高等学校教材配套教辅 5

复变函数与积分变换综合训练

FUNCTIONS OF COMPLEX VARIABLE AND INTEGRAL TRANSFORM COMPREHENSIVE TRAINING

包革军　邢宇明　主编

哈爾濱工業大學出版社
HITP
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等学校教材配套教辅 5

复变函数与积分变换综合训练

FUNCTIONS OF COMPLEX VARIABLE AND INTEGRAL TRANSFORM COMPREHENSIVE TRAINING

包革军　邢宇明　主编

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书依照复变函数与积分变换教材的结构，主要分为两大部分，分别为试题和试题解答. 每套试题包括：填空题、选择题、解答题. 对每一道试题给予较为详尽的分析和解答，使学习者从多方面得到练习.

本书适合正在学习复变函数与积分变换课程的学生以及数学爱好者研读.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换综合训练/包革军，邢宇明主编.
—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2015.9
ISBN 978－7－5603－5629－7

Ⅰ.①复… Ⅱ.①包… ②邢… Ⅲ.①复变函数－高等学校－教材 ②积分变换－高等学校－教材 Ⅳ.①O174.5 ②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 228016 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　聂兆慈
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451－86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨久利印刷有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 8.5　字数 202 千字
版　　次　2015 年 9 月第 1 版　2015 年 9 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978－7－5603－5629－7
定　　价　10.00 元

目　　录

复变函数与积分变换

试　题

心得 体会 拓广 疑问

复变函数与积分变换试题(一)

一、填空题

1. 设 $z=\dfrac{(1-\mathrm{i})^5-1}{(1+\mathrm{i})^3+1}$,则其实部为 $\underline{\frac{13}{5}}$,虚部为 $\underline{\frac{6}{5}}$.

2. 一复数对应的向量按逆时针方向旋转 $\frac{\pi}{3}$ 时对应的复数是 $1+\mathrm{i}$,则原复数是 $\underline{(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2})+i(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})}$

3. 已知复数 $z=\dfrac{-2}{1+\sqrt{3}\,\mathrm{i}}$,则 z 的辐角主值是 $\underline{\frac{2}{3}\pi}$.

4. $\sin\frac{\pi}{3}-\mathrm{i}\cos\frac{\pi}{3}$ 的三角形式为 $\underline{-\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}}$

5. 满足 $0<\arg\dfrac{z-1}{z+1}<\dfrac{\pi}{6}$ 的 z 所构成的点集是 $\underline{\{z=x+iy: y>0,\ x^2+(y-\sqrt{3})^2>2^2\}}$

二、单项选择题

1. 已知 $z=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})$,则 $z^{100}+z^{50}+1$ 的值为(A).

A. $-\mathrm{i}$ B. i C. 1 D. -1

2. 集合 $D=\{z:2<|z-\mathrm{i}|<10^5\}$,则 D 是(B).

A. 单连通区域 B. 多连通区域 C. 无界区域 D. 闭区域

3. 下列方程所表示的曲线中,(A)是椭圆.

A. $|z+\mathrm{i}|+|z-\mathrm{i}|=3$ B. $\left|\dfrac{z-2}{z-1}\right|=8$

C. $\mathrm{Im}\,z=|z|+1$ D. $\mathrm{Re}(z^2)=3$

4. 函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$,$z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 则 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ 存在的充分必要条件是(C).

A. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}u(x,y)$ 存在 B. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}v(x,y)$ 存在

C. A 与 B 同时成立 D. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}[u(x,y)+v(x,y)]$ 存在

5. 下列函数中,都有 $f(0)=0$,则(D)在原点不连续.

A. $f(z)=\dfrac{\mathrm{Re}\,z}{1+|z|}$ B. $f(z)=\dfrac{(\mathrm{Re}\,z)^2}{|z|}$

C. $f(z)=\dfrac{[\mathrm{Re}(z^2)]^2}{|z|^2}$ D. $f(z)=\dfrac{\mathrm{Re}(z^2)}{|z|^2}$

年 月 日

三、试确定等式$(3+6i)x+(5-9i)y=6-7i$中的实数x,y.

心得 体会 拓广 疑问

解: $(3+6i)x+(5-9i)y=6-7i$

$3x+6xi+5y-9yi=6-7i$

$\Rightarrow \begin{cases} 3x+5y=6 & ① \\ 6x-9y=-7 & ② \end{cases}$

①×2－②.

$19y=19 \Rightarrow y=1$

$x=\frac{1}{3}$.

即 $x=\frac{1}{3}$, $y=1$

年 月 日

四、试证 $|1-\bar{z}_1 z_2|^2-|z_1-z_2|^2=(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)$.

