的标准条件:

(A) 关于非奇次周期问题

$$x'' + a(t)x = e(t), \quad x(0) = x(T), \quad x'(0) = x'(T) \tag{1.2.2}$$

的格林函数 $G(t,s)$ 满足 $G(t,s) > 0, \ \forall\ (t,s) \in [0,T] \times [0,T]$.

(B) 若 (1.2.2) 的格林函数 $G(t,s)$ 满足 $G(t,s) \geqslant 0, \ \forall\ (t,s) \in [0,T] \times [0,T]$.

换句话说, 条件 (A) 或者 (B) 保证了问题 (1.2.2) 的反最大值原理成立. 在这任意一种条件下, (1.2.2) 的解都可以表示成

$$x(t) := \int_0^1 G(t,s)e(s)ds. \tag{1.2.3}$$

文献 [84] 证明, 如果 $a(t)$ 满足 $a \succ 0$, 则 $G(t,s)$ 的正性等价于

$$\underline{\lambda}_1(a) > 0, \tag{1.2.4}$$

其中符号 $a \succ 0$ 意思是 $a(t) \geqslant 0,\ \forall\, t \in [0,T]$, 且在 $[0,T]$ 的某一正测度子集上恒为正; $\underline{\lambda}_1(a)$ 是方程

$$x'' + (\lambda + a(t))x = 0 \tag{1.2.5}$$

相对于反周期边值条件

$$x(0) = -x(T), \quad x'(0) = -x'(T) \tag{1.2.6}$$

的第一反周期特征值.

文献 [84] 中发现了一些保证条件 (A) 或 (B) 成立的 $a(t)$. 为了说明这些, 我们用 $\|\cdot\|_q$ 代表通常的 L^q-模, 其中指数 $q \in [1,\infty)$. q 的共轭指数用 q^*: $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q^*} = 1$ 来表示. $\boldsymbol{K}(q)$ 代表满足下面不等式的最佳 Sobolev 常数:

$$C\|u\|_q^2 \leqslant \|u'\|_2^2, \quad \forall\, u \in H_0^1(0,T).$$

$\boldsymbol{K}(q)$ 的精确表达式为

$$\boldsymbol{K}(q) = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{qT^{1+2/q}} \left(\dfrac{2}{2+q}\right)^{1-2/q} \left(\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{1}{q}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{q}\right)}\right)^2, & 1 \leqslant q < \infty, \\ \dfrac{4}{T}, & q = \infty, \end{cases} \tag{1.2.7}$$

其中 Γ 代表 Gamma 函数.

引理 1.2.1[48], [84] 如果 $a(t) \succ 0$ 且存在 $1 \leqslant p \leqslant \infty$ 使得 $a \in L^p[0,T]$,

$$\|a\|_p < K(2p^*), \tag{1.2.8}$$

则 (1.2.1) 满足标准假设 (A), 即 $G(t,s)>0,\ \ \forall\,(t,s)\in[0,T]\times[0,T]$.

引理 1.2.2[48], [84] 如果 $a(t)\succ 0$ 且存在 $1\leqslant p\leqslant\infty$ 使得 $a\in L^p[0,T]$,

$$\|a\|_p\leqslant K(2p^*), \tag{1.2.9}$$

则 (1.2.1) 满足标准假设 (B), 即 $G(t,s)\geqslant 0,\ \ \forall\,(t,s)\in[0,T]\times[0,T]$.

为了得到方程的解, 还需要用到下面的定理.

定理 1.2.1 假设 K 为 Banach 空间 X 的一个凸集, Ω 为 K 的一个相对开子集, $0\in\Omega$, 映射 $T:\bar{\Omega}\to K$ 为一个全连续算子, 则下列两结论中必有一个成立:

(A_1) T 在 $\bar{\Omega}$ 上有一个不动点;

(A_2) 存在 $x\in\partial\Omega$ 和 $0<\lambda<1$, 使得 $x=\lambda T(x)$.

定理 1.2.2 设 X 是 Banach 空间,$K\ (\subset X)$ 是锥. 假设 $\Omega_1,\ \Omega_2$ 为 X 的两个开子集且 $0\in\Omega_1,\ \overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$, 令

$$T:K\cap(\overline{\Omega}_2\setminus\Omega_1)\to K$$

是全连续算子并且满足

(i) $\|Tu\|\geqslant\|u\|,\ u\in K\cap\partial\Omega_1;\ \|Tu\|\leqslant\|u\|,\ u\in K\cap\partial\Omega_2$;

或

(ii) $\|Tu\|\leqslant\|u\|,\ u\in K\cap\partial\Omega_1;\ \|Tu\|\geqslant\|u\|,\ u\in K\cap\partial\Omega_2$.

则 T 在 $K\cap(\overline{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$ 中有唯一的不动点.

定理 1.2.3 若 E 是实 Banach 空间, $S\subset E$ 是有界非空闭凸集, $A:S\to S$ 全连续, 则 A 在 S 中至少有一个不动点.

第 2 章　奇异半正微分方程周期正解的存在性

2.1　弱奇性奇异微分方程周期正解的存在性

本节主要推广文献 [81] 和 [94], 采用 Schauder 不动点定理, 证明如下二阶微分方程的周期正解存在性:

$$x'' + a(t)x = f(t, x) + e(t), \tag{2.1.1}$$

其中, $a(t)$, $e(t)$ 连续并且是 T-周期函数. 非线性项 $f(t, x)$ 在 (t, x) 连续, 并且关于 t 为 T-周期的. 在 $x = 0$ 时, 是奇异的, e 可以取负值.

文献中, 这类问题定义为半正问题, 假如存在的话, 设 p^* 和 p_* 为函数 $p \in L^1[0, T]$ 的上确界和下确界. 对于几乎处处的 $t \in [0, T]$, 如果 $p \geqslant 0$, 记为 $p \succ 0$. 且 p 在一个正测度集上是正的. 函数 $\gamma(t)$ 定义为

$$\gamma(t) = \int_0^T G(t, s)e(s)ds.$$

Lazer 和 Solimini[72] 考虑了如下半线性奇异微分方程:

$$x'' + a(t)x = \frac{b(t)}{x^\lambda} + e(t), \tag{2.1.2}$$

其中, $a, b, e \in C[0, T]$, $\lambda > 0$,. 近来, Torres[81] 考虑二阶半线性方程 (2.1.2) 的周期问题. 文献 [81] 中, 如果 $\gamma_* > 0$, $\gamma_* = 0$ 和 $\gamma^* \leqslant 0$, 利用 Schauder 不动点定理证明了正解的存在性.

文献 [94] 中, Chu 和 Torres 推广了文献 [81] 的结果. 考虑如下二阶半线性奇异方程的周期问题:

$$x'' + a(t)x = \frac{b(t)}{x^\alpha} + d(t)x^\beta + e(t), \tag{2.1.3}$$

其中, $a, b, d, e \in C[0, 1]$ 和 $\alpha, \beta > 0$. 当 $\gamma^* > 0$ 和 $\gamma_* = 0$ 时, 利用 Schauder 不动点定理, 证明了 (2.1.3) 周期正解的存在性.