法兰西数学
精品译丛

线性与非线性泛函分析及其应用（下册）

Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications

Philippe G. Ciarlet 著

秦铁虎 译

高等教育出版社

法兰西数学
精品译丛

线性与非线性泛函分析及其应用（下册）

Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications

□ Philippe G. Ciarlet 著
□ 秦铁虎 译

高等教育出版社·北京

图字：01-2015-4762 号

图书在版编目（CIP）数据

线性与非线性泛函分析及其应用．下册 /（法）菲立普·G. 希阿雷（Philippe G. Ciarlet）著；秦铁虎译．--北京：高等教育出版社，2017.8
（法兰西数学精品译丛）
书名原文：Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications
ISBN 978-7-04-047749-8

Ⅰ．①线… Ⅱ．①菲… ②秦… Ⅲ．①泛函分析 Ⅳ．① O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2017）第 112277 号

线性与非线性泛函分析及其应用
XIANXING YU FEIXIANXING FANHAN FENXI JIQI YINGYONG

策划编辑 李华英　责任编辑 李华英　封面设计 张 楠　版式设计 徐艳妮
责任校对 窦丽娜　责任印制 尤 静

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.hepmall.com.cn
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司		http://www.hepmall.com
开　　本	787mm × 1092mm　1/16		http://www.hepmall.cn
印　　张	25		
字　　数	480 千字	版　　次	2017 年 8 月第 1 版
购书热线	010-58581118	印　　次	2017 年 8 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	79.00 元

物 料 号　47749-00

《法兰西数学精品译丛》序

随着解析几何及微积分的发明而兴起的现代数学, 在其发展过程中, 一批卓越的法国数学家发挥了杰出的作用, 做出了奠基性的贡献. 他们像灿烂的星斗散发着耀眼的光辉, 在现代数学史上占据着不可替代的地位, 在大学教科书、各种专著及种种数学史著作中都频繁地出现着他们的英名. 在他们当中, 包括笛卡儿、费马、帕斯卡、达朗贝尔、拉格朗日、蒙日、拉普拉斯、勒让德、傅里叶、泊松、柯西、刘维尔、伽罗瓦、庞加莱、嘉当、勒贝格、韦伊、勒雷、施瓦茨及利翁斯等这些耳熟能详的名字, 也包括一些现今仍然健在并继续做出重要贡献的著名数学家. 由于他们的出色成就和深远影响, 法国的数学不仅具有深厚的根基和领先的水平, 而且具有优秀的传统和独特的风格, 一直在国际数学界享有盛誉.

我国的现代数学, 在 20 世纪初通过学习西方及日本才开始起步, 并在艰难曲折中发展与成长, 终能在 2002 年成功地在北京举办了国际数学家大会, 在一个世纪的时间中基本上跟上了西方历经四个多世纪的现代数学发展的步伐, 实现了跨越式的发展. 这一巨大的成功, 根源于好几代数学家持续不断的艰苦奋斗, 根源于我们国家综合国力不断提高所提供的有力支撑, 根源于改革开放国策所带来的强大推动, 也根源于很多国际数学界同仁的长期鼓励、支持与帮助. 在这当中, 法兰西数学精品长期以来对我国数学界所起的积极影响, 法兰西数学的深厚根基、无比活力和优秀传统对我国数学家所起的不可低估的潜移默化作用, 无疑也是一个不容忽视的因素. 足以证明这一点的是: 在我国的数学家中, 有不少就曾经留学法国, 直接受到法国数学家的栽培和法兰西数学传统和风格的熏陶与感召, 而更多的人也或多或少地通过汲取法国数学精品的营养而逐步走向了自己的成熟与辉煌.

由于语言方面的障碍, 用法文出版的优秀数学著作在我国的传播受到了较大的限制. 根据一些数学工作者的建议, 并取得了部分法国著名数学家的热情支持, 高等教育

出版社决定出版《法兰西数学精品译丛》, 将法国的一些享有盛誉并有着重要作用与影响的数学经典以及颇具特色的大学与研究生数学教材及教学参考书, 有选择地从法文原文分批翻译出版. 这一工作得到了国家自然科学基金委员会数学天元基金的支持和赞助, 对帮助并推动我国读者更好地学习和了解法国的优秀数学传统和杰出数学成就, 进一步提升我国数学 (包括纯粹数学与应用数学) 的教学与研究工作的水平, 将是意义重大并影响深远的, 特为之序.

李大潜

2008 年 5 月

纪念我的父母 Hélène 和 Gaston

序 言

在我们周围已经有很多优秀的教科书了, 为什么还要撰写另一部关于泛函分析及其应用的教科书呢?

