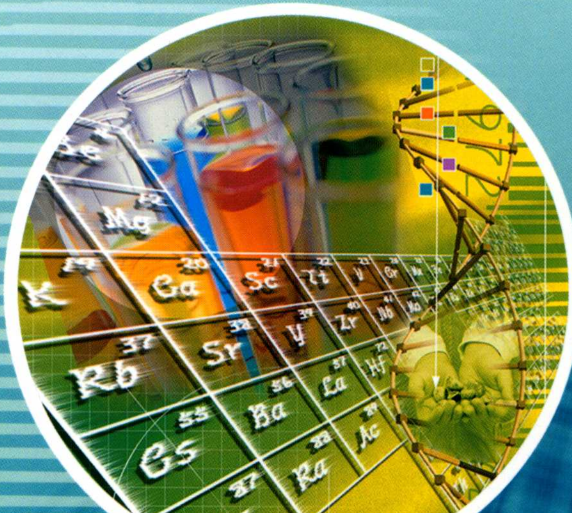
全国高等医药院校规划教材

医学高等数学

◎申笑颜　关　理　主编



全国高等医药院校规划教材

医学高等数学

主　编　申笑颜　关　理
副主编　陈　鑫　李慧珍

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是根据普通高等医药院校数学教学要求编写而成的数学基础课程教材. 本书共分 6 章，分别阐述了函数、极限与连续；导数与微分；导数的应用；不定积分；定积分及其应用；常微分方程等医药学研究中所涉及的数学基础知识. 以基本概念、基本理论与数学方法为重点，结合医药实例对各章内容进行详细讲解，并配有适当的习题. 本书在每章内容结束之后，均配有相应的数学历史知识与著名数学家生平以提高学生对数学的学习兴趣.

本书主要面向“医学高等数学”课程学时设置较少的高等医药院校. 也可供医药工作者作为科学研究的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

医学高等数学 / 申笑颜，关理主编. —北京：科学出版社，2016. 6
全国高等医药院校规划教材
ISBN 978-7-03-048518-2
Ⅰ. ①医… Ⅱ. ①申… ②关… Ⅲ. ①医用数学-高等学校-教材
Ⅳ. ①R311
中国版本图书馆 CIP 数据核字（2016）第 123215 号

责任编辑：王 颖 / 责任校对：桂伟利
责任印制：赵 博 / 封面设计：陈 敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www. sciencep. com
三河航远印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2016 年 6 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2016 年 6 月第一次印刷 印张：9 1/4
字数：216 000
定价：29.80 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

随着生命科学的持续发展与科学技术的数字化趋势，数学在现代医药学中的地位愈加突出，越来越多的专家学者利用数学知识来解决医药学研究中出现的种种现象与问题. 马克思曾说过: “一种科学只有成功地应用数学时，才算达到真正完善的地步”. 因此，医药学和其他生命科学一样也必须借助于数学的逻辑推理才能从根本上达到科学完善的境地. 对于医药院校学生而言，加强数学教育更是势在必行.

本书旨在对医药院校学生在专业学习过程中所涉及的微积分相关知识与数学方法进行深入浅出的讲解，使医药院校学生具备较强的数学素养，同时也提供了医药学实际问题中关于数量规律的研究方法. 本书共分为 6 章，前 5 章重点介绍了一元函数微积分的基本内容，包括函数、极限与连续，导数与微分，导数的应用，不定积分，定积分及其应用等内容；第 6 章重点介绍了常微分方程的基础内容.

现有国内大部分的《医学高等数学》教材重点包括数学定理的推导与证明，而这些内容对医学专业的学生来讲难度较大，且与本专业的学习内容关联性较小。因此本书在编写过程中，在不影响数学严谨性的前提下，精炼了教材内容，削减了冗长复杂的理论推导过程；在有限的学时内，着重阐明基本概念、基本理论和常用的数学研究方法，同时融入了大量微积分学知识在医药学领域中的应用实例，做到深入浅出，层次分明，重点突出，便于自学. 另外，本书每章内容结束后均配有著名数学家的生平与数学历史故事，使医药院校的理科学生重拾对数学的信心与兴趣，以增强本教材的思想性与趣味性.

