高等教育“十二五”规划教材

高等数学（下册）

（第二版）

陈朝坚■主编

科学出版社

高等教育“十二五”规划教材

高等数学

（下 册）

（第二版）

陈朝坚 主 编
张巍文 副主编

科学出版社
北 京

内 容 简 介

本书分上、下两册。上册内容包括函数、极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、积分及其应用、空间解析几何等；下册内容包括多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程等。全书基本上覆盖了现行理工科类院校“高等数学”课程的全部教学内容。内容深浅适宜，注意与中学数学的衔接；例题充分结合内容，难易适当，强调应用。

本书可供高等院校理工科各专业作为教材使用，也可作为理工科学生考研参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学（下册）/陈朝坚主编．—2版．—北京：科学出版社，2013
（高等教育“十二五”规划教材）
ISBN 978-7-03-037508-7

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①陈…　Ⅲ．①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 103360 号

责任编辑：宋　芳　张　斌/ 责任校对：马英菊
责任印制：吕春珉 / 封面设计：东方人华平面设计部

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2010 年 6 月第　一　版　开本：787×1092 1/16
2014 年 8 月第　二　版　印张：15 1/4
2014 年 8 月第一次印刷　字数：358 000
定价：33.00 元
（如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉）
销售部电话 010-62140850　编辑部电话 010-62135517-2037

前　言

我们编写《高等数学》(上、下册)是根据教育部提出的“高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划”的精神，结合近几年全国高校工科数学教学指导委员会工作会议的意见，作为贵州铜仁学院精品课程建设，强调高等数学的实用性而编写的一本教材。全书分上、下两册。上册内容包括函数极限、一元函数微积分及应用、空间解析几何，下册内容包括多元函数微积分、级数、微分方程。各章节配有习题与总习题，利用总习题检测学习效果，题目难易适当，层次分明，通过努力基本能够完成。

本书注重将数学素质的培养融合到教学内容之中，突出微积分的基本思想和方法；在内容上力求实用、简洁、易懂；在使用过程中注意以问题驱动的教学，带着问题教学，为解决问题而引入新知识、新方法是编写本书的另一初衷。

在编写过程中，借鉴了传统高等数学的体系结构，但也做了一点尝试，将传统的不定积分这一章融入定积分之中，改为积分及其应用。当学生学习定积分的概念之后，要计算定积分就会产生困难，为解决这个问题就得学习不定积分，这也是问题驱动的数学教学的一种方式。

本书由陈朝坚主编，张巍文副主编。参加编写的还有张焰、杨英杰、覃启伦、段彦玲。本书的问世，是铜仁学院狠抓教学改革的一个缩影。在编写过程中，参考了众多高等数学教材，特别是得到我的老师——贵州大学教务处长向淑文教授鼎力支持，同时也特别感谢铜仁学院教务处长雷晓军教授提供大量参考资料。本书的问世，还离不开我的同事——铜仁学院数学与计算机科学系全体教师的支持，在此致以谢意。

限于编写时间仓促，本书不妥和错误在所难免，恳请专家、同行及读者批评指正，编者联系方式：5231004@163.com。

目　　录

第六章　多元函数微分法及其应用

在第二章到第四章中，我们所讨论的函数都是只有一个自变量即一元函数．但实际问题中往往会牵涉到多方面的因素，从数学的角度上看就是一个变量依赖于多个变量的情形，这就是多元函数．本章将在一元函数的微分法及其应用的基础之上，讨论多元函数的微分法及其应用．由于从一元函数到二元函数有许多本质的变化，而二元函数到二元以上的函数只有自变量的个数不同，没有本质的区别，完全可以将有关的内容和方法类推．因此，我们的讨论以二元函数为主．多元函数微分法是一元函数微分法的推广和发展，学习时要注意两者的区别和联系．

第一节　多元函数

一、多元函数概念

(1) 区域

设 $P_0(a,\ b)$ 是直角坐标平面上一点，δ 是某一正数．与点 $P_0(a,\ b)$ 的距离小于 δ 的所有点 $P(x,\ y)$ 的集合，称为点 $P_0(a,\ b)$ 的 δ(圆形) 邻域，记为 $\mathring{U}_\delta(P_0)$，即

$$\mathring{U}_\delta(P_0)=\left\{P\middle|\ |P_0P|<\delta=\{(x,\ y)\mid\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta\right\}$$