除了把这样一种尝试视为作者个人兴趣的因素之外, 还有其他的原因: 一个原因是, 将线性及非线性泛函分析中最基本的定理收集在同一本书里, 这或许是撰写这部书的主要原动力; 另一个原因是, 在处理丰富的应用问题的同时也说明这些定理应用的广泛性.

在此书中讨论的关于对线性及非线性偏微分方程的应用包括: Korn 不等式及线性弹性的存在定理, 障碍问题, Babuška-Brezzi 上下确界条件, 流体力学中的 Stokes 和 Navier-Stokes 方程组的存在定理, 非线性弹性板中的 von Kármán 方程的存在定理, 以及非线性弹性中 John Ball 的存在性定理等. 各种各样的其他应用论题则选自数值分析及最优化理论. 例如, 逼近论, 多项式插值的误差估计, 数值线性代数, 最优化的基本算法, Newton 方法, 或有限差分法等.

我们也做了特别的努力, 以使本书更能满足教学上的要求. 其第 1 章实质上是对书中要用到的实分析及函数论中有关结果的复述. 而该章之后, 大部分定理都是自包含的, 给出了完整的证明[1]. 这些自包含的证明一般不太容易在其他文献中找到, 有些如果没有相关领域的扩展知识是很难得到的. 例如, 书中对于 Poincaré 引理, Laplace 算子的次椭圆性, Pfaff 方程组的存在定理, 或者曲面理论的基本定理等给出了这种自包含证明. 本书还包含诸多插图和 (约 400 道) 习题. 书中还给出了 (大部分是作为脚注) 有关史实的注记以及 (至少那些在有理由保证其真实性的前提下能追溯到的) 原始参考文献[2], 以对某些重要结果的产生提供一个原始思路.

[1] 定理左侧标记符号 $\flat$ 者, 表示其中不包含证明.
[2] 倾我所知来做这件事可能是一种冒险的尝试 ······

我相信, 本书覆盖了泛函分析中的大部分核心课题, 对线性及非线性应用感兴趣的分析学者在其职业生涯中都会接触过这些课题. 更具体地说, 线性泛函分析及其应用是第 2 章到第 6 章的主题, 而第 7 章到第 9 章的主题是非线性泛函分析及其应用.

当然, 为了能使本书的篇幅保持在一个合理限度内, 必须有所取舍. 一些更专门的课题, 如 Fourier 变换、小波、谱理论 (除紧自伴算子外) 以及与时间相关的偏微分方程等, 书中均未予以讨论.

在本科最后一年或研究生的水平上, 本书的内容可作为几个一学期课程的教科书, 例如, "线性泛函分析"、"线性与非线性边值问题"、"微分学及其应用"、"微分几何导论"、"非线性泛函分析" 以及 "数学弹性与流体力学" 等. 就此而言, 对于教师来说, 从内容目录中, 选取本书合适的部分作为这类课程的教科书是很容易的事. 实际上, 我非常愉快地讲授过这些课程. 最初是在巴黎第六大学 (Université Pierre et Marie Curie) 及香港城市大学, 后来也在奥斯丁的得克萨斯大学 (University of Texas at Austin), 康奈尔大学 (Cornell University), 复旦大学, 斯图加特大学 (University of Stuttgart), 苏黎世联邦理工大学 (ETH-Zürich) 以及苏黎世大学 (University of Zürich) 等讲授过.

要求的主要预备知识是在一个合理的程度上知晓实分析, 即初等拓扑 (如连续性、紧性等), 距离空间的基本性质和 Lebesgue 积分, 以及单个或多个实变量的实值函数理论等. 为方便读者起见, 本书中需要用到的这些科目里的一些基本定义和定理都不加证明地收集在第 1 章中.

在撰写这部书期间, 我从 Liliana Gratie, George Dinca, Cristinel Mardare, Sorin Mardare, 以及 Pascal Azerad 等的评议中获益匪浅. 感谢他 (她) 们非常仔细地阅读了大部分章节, 并提出了许多有意义的改进意见. Bernard Dacorogna 与 Vicentiu Radulescu 也向我提供了宝贵的建议. 对他 (她) 们所有的人, 我表示衷心的感谢!

我还要感谢 Douglas N. Arnold, 他很早就对这一项目给予强有力的支持. 同时也要感谢 SIAM 编辑部的 Elizabeth Greenspan, Gina Rinelli 和 Lisa Briggeman, 与她们合作总是非常愉快的.

最后不可不提, 我要对我心目中的 "数学英才" 表示深切的感激和持久的敬意, 他们是 Laurent Schwartz, Richard S. Varga, Jacques-Louis Lions 和 Robert Dautray, 他们多年来的教诲与指导是无价可喻的.