本书在编写与出版过程中得到了各参编学校领导与科学出版社的全力支持和帮助，同时也查阅了大量的参考文献，借鉴了同行们的宝贵经验，在此深表感谢；限于编者的水平与经验，书中难免出现不妥之处，衷心欢迎广大读者与各界同仁批评和指正.

目　　录

第 1 章　函数、极限与连续

本章在初等函数的基础上，通过对函数、极限与连续的概念及其特点的基本讨论，初步阐明了高等数学中微积分学研究的主要对象和基本理论方法，为后续章节中相关知识的学习奠定理论基础。

1.1　函　　数

1.1.1　函数的概念

在自然现象及其过程的研究中，常常会遇到某些不同的量，其中有些量始终保持相对的静止态，称其为**常量**，有些量随着过程的推移将会赋予不同的取值，称其为**变量**①. 量与量之间往往不是孤立存在的，是按某种特定关系相互依赖、相互制约的. 例如，正方形面积 A 与其边长 l 的关系为 $A=l^2$，即边长变化将导致其面积增减，反之亦然；又如，未成年人的服药剂量一般取决于其体重变化，而后者又取决于其年龄、身高与营养状况的不同等；如上所述，这种变量之间的对应与依赖关系称之为**函数**.

定义 1.1　设 x, y 是同一变化过程中的两个量，D 为给定数集，对于每个量 $x\in D$，都有确定的另一个量，即 y 值与其相对应，这种关系称 y 是 x 的**函数**。记作

$$y=f(x),\quad x\in D. \tag{1.1}$$

式(1.1)中的 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，D 称为此函数的**定义域**. 定义域是能使函数有意义的所有自变量取值的集合；若在自变量 D 内任取一点 x_0，与其对应的因变量值 y_0 便称为函数值，记为 $y_0=f(x_0)$；函数值的集合称为函数的**值域**，记为 R. 函数组成的要素为定义域 D 及变量间的对应关系.

例 1.1　求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}+\arcsin\left(1-\dfrac{x}{2}\right)$；

(2) $y=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$.

解　(1) 要使函数有意义，必有

$$\begin{cases}1-x>0,\\ \left|1-\dfrac{x}{2}\right|\leqslant 1,\end{cases}$$

解此联立不等式，得 $x<1$ 及 $0\leqslant x\leqslant 4$，取二者交集后，可得该函数定义域为 D: $0\leqslant x<1$，或可表示为 $D=\{\,x\mid 0\leqslant x<1\,\}$ 或 $x\in[0,1)$.

---

①一个函数中的常量与变量的界定并不是绝对的. 以物体自由下落的距离 S 与历经时间 t 的关系为例，有 $S=gt^2/2$；这里 t 为变量，重力加速度 g 为常量，但随着地域不同，g 取值也略有差异；这表明常量只是一种通常意义下的取值概念，一般过程中，常量取值维持不变，但特殊情况下常量也可演化成一种变量，其是一种特殊形式的变量.

(2) 要使函数有意义，必有

$$\begin{cases} 1-x>0, \\ 1+x>0, \end{cases}$$

解此联立不等式，得定义域为 $-1<x<1$，或可表示为 $D=\{\,x\,|\,|x|<1\,\}$ 及 $x\in(-1,1)$.

例 1.2　静脉药物注射后人体内血药浓度变化 C 与时间 t 的函数关系为

$$C(t)=\frac{0.14t}{t^2+1},$$

其中定义域即为 D: $0<t<24$ (图 1.1).