$U_\delta(P_0)$ 在几何上表示直角坐标平面上以点 $P_0(a,\ b)$ 为圆心，以 δ 为半径的圆内的所有点．如果去掉邻域的中心，称为点 $P_0(a,\ b)$ 的去心的 δ 邻域，记为 $U_\delta(p_0)$，即

$$\mathring{U}_\delta(P_0)=\{P\mid 0<|P_0P|<\delta\}=\{(x,\ y)\mid 0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta\}$$

以点 $P(a,b)$ 为中心，任意 $2r(r>0)$ 为边长的正方形内(不含边界) 的所有点 (x,y) 的集合 $\left\{(x,y)\middle|\ |x-a|<r\ |y-b|<r\right\}$ 称为点 $P(a,b)$ 的 r(方形) 邻域．事实上，点 $P(a,b)$ 的这两种圆形与方形的邻域本质上是一样的，因为任意一个 r 圆形邻域内存在一个以 r 为对角线的方形邻域．而任一个以 $2r$ 为边长的方形邻域则必然存在一个以 r 为半径的圆形邻域．因此，习惯上说的邻域是指圆形邻域．

如果不考虑邻域的半径，则用 $U(P_0)$ 表示点 P_0 的某一邻域，$\mathring{U}(P_0)$ 表示点 P_0 的某一去心邻域．

设 E 是平面点集，P 是平面上一点．如果存在点 P 的某一邻域 $U(P)$，使 $U(P)\subset E$，则称点 P 是 E 的**内点**．显然，$P\in E$(图 6.1)．

如果点集 E 的任意点都是内点，则称 E 是**开集**．例如 $E=\{(x,\ y)\mid x^2+y^2<1\}$．$E$ 中所有点都是 E 的内点，所以 E 是开集．

如果在点 P 的任意邻域内，既有点属于 E，同时又有点不属于 E，则称点 P 是 E 的**边界点**(图 6.2)．E 的所有边界点组成的集合，称为 E 的**边界**．例如 $E=\{(x,\ y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 2\}$ 的边界是圆周 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=2$．由此可见，点集

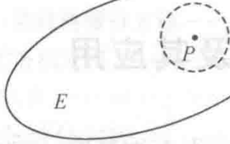

图 6.1

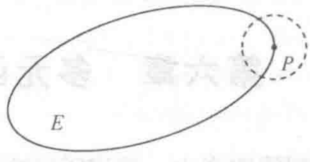

图 6.2

E 的边界点(或边界)可能属于 E，也可能不属于 E.

设 E 是开集. 如果 E 内任意两点都能用属于 E 的折线连结起来，则称开集 E 是**连通的**.

连通的开集称为**开区域**. 开区域添上它的边界一起，称为**闭区域**. 例如 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 1\}$ 是开区域，$\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geqslant 1\}$ 是闭区域.

有时为简便起见，并在不致引起混淆的情况下，将开区域和闭区域都笼统地简称为**区域**.

设 E 是平面点集. 如果存在某一正数 R，使 $E \subset U_R(O)$，点 O 为原点，则称 E 是**有界集**. 否则，E 是**无界集**. 例如 $\{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 2\}$ 是**有界开区域**，$\{(x, y) \mid x + y \geqslant 1\}$ 是**无界闭区域**.

(2) n 维空间

在空间解析几何中，引入直角坐标系后，使得空间的点与有序的三元数组 (x, y, z) 一一对应. 从而，有序三元数组 (x, y, z) 的全体表示空间一切点的集合，称为(三维)空间. 一般地，有序 n 元数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全体称为 **n 维空间**，记为 R^n (n 为自然数). 其中每个有序 n 元数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为 **n 维空间的一个点** P，记为 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，数 x_i 称为点 P 的**第 i 个坐标**. 当 $n = 1$ 时，R^1 表示数轴，当 $n = 2$ 时，R^2 表示平面，当 $n = 3$ 时，R^3 表示空间.

设 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$Q(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 为 R^n 中任意两点，两点间的距离定义为

$$|PQ| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}.$$

关于平面点集给出的一系列概念，可完全推广到 n 维空间. 例如邻域概念，设点 $P_0 \in R^n$，δ 是某一正数，则 R^n 中与点 P_0 的距离小于 δ 的所有点 P 的集合，称为点 P_0 的 δ 邻域，即

$$U_\delta(P_0) = \{P \mid |P_0P| < \delta, P \in R^n\}.$$

(3) 多元函数的概念

定义 1　设 D 是平面上的一个点集. 如果对于每个点 $P(x, y) \in D$，变量 z 按着一定的法则总有唯一确定的值与之对应，则称 z 是变量 x，y 的二元函数(或点 P 的函数)，记为 $z = f(x, y)$(或 $z = f(P)$)，其中 x，y 称为自变量，z 称为因变量，点集 D 称为函数的定义域. 数集 $W = \{z \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$ 称为函数的值域.