心得 体会 拓广 疑问

解: 左侧 $= (1-\bar{z}_1 z_2)(1-\bar{z}_1 z_2)-(z_1-z_2)(z_1-z_2)$

$\cancel{= 1-2\bar{z}_1 z_2+(\bar{z}_1 z_2)^2-z_1^2+2z_1z_2-z_2^2}$

$= (1-\bar{z}_1 z_2)(1-z_1\bar{z}_2)-(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$

$(1-\bar{z}_1 z_2)(1-z_1\bar{z}_2)-(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$

$= 1-z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1 z_2+|z_1|^2|z_2|^2-|z_1|^2+z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1+z_2|^2$

年 月 日

五、证明$\frac{z_1}{z_2} \geqslant 0, z_2 \neq 0 \Leftrightarrow |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$.

心得 体会 拓广 疑问

解：设 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$

$z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \geqslant 0 \Rightarrow \theta_1 - \theta_2 = 0$

即 $\theta_1 = \theta_2$.

$|z_1 + z_2| = |r_1 e^{i\theta} + r_2 e^{i\theta}|$

$= (r_1 + r_2) e^{i\theta}$

$= |r_1 e^{i\theta}| + |r_2 e^{i\theta}|$

$= |z_1| + |z_2|$

$z_1 = r_1 e^{i\theta}$

$z_2 = r_2 e^{i\theta}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \boxed{e^{i(\theta_1 - \theta_2)}}$

由于 $\frac{z_1}{z_2} \geqslant 0$

$\theta_1 - \theta_2 = 0$

$e^{i0} = 1$

$e^{i2\pi} = 1$

或 $\theta_1 - \theta_2 = 0$

即 $|r_1 + r_2| e^{i\theta}$ ✓.

年 月 日

六、将复数 $z=1+\sin 1+i\cos 1$ 化为三角形式和指数形式.

心得 体会 拓广 疑问

解: $|z|=\sqrt{(1+\sin 1)^2+\cos 1^2}=\sqrt{2+2\sin 1}$

$\cos\theta=\dfrac{1+\sin 1}{\sqrt{2+2\sin 1}}=\dfrac{\sqrt{2+2\sin 1}}{2}$

年 月 日

七、设$(1+\mathrm{i})^n=(1-\mathrm{i})^n$，求整数$n$.

心得 体会 拓广 疑问

解：由 $(1+i)^2 = 1+2i-1 = 2i$

$(1-i)^2 = 1-2i-1 = -2i$

$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$1-i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$

则 $(1+i)^n = (1-i)^n$

$(\sqrt{2})^n e^{i\frac{n\pi}{4}} = (\sqrt{2})^n e^{-i\frac{n\pi}{4}}$

$e^{i\frac{n\pi}{2}} = 1$

即 $\frac{n\pi}{2} = 2k\pi$ $n=4k$ $k=0,\pm1,\pm2\ldots$

$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$(1-i) = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$

$e^{\frac{n\pi i}{4}} = e^{-\frac{n\pi i}{4}}$

$\frac{n\pi}{4} + \frac{n\pi}{4} = 2k\pi$

$n = 4k$, $k=0,\pm1,\pm2\ldots$

年 月 日

八、解方程 $z^2-4iz-4+9i=0$.

心得 体会 拓广疑问

解：设 $z=x+yi$ 则

$z^2=x^2+2xyi-y^2$

左侧 $=x^2+2xyi-y^2-4i(x+yi)-4+9i$

$=x^2+2xyi-y^2-4xi+4xy-4+9i$

$=(x^2-y^2+4y-4)+(2xy-4x+9)i$

即 $\begin{cases} x^2-y^2+4y-4=0 \\ 2xy-4x+9=0 \end{cases}$

$\Rightarrow x=\pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$y=\dfrac{4\mp3\sqrt{2}}{2}$

九、若 $|z_1|=\lambda|z_2|$，$\lambda>0$，则 $|z_1-\lambda^2 z_2|=\lambda|z_1-z_2|$.

心得 体会 拓广 疑问

$(z_1-\lambda^2 z_2)(\bar{z}_1-\lambda \bar{z}_2^2)$

$a=\lambda b$

$=|z_1|^2-\lambda z_1\bar{z}_2^2-\lambda\bar{z}_1 z_2^3+\lambda^2|z_2|^4$

$\lambda^2(|z_1^2|+|z_2^2|-z_1\bar{z}_2-$

$a-\lambda^2 b \quad =\lambda(a-b)$

$\lambda b \quad b(\lambda^2-1)$

$a=\lambda b \quad \lambda b-\lambda^2 b \quad \lambda b(\lambda-1)$

$\lambda b(1-\lambda)$

$|z_1-\lambda^2 z_2|=\lambda|z_1-z_2|$

$(z_1-\lambda^2 z_2)(\bar{z}_1-\lambda^2\bar{z}_2)$

$=|z_1|^2-\lambda^2 z_1\bar{z}_2-\lambda^2\bar{z}_1 z_2+\lambda^4 z_2^2$

$\lambda^2 z_2^2+\lambda^4 z_2^2 \quad \lambda^2(\lambda^2+1)z_2^2$

$\lambda^2(z_1^2+z_2^2-z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1 z_2)$