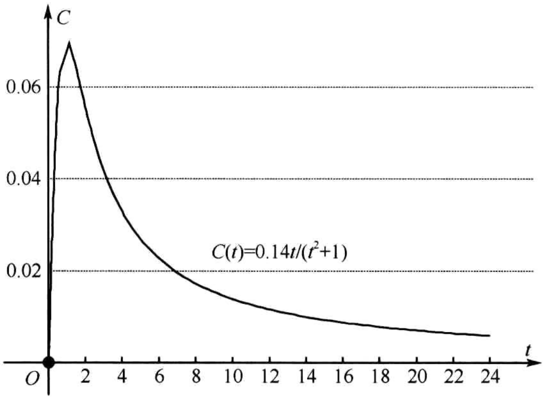


图 1.1

1.1.2　函数的特性

1. 单调性

对于函数 $y=f(x)$，若在其定义域的某个区间内任取两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)<f(x_2)$ (或 $f(x_1)>f(x_2)$)，则称函数 $f(x)$ 在该区间内**单调增加**(或**减少**)，而此区间称为函数的**单调增加**(或**减少**)**区间**. 单调增加与单调减少函数统称为**单调函数**，单调增加区间与单调减少区间统称为**单调区间**.

单调增加(或减少)函数的图形是沿 x 轴正向上升(或下降)的曲线(图 1.2、图 1.3).

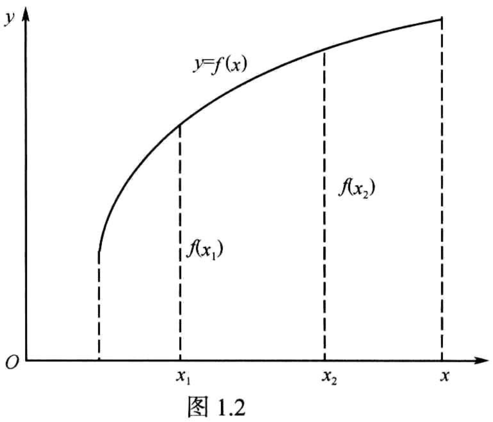


图 1.2

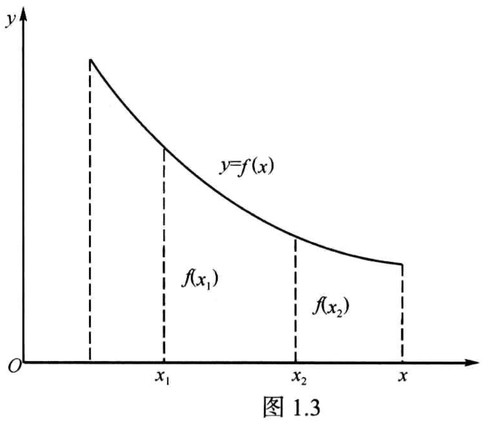


图 1.3

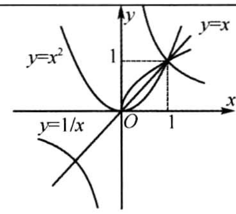
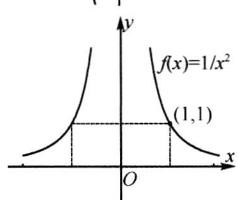
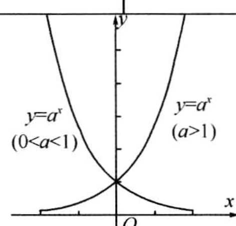
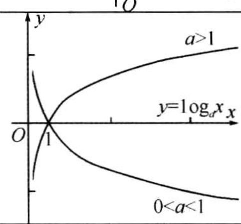
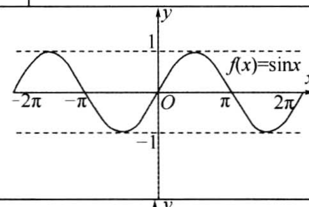
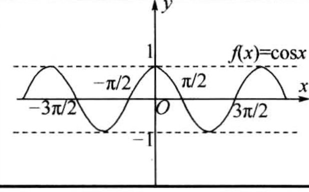
例如，对于函数 $y=x^2$ 来说，区间 $(-\infty,0]$ 为其单调减少区间，区间 $[0,+\infty)$ 为其单调增加区间，但其在整个的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内并不是单调函数。