表示函数对应关系的记号 f 也可用其他字母表示，如函数 $z = \varphi(x, y)$，$z = u(x, y)$ 等等.

例 6.1　圆柱体的体积 V 和它的底半径 r，高 h 之间的关系是

$$V = \pi r^2 h.$$

例 6.2　物体运动的动能 W 和物体的质量 m，运动的速度 v 之间的关系是

$$W=\frac{1}{2}mv^2.$$

例 6.3　一定量的理想气体的压强 P 和体积 V，绝对温度 T 之间的关系是

$$P=\frac{RT}{V}(R\text{ 为常数}).$$

以上三例都是二元函数的实例.

如果将平面点集 D 改为 n 维空间点集 $D\subset R^n(n\geqslant 3)$，类似地，可定义**三元函数** $u=f(x,y,z)$ 及 n **元函数** $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 当 $n=1$ 时，n 元函数为一元函数. 当 $n\geqslant 2$ 时，n 元函数统称为**多元函数**. 多元函数可简记为 $u=f(P)$，点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in D$.

如何求多元函数的定义域呢？与一元函数相类似，如果多元函数是用解析式表示的，则**函数的定义域**就是使函数解析式有意义的自变量所确定的点集. 如果函数有确定的实际意义，即该函数是某个实际问题的数学模型，则它的定义域应由实际问题来确定.

例 6.4　求函数 $z=\frac{1}{\sqrt{x}}\ln(1-x-y)$ 的定义域

解　x,y 应满足不等式

$$\begin{cases}x>0\\1-x-y>0\end{cases}，\text{即}\begin{cases}x>0\\x+y<1\end{cases}.$$

从而，定义域为 $D=\{(x,y)\mid x>0\text{ 且 }x+y<1\}$，是无界的开区域(图 6.3).

例 6.5　求函数 $z=\arcsin(x^2+y^2)+\sqrt{2-x^2-y^2}$ 的定义域.

解　x,y 应满足不等式

$$\begin{cases}2-x^2-y^2\geqslant 0\\x^2+y^2\leqslant 1\end{cases}，\text{即 } x^2+y^2\leqslant 1.$$

从而，定义域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$，是有界闭区域(图 6.4).

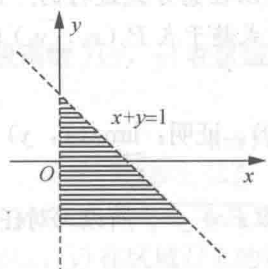

图 6.3

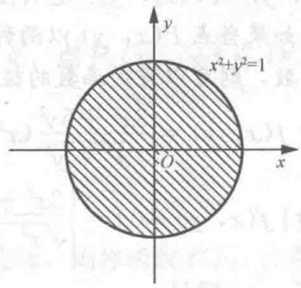

图 6.4

二元函数的图形：设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D. 对于任意取定的点 $P(x,y)\in D$，有确定的函数值 $z=f(x,y)$ 与之对应. 于是，以 x 为横坐标，y 为纵坐标，z 为竖坐标，在空间确定一个点 $M(x,y,z)$，所有这样确定的空间点的集合

$$\{(x,y,z)\mid z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

称为**二元函数 $z=f(x,y)$ 的图形**. 一般地，二元函数的图形是空间曲面，而这个曲面在 xOy 面上的投影就是该函数的定义域 D（图 6.5). 例如，函数 $z=x^2+y^2$ 是定义在

xOy 面上，顶点在原点，开口向上的旋转抛物面，由方程 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 所确定的函数 $z=f(x, y)$ 的图形是球心在原点，半径为 a 的球面，定义域是

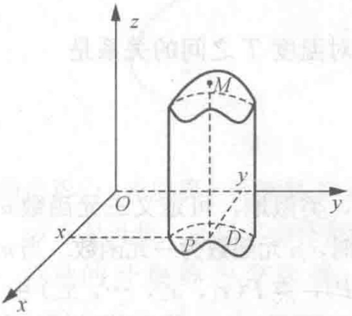

图 6.5

$$D=\{(x, y) \mid x^2+y^2 \leqslant a^2\}.$$

由 $z=\pm\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 可知，对于任一点 $P(x, y)\in D$，z 有两个确定的值与之对应，因此，该函数为多值函数，其中两个单值分支 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 和 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 分别表示上半球面和下半球面. 除特别声明外，本书主要讨论单值函数.