我十分清楚本书肯定还存在一些不足之处. 例如, 可能所用的符号不一致, 无意中遗漏了应该标注的参考文献, 及引用的原始结果归属失当等. 但是, 任何探索 (数学或其他方面的), 即使主人公不太满意, 都得有个结局. 正如 Paul Halmos 在他的一篇论文[3)] 的核心思想中, 以更恰当的方式所表述的, 任何数学家, 不管是纯粹还是应用数学家, 最好的办法是看一遍再复读一遍 (我理解他的意思): "大多数作者的最后一步是停笔, 但那是很艰难的一步."

[3)] P. R. Halmos [1970]: How to write mathematics, *L'Enseignement Mathématique* **16**, 123–152.

这也就是为什么我预先表示欢迎所有的评论、注记、批评等的原因. 这些意见请发送到 mapgc@cityu.edu.hk, 它们或许可被采用于第二版中.

Philippe G. Ciarlet
2012 年 11 月于香港

目　录

第 8 章 $\mathbb{R}^n$ 中的微分几何 127

第 9 章 非线性泛函分析的重要定理 211

第 7 章　赋范向量空间中的微分学

引言

本章我们正式开始讨论非线性泛函分析的课题, 其内容集中于任意赋范向量空间之间映射的可导性.

更具体地说, 给定两个赋范向量空间 X 和 Y 之间的一个映射 $f: X \to Y$, f 在点 $a \in X$ 的 *Fréchet* 导数 (如果存在的话) 定义为唯一的元素 $f'(a) \in \mathcal{L}(X;Y)$, 它满足

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \|h\|_X \delta(h),$$

其中 $\delta(h) \to 0$ 在 Y 中, 当 $h \to 0$ 在 X 中时 (7.1 节). 从这个自然的定义, 可以得到一系列的结论, 它们推广了关于单变量实值函数许多众所周知的性质, 譬如链式法则 (定理 7.1-3); 极为重要的中值定理 (其各种形式可见定理 7.2-1, 7.2-2 及 7.6-1); Sard 引理 (定理 7.5-1), 其在 *Brouwer* 拓扑度的定义 (第 9 章) 中起着关键作用; 可微函数序列极限的可微性 (定理 7.3-1); 由积分定义的函数的可微性 (定理 7.4-1); 以及对具有高阶导数 (由 7.8 节中定义) 函数的 *Schwarz* 引理 (定理 7.8-1) 和 *Taylor* 公式 (定理 7.9-1).

作为链式法则的一个应用, 我们给出 *Piola* 恒等式 (定理 7.1-4) 的证明. 这个基本的恒等式在第 9 章关于 *Brouwer* 不动点定理及补偿紧分析的两个证明中起着关键作用.

我们的着重点也是在应用方面, 这其中包括实值函数极值的必要及充分条件的分析, 这关系到其可微性 (7.9 节) 及凸性 (7.12 节) 等性质; Newton-Kantorovich 定理 (定理 7.7-3) 的详尽证明, 该定理为 *Banach* 空间中的 *Newton* 方法的收敛性提供了充分条件; 还有二阶线性椭圆算子的极大值原理 (定理 7.10-2) 以及 $\mathbb{R}^n$ 中的一

般 *Lagrange* 插值和多点 *Taylor* 分式 (7.11 节).

本章最重要的部分之一是隐函数定理 (定理 7.13-1), 这也是非线性泛函分析最基本的定理之一, 其特殊情况被称为局部反演定理 (定理 7.14-1).

作为隐函数定理的第一个应用, 我们将会看到对于诸如 $A \to A^{-1}$ 或 $A \to A^{\frac{1}{2}}$ 这类映射的可微性, 它可给出非常简洁的证明 (7.13 及 7.14 节). 我们也将阐明, 这个定理对于 *Banach* 中 $\mathcal{C}^1$ 类映射下区域不变性定理 (定理 7.14-2) 的证明起着核心作用. 要注意, 对于有限维的情况, 利用实质上更为精细的分析, 这个定理稍后可扩展到所讨论的映射仅仅是连续的情况 (9.17 节).

我们以证明一般约束优化问题的 *Lagrange* 乘子的存在性 (定理 7.15-1 和 7.15-2), 以及关于鞍点和 *Lagrange* 函数 (7.16 节) 简明扼要的讨论来结束这一章.

除非另外指出, 本章中讨论的所有函数、矩阵以及向量空间均为实的.