$\lambda^2(\lambda^2+1)z_2^2$

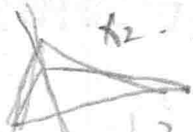
年 月 日

$|z-z_1|=k|z-z_2|$

$|z-z_1-k^2(z-z_2)|=k|z_1-z_2|$

心得 体会 拓广 疑问

十、证明方程 $\left|\frac{z-z_1}{z-z_2}\right|=k,k>0,k\neq 1,z_1\neq z_2$ 表示 z-平面上的一个圆周，其圆心为 z_0，半径为 ρ，且 $z_0=\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2},\rho=\frac{k|z_1-z_2|}{|1-k^2|}$.



$|z-z_0|=\rho$

$|z-z_1|=k|z-z_2|$

$(1-k^2)z$

$|z-z_1|=k|z-z_2|$

$(z-z_1)(\bar z-\bar z_1)=k^2(z-z_2)(\bar z-\bar z_2)$

$=z^2-z\bar z_1-z_1\bar z+z_1^2=k^2(z^2-z\bar z_2-z_2\bar z+z_2^2)$

$(1-k^2)|z|^2+z(\bar z_2k^2-\bar z_1)+\bar z(z_2k^2-z_1)=kz_2^2-z_1^2$

(x,y)

$z-z_2+z_2-z_1$

$\left|1+\frac{z_2-z_1}{z-z_2}\right|=k$ (x_1,y_1) (x_2,y_2)

$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=k(x-x_2)^2+k(y-y_2)^2$

$1+\left|\frac{z_2-z_1}{z-z_2}\right|$

$\left|z-\frac{z_1-k^2z_2}{1-k^2}\right|=\frac{k|z_1-z_2|}{|1-k^2|}$

$|1-k^2||z|$

年　月　日

心得 体会 拓广 疑问

十一、证明$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z}{|z|}$不存在.

设 $z = re^{i\theta}$

$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z}{|z|}\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{re^{i\theta}}{r} = e^{i\theta}$

由于θ的任意性

十二、对于复数序列$\{a_n\}$，若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，求证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right|$

lim 分解

年 月 日

心得 体会 拓广 疑问

复变函数与积分变换试题(二)

一、填空题

1. 函数 $f(z)=(e^{x}\cos y-x)+i(e^{x}\sin y-y^{2})$ 在________可导，在__无__处解析.

2. 函数 $f(z)=u+iv$ 是解析函数，则 $e^{u}\cos v$ 的共轭调和函数是________.

3. 设函数 $f(z)=my^{3}+nx^{2}y+i(x^{3}+lxy^{2})$ 为解析函数，则 $m=$__1__，$n=$__-3__，$l=$__-3__.

4. $1^{\sqrt{3}+i}=$________.

5. 设 $f(z)+u+iv$ 解析，则 $f'(z)=$__$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$__.

二、单项选择题

1. 函数 $f(z)=u+iv$ 在点 $z_0=x_0+iy_0$ 处可导的充要条件是(D).

   A. u,v 在点 (x_0,y_0) 处偏导数存在

   B. u,v 在点 (x_0,y_0) 处可微

   C. u,v 在点 (x_0,y_0) 处满足 C-R 条件

   D. u,v 同时满足 B 和 C

2. 函数 $f(z)=|z|^{2}$ 在点 $z=0$ 处使(C)不成立.

   A. 连续　　B. 可导　　C. 解析　　D. C-R 条件

3. 函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内可导的充要条件是(D).

   A. u,v 在 D 内可微

   B. u,v 在 D 内有一阶连续的偏导数

   C. u,v 在 D 内满足 C-R 条件

   D. $f(z)$ 在 D 内解析

4. 函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 D 内解析，下列等式中正确的是(D).

   A. $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}$　　B. $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial x}$

   C. $f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial u}{\partial x}$　　D. $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$

5. 函数 $f(z)=u+iv$ 解析，则下列命题中错误的是(B).

   A. u,v 均为调和函数　　B. u 是 v 的共轭调和函数

   C. v 是 u 的共轭调和函数　　D. $-u$ 是 v 的共轭调和函数

年 月 日