二、二元函数的极限

类似于一元函数的极限概念，二元函数的极限也是反映当点 $P(x, y)$ 越来越趋向于点 $P_0(x_0, y_0)$（但 $P(x, y)\neq P_0(x_0, y_0)$）时，对应的函数值 $f(x, y)$ 的变化趋势.

定义 2 **设二元函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上有定义，点 $P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的内点或边界点，A 为常数. 如果对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得满足不等式**

$$0<|P_0P|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切点 $P(x, y)\in D$，都有

$$|f(x, y)-A|<\varepsilon,$$

则称 A 为函数 $f(x, y)$ 当 $x\to x_0$，$y\to y_0$ 时的(二重)极限，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=A,$$

或

$$f(x, y)\to A \quad (P\to P_0).$$

注意：$P(x, y)\to P_0(x_0, y_0)$ 是从任何方向，以任意方式进行的. 这一点有别于一元函数的极限. 如果当点 $P(x, y)$ 以两种不同的方式趋于点 $P_0(x_0, y_0)$ 时，函数值趋向于两个不同的常数，则可以肯定函数的极限不存在.

例 6.6 设 $f(x, y)=\dfrac{3x^2+5y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}(x^2+y^2\neq 0)$，证明：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)=0$.

证明 因为 $|f(x, y)-0|=\left|\dfrac{3x^2+5y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 5\sqrt{x^2+y^2}$，所以，对任意给定的 $\varepsilon>0$，取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}$，则当 x，y 满足

$$0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$$

时，总有

$$|f(x, y)-0|<\varepsilon,$$

故

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y)=0.$$

关于二重极限的运算，有类似于一元函数的运算法则.

例 6.7 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$.

解　分子、分母同乘以因式$\sqrt{xy+1}+1$，得

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{xy}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sqrt{xy+1}+1)=2.$$

例 6.8　求$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$.

解　$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2\sin^2\dfrac{x^2+y^2}{2}}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left[\frac{\sin\dfrac{x^2+y^2}{2}}{\dfrac{x^2+y^2}{2}}\right]^2\cdot\frac{x^2+y^2}{2e^{x^2y^2}}=1\cdot 0=0.$$

例 6.9　证明极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$不存在.

证明　当点$P(x, y)$沿x轴或沿y轴趋于点$P_0(0, 0)$时，都有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x\to 0}0=0,$$

但是，当点$P(x, y)$沿抛物线$y=k\sqrt{x}$趋于点$P_0(0, 0)$时，

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=\sqrt{x}}}\frac{xy^2}{x^2+y^4}=\lim_{x\to 0}\frac{k^2}{1+k^4}=\frac{1}{2}$$ 显然其极限的值随k值的变化而变化.

所以$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$不存在.

三、二元函数的连续性

与一元函数的连续性相类似，在多元函数极限的基础上，我们将研究多元函数的连续性.

定义 3　设函数$f(x, y)$在区域D上有定义，点$P_0(x_0, y_0)\in D$(P_0是D的内点或边界点). 如果

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x, y)=f(x_0, y_0)$$

则称函数$f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$连续.

如果函数$f(x, y)$在区域D上的每一点都连续，则称函数$f(x, y)$在区域D上是连续函数.

关于二元函数连续性的概念，可完全推广到n元函数$u=f(P)$上去.

如果函数$f(x, y)$在点$P_0(x_0, y_0)$处不连续，则称点$P_0(x_0, y_0)$为函数$f(x, y)$的间断点.

例如函数$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$.

虽然$f(x, y)$在点(0, 0)处有定义，但是当$x\to 0$，$y\to 0$时，函数的极限不存在，所

以点(0, 0)是该函数的一个间断点.

又如函数 $z=\dfrac{xy}{y-2x^2}$ 在抛物线 $y=2x^2$ 上没有定义，所以抛物线上的点都是该函数的间断点.

由此可见，二元函数的间断点有可能是某个孤立点,也可能形成一条或几条曲线.

类似于一元初等函数的定义，所谓**多元初等函数**，就是由常数和自变量(如 x，y 等)利用基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成的函数. 例如 $\cos\dfrac{x^2+y^2}{2}$，$\ln\dfrac{x^2+y^2}{1+xy}$ 等都是多元初等函数.