7.1 Fréchet 导数; 链式法则; Piola 恒等式; 对实值函数极值的应用

我们回忆一下, 给定两个赋范向量空间 X 和 Y, 符号 $\mathcal{L}(X;Y)$, 或当 $X = Y$ 时简记为 $\mathcal{L}(X)$, 表示所有从 X 到 Y 的连续线性映射所形成的向量空间. 在装备了由下式定义的范数

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X;Y)} := \sup_{\begin{cases} x \in X \\ x \neq 0 \end{cases}} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X} \quad \text{对每个 } A \in \mathcal{L}(X;Y)$$

后, 空间 $\mathcal{L}(X;Y)$ 就成为赋范向量空间, 如果空间 Y 是完备的, 该空间也是完备的. 当 $Y = \mathbb{R}$ 时, 空间 $X' := \mathcal{L}(X;\mathbb{R})$ 是空间 X 的对偶空间 (2.9 和 3.5 节).

设 X 和 Y 是赋范向量空间, 而 Ω 是空间 X 的一个开子集. 一个映射 $f : \Omega \subset X \to Y$ 称为在点 $a \in \Omega$ 处是可微的, 如果存在空间 $\mathcal{L}(X;Y)$ 的元素 A 使得

$$f(a+h) = f(a) + Ah + \|h\|_X \delta(h),$$

其中

$$\lim_{h \to 0} \delta(h) = 0 \quad \text{在 } Y \text{ 中}.$$

要注意, 在此定义中及下面, 不言而喻的是, 在上述关系式中只有属于集合 Ω 的点 $(a+h)$ 在考虑的范围内. 下面给出两条简单但却重要的推论.

第一, 如果 $f : \Omega \subset X \to Y$ 在 $a \in \Omega$ 处可微, 则映射 $A \in \mathcal{L}(X;Y)$ 是唯一的. 为说明这个结论, 设 $r_0 > 0$ 使得 $B(a;r_0) \subset \Omega$ (由假设, Ω 是开集), 又假定 (符号的意义

是自明的)

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + A_1 h + \|h\|\delta_1(h) \\ &= f(a) + A_2 h + \|h\|\delta_2(h) \quad \text{对所有 } \|h\| < r_0, \end{aligned}$$

则

$$\|(A_1 - A_2)h\| \leqslant \|h\|(\|\delta_1(h) - \delta_2(h)\|) \quad \text{对所有 } \|h\| < r \leqslant r_0,$$

所以 $A_1 = A_2$, 此因

$$\|A_1 - A_2\| = \sup_{\begin{cases} h \neq 0 \\ \|h\| < r \end{cases}} \frac{\|(A_1 - A_2)h\|}{\|h\|} \leqslant \sup_{\|h\|<r} \|\delta_1(h) - \delta_2(h)\|$$

在令 $r \to 0$ 时可以任意小.

第二, 映射 $f: \Omega \subset X \to Y$ 在 $a \in \Omega$ 处可微则一定在 a 处连续, 此因

$$\|f(a+h) - f(a)\| \leqslant (\|A\| + \|\delta(h)\|)\|h\| \quad \text{对所有 } \|h\| < r.$$

以这种方式定义的线性映射 $A \in \mathcal{L}(X;Y)$ 记为 $f'(a)$, 并称为映射 f 在点 a 处的 **Fréchet 导数**[1)], 或简称为**导数**. 如果 $X = \mathbb{R}$ 而 x 表示 $\mathbb{R}$ 上的一般点, 在点 $a \in \Omega \subset \mathbb{R}$ 处的导数 $f'(a)$ 也表示为

$$\frac{df}{dx}(a) := f'(a).$$

注 在 $X = \mathbb{R}$ 的特殊情况, 函数 $f: \Omega \subset \mathbb{R} \to Y$ 在 $a \in \Omega$ 处的导数经典地定义为

$$f'(a) = \lim_{\begin{cases} h \to 0 \\ h \neq 0 \end{cases}} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ (如果这个极限存在)},$$

当然 $\lim_{\begin{cases} h\to 0 \\ h\neq 0 \end{cases}} \delta(h) = 0$ 在 Y 内, 其中 $\delta(h) := \frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h}$. 所以在这种特殊情况, 两种定义是一致的, 这是由于空间 Y 可等同于空间 $\mathcal{L}(\mathbb{R};Y)$. 但除这种特殊情况外, 导数 $f'(a) \in \mathcal{L}(X;Y)$ 不能等同于 Y 的一个元素. □

如果映射 $f: \Omega \subset X \to Y$ 在开集 Ω 的所有点上都是可微的, 则称其**在 Ω 内可微**. 在这种情况下, 如果适定的映射

$$f': x \in \Omega \subset X \to f'(x) \in \mathcal{L}(X;Y)$$

是连续的, 则称 f 是**在 Ω 内连续可微的**, 或简称**在 Ω 内是 $\mathcal{C}^1$ 类的**. 所有从 Ω 到 Y 的连续可微映射的空间表示为

$$\mathcal{C}^1(\Omega;Y), \text{ 或简记为 } \mathcal{C}^1(\Omega) \quad \text{若 } Y = \mathbb{R}.$$

1) 冠名源自 Maurice Fréchet (1878—1973).