由于多元函数也有类似于一元函数的极限运算法则，根据这些运算法则及连续函数的定义，可证得如下结论：

1) **多元连续函数的和、差、积均为连续函数，连续函数的商在分母不为零处也连续.**

2) **多元连续函数的复合函数仍为连续函数.**

3) **一切多元初等函数在其定义域内是连续的.**

利用多元初等函数的连续性，可以求某些多元函数的极限. 设 $f(p)$ 是多元初等函数，而点 P_0 是 $f(P)$ 的定义域内的一点，则

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=f(P_0).$$

例 6.10 求 $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\y\to0}}\frac{\cos(x-\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 函数 $f(x, y)=\dfrac{\cos(x-\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 是初等函数，而点 $P_0(1, 0)$ 在其定义域内，所以 $f(x, y)$ 在点 P_0 处连续.

$$\lim_{\substack{x\to1\\y\to0}}\frac{\cos(x-\mathrm{e}^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=f(1, 0)=1.$$

闭区间上连续函数的性质可推广到多元连续函数上去.

定理 1(最值性)　如果多元函数 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(P)$ 在 D 上一定有最小值和最大值. 即在闭区域 D 上至少存在两点 P_1，P_2，使得 $f(P_1)$ 为最小值，$f(P_2)$ 为最大值.

定理 2(介值性)　设多元函数 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续. 如果 $f(P)$ 在 D 上取得两个不同的函数值 μ_1，μ_2，则 $f(P)$ 在 D 上一定取得介于 μ_1 和 μ_2 之间的任何值 μ 至少一次. 特别地，如果 μ 介于函数 $f(P)$ 的最小值 m 和最大值 M 之间，则在 D 上至少存在一点 P_0，使 $f(P_0)=\mu$.

习　题　6.1

1. 设 $z=x+y+f(x-y)$，若当 $y=0$ 时，$z=x^2$，求函数 $f(x)$ 及 z.

2. 设 $f(x+y, \dfrac{y}{x})=x^2-y^2$，求 $f(x, y)$.

3. 设 $f(x, y)=\sqrt{x^4+y^4}-2xy$，求 $f(tx, ty)$.

4. 求下列函数的定义域：

(1) $z=\sqrt{2x^2-y}$；　(2) $z=\ln[x\ln(y-x)]$；

(3) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x-\sqrt{y}}}+\arcsin(1-x^2-y^2)$；　(4) $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$；

(5) $u=e^{\sqrt{1-x^2-y^2-z^2}}-\dfrac{1}{\sqrt{z-x^2-y^2}}$；

(6) $u=\sqrt{2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-1}}$.

5. 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{xy}=0$.

6. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\dfrac{x+y}{x^2-xy+y^2}$；　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\cos\sqrt{|xy|-1}$；

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin xy}{x}$；　(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x\sin\dfrac{1}{y}+y\sin\dfrac{1}{x})$；

(5) $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to k}}(1+\dfrac{y}{x})^x\quad(k\neq 0)$；　(6) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$.

7. 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x-y^2}{x+y^2}$；　(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{2xy^3}{x^2+y^6}$.

8. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 的连续性.

9. 指出下列函数的间断点：

(1) $z=\dfrac{\sin x\,\sin y}{x+y}$；　(2) $z=\dfrac{1}{\cos(x^2+y^2)}$；

(3) $z=\lim(x^2+y^2)\quad(0.0)$；　(4) $z=\dfrac{e^{x+y}}{x+y}\quad(x+y=0)$.

第二节　偏　导　数

我们已经在第二章中研究了一元函数的变化率问题，并引进了函数的导数的概念. 对于多元函数，由于自变量不止一个，且在函数解析式中各自的地位未必相当，所以情况复杂. 因此，可以仿照求一元函数的导数的办法，讨论多元函数关于其中一个自变量的变化率问题，并引进偏导数的概念. 下面就二元函数给出偏导数的定义、计算方法以及高阶偏导数.

一、偏导数的定义

定义　**设函数** $z=f(x,y)$ **在点** $P_0(x_0,y_0)$ **的某一邻域内有定义. 先固定** $y=y_0$，

当 x 在 x_0 处有增量 Δx 时，相应地，函数有关于 x 的偏增量，记为 Δz_x，即

$$\Delta z_x = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0).$$

如果
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z_x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处对 x 的偏导数，记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ 或\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ 或 z_x\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ 或 f_x(x_0, y_0).$$

即
$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x} \tag{6.1}$$

同样，先固定 $x=x_0$，函数关于 y 的偏增量记为 Δz_y，即 $\Delta z_y = f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0)$，函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处关于 y 的偏导数定义为

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta z_y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\Delta y},$$

记为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ 或\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ 或 z_y\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\ 或 f_y(x_0, y_0).$$

即
$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)}{\Delta y}. \tag{6.2}$$

如果函数 $z=f(x, y)$ 在开区域 D 内每一点 (x, y) 处对 x 的偏导数都存在，则在 D 内定义了一个新的二元函数，称为函数 $z=f(x, y)$ 对 x 的偏导函数(偏导数)，记为 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial x}$，$z_x$，$f_x(x, y)$.

同理，可以定义函数 $z=f(x, y)$ 对 y 的偏导函数(偏导数)，记为 $\frac{\partial z}{\partial y}$，$\frac{\partial f}{\partial y}$，$z_y$，$f_y(x, y)$.

二元函数的偏导数定义可以推广到二元以上的函数. 例如三元函数 $u=f(x, y, z)$，如果函数 $f(x, y, z)$ 在点 (x, y, z) 某一邻域内有定义，则在点 (x, y, z) 处关于 x 的偏导数定义为

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y, z)-f(x, y, z)}{\Delta x}.$$

类似地，可定义函数关于 y 的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 及关于 z 的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial z}$.

二元函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处偏导数的几何意义：一般地，二元函数 $z=f(x, y)$ 的图形为空间曲面. 由偏导数的定义可知，函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处关于 x 的偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ 就是一元函数 $z=f(x, y_0)$ 在点 x_0 处的导数，而一元函数 $z=f(x, y_0)$ 的几何图形是曲面 $z=f(x, y)$ 与平面 $y=y_0$ 的交线，因此偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ 表示曲线 $\begin{cases} z=f(x, y) \\ y=y_0 \end{cases}$ 在点 $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处的切线对 x 轴的斜率. 同理，偏导数 $f_y(x_0, y_0)$ 表示曲面 $z=f(x, y)$ 与平面 $x=x_0$ 的交线在点 M_0 处的切线对 y 轴的斜率(图 6.6).

对于一元函数来说，如果 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $y=f(x)$ 在点 x_0 处一定连续. 但是，如果多元函数在某点处各偏导数都存在，函数在该点却不一定连续. 这是因为偏导数在点 P_0 处存在，只能说明点 P 沿着平行于坐标轴的方向趋于点 P_0 时，函数值 $f(P)$ 趋于 $f(P_0)$，而当点 P 沿其余任何方式趋于 P_0 时，函数值 $f(P)$ 不一定都趋于 $f(P_0)$. 例如函数

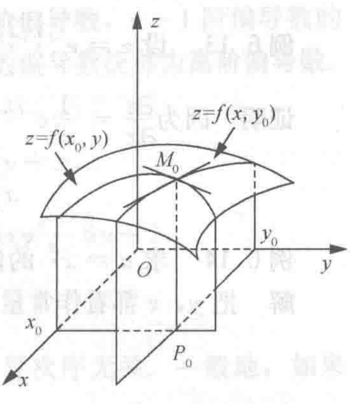

图 6.6

$$f(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点(0, 0)处对 x 的偏导数为

$$f_x(0,\ 0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,\ 0)-f(0,\ 0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}0=0,$$

对 y 的偏导数为

$$f_y(0,\ 0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\ 0+\Delta y)-f(0,\ 0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}0=0.$$

但是，由例 6.9 知，函数 $f(x,\ y)$ 在点(0, 0)处不连续.

二、偏导数的计算

由偏导数的定义可知，求函数对其中一个自变量的偏导数，其余的自变量暂时看作常量. 这时，求函数的偏导数相当于一元函数的求导问题. 因此，一元函数的求导公式，求导法则仍然适用. 如二元函数 $z=f(x,\ y)$，求偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 时，把 y 暂时看作常量而对 x 求导，求偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ 时，把 x 暂时看作常量而对 y 求导.

例 6.11　求函数 $f(x,\ y)=x^2y-2xy+y^3$ 在点(1, 2)处的偏导数.

解　把 y 看作常量对 x 求导，得

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy-2y+3x^2,$$

把 x 看作常量对 y 求导，得

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^2-2x+3y^2.$$

将点(1, 2)代入偏导数中，得

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=5,\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=2}}=13.$$

例 6.12　设 $f(x,\ y)=x\sin(x+y^2)$，求 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

解　$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\sin(x+y^2)+x\cos(x+y^2)$，

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2xy\cos(x+y^2).$$