立即可以验证得, 如果 $f:\Omega\subset X\to Y$ 和 $g:\Omega\subset X\to Y$ 在 $a\in\Omega$ 是可微的, 则 $(f+g)$ 和 αf 对任意 $\alpha\in\mathbb{R}$ 在 $a\in\Omega$ 也是可微的, 而且 $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$ 和 $(\alpha f)'(a)=\alpha f'(a)$. 因此空间 $\mathcal{C}^1(\Omega;Y)$ 是向量空间.

注　当 $X=\mathbb{R}^n$ 及 $Y=\mathbb{R}$ 时, 空间 $\mathcal{C}^1(\Omega;Y)=\mathcal{C}^1(\Omega)$ 可装备一可距离化的拓扑, 称为 Fréchet 拓扑 (习题 7.8-3).　□

如果 $f\in\mathcal{C}^1(\Omega;Y)$, 此外 $f:\Omega\to Y$ 是单射, 直接像 $f(\Omega)$ 在 Y 中是开的, 而且 $f^{-1}\in\mathcal{C}^1(f(\Omega);X)$, 则称映射 f 是 Ω 到 $f(\Omega)$ 上的 $\mathcal{C}^1$ **微分同胚.**

注　如果 $X=Y=\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ 的开子集 Ω 在单射 $f\in\mathcal{C}(\Omega;\mathbb{R}^n)$ 下的直接像 $f(\Omega)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中自然而然是开的 (注意, 在此并不需要假定 f 是可微的): 这正是深刻的 Brouwer 区域不变性定理 (定理 9.17–3) 中的内容.　□

我们现在给出几个映射 $f:\Omega\subset X\to Y$ 的 Fréchet 导数的例子, 其中 X 和 Y 是赋范向量空间, Ω 是 X 中的开集. 先考察连续仿射映射

$$f:x\in X\to f(x)=Ax+b\quad 其中\ A\in\mathcal{L}(X;Y), b\in Y.$$

因为 $f(a+h)=f(a)+Ah$ 对所有 $a\in X$ 及所有 $h\in X$, 这一映射在 X 中是连续可微的, 且

$$f'(x)=A\quad 对所有\ x\in X,$$

故在这种情况, f' 是常映射.

注　利用中值定理 (下面定理 7.2-1), 我们将看到 (定理 7.2-4), 反过来, 如果 $f'(x)=A\in\mathcal{L}(X;Y)$ 对所有 $x\in\Omega$, 且 Ω 是连通的, 则存在向量 $b\in Y$ 使得 $f(x)=Ax+b$ 对所有 $x\in\Omega$.　□

我们现在考察下述情况: 两个空间 X 和 Y 中有一个是积空间, 并装备以任一能诱导出积拓扑 (2.2 节) 的范数.

定理 7.1-1　*如果空间 Y 是赋范向量空间 Y_i 的积 $Y=Y_1\times Y_2\times\cdots\times Y_m$, 那么由 m 个分量映射 $f_i:\Omega\subset X\to Y_i, 1\leqslant i\leqslant m$ 定义的映射 $f:\Omega\subset X\to Y$ 在一点 $a\in\Omega$ 是可微的充分必要条件是每一映射 $f_i, 1\leqslant i\leqslant m$, 在同一点 a 是可微的.*

如果上述情况成立, 导数 $f'(a)\in\mathcal{L}(X;Y)$ 就可等同于积空间 $\mathcal{L}(X;Y_1)\times\mathcal{L}(X;Y_2)\times\cdots\times\mathcal{L}(X;Y_m)$ 的元素 $(f_1'(a),f_2'(a),\cdots,f_m'(a))$.

证明　为确定起见, 假定 Y 装备由 $y=(y_i)_{i=1}^m\in Y\to\|y\|=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\|y_i\|_{Y_i}$ 定义的范数.

如果 $f=(f_i)_{i=1}^m:\Omega\subset X\to Y$ 在 $a\in\Omega$ 可微, 关系式 $f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\|h\|\delta(h)$ 等价于 m 个关系式

$$f_i(a+h)=f_i(a)+A_ih+\|h\|\delta_i(h),\quad 1\leqslant i\leqslant m,$$