2. 奇偶性

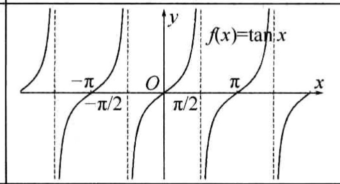
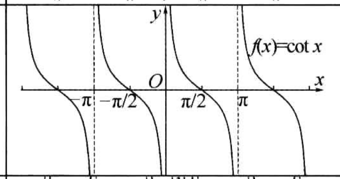
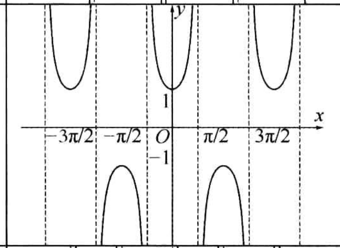
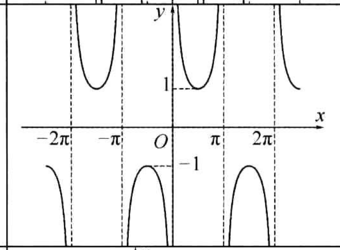
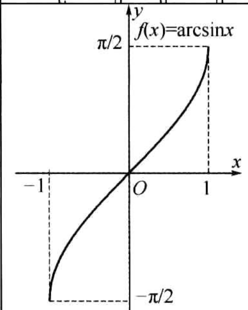
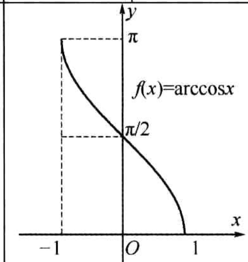
设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，D 关于原点对称，对于 D 内任意一点 x，若均有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ **是偶函数**，若均有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 是**奇函数**，若函数既非偶函数也非奇函数，则称其为非奇非偶函数. 奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称.

例如，函数 $y=\cos x$ 为偶函数，$y=\sin x$ 为奇函数 (表 1.1).

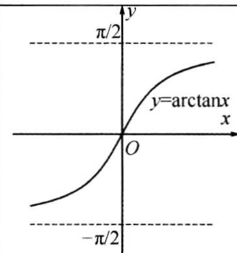
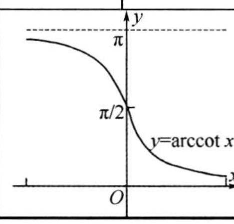
表 1.1　基本初等函数

函数		表达式	定 义 域	图　形	特　征
幂函数		$y=x^a$ $(a\neq 0)$	a 取不同值时，函数定义域也不同，但在 $(0,+\infty)$ 内都有定义		图像都过(1，1)点，且当 $a>0$ 时图像在第一象限内为增函数，$a<0$ 时图像为减函数；若 a 为偶数，图像关于 y 轴对称，a 为奇数，图像关于原点对称
指数函数		$y=a^x$ $\begin{pmatrix}a>0,\\ a\neq 1\end{pmatrix}$	$(-\infty,+\infty)$		图像在 x 轴上方，且过点(0, 1)，当 $0<a<1$ 时，图像为减函数；当 $a>1$ 时，图像为增函数.
对数函数		$y=\log_a x$ $\begin{pmatrix}a>0,\\ a\neq 1\end{pmatrix}$	$(0,+\infty)$		图像在 y 轴右侧，且过点 (1,0)，当 $0<a<1$ 时，为减函数；当 $a>1$ 时，为增函数
三角函数	正弦函数	$y=\sin x$	$(-\infty,+\infty)$		是以 2π 为周期的奇函数，$\lvert\sin x\rvert\leqslant 1$
	余弦函数	$y=\cos x$	$(-\infty,+\infty)$		以 2π 为周期的偶函数，$\lvert\cos x\rvert\leqslant 1$

续表

函数		表达式	定义域	图形	特征
三角函数	正切函数	$y=\tan x$	$x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$		以 π 为周期的奇函数，在区间 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 内为单增函数
	余切函数	$y=\cot x$	$x\neq k\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$		以 π 为周期的奇函数，在 $(0,\pi)$ 内为减函数
	正割函数	$y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$		以 2π 为周期的偶函数，即 $\lvert\sec x\rvert\geqslant1$
	余割函数	$y=\csc x=\frac{1}{\sin x}$	$x\neq k\pi\ (k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$		以 2π 为周期的奇函数，即 $\lvert\csc x\rvert\geqslant1$
反三角函数	反正弦函数	$y=\arcsin x$	$[-1,1]$		值域为 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，为单调递增、奇函数
	反余弦函数	$y=\arccos x$	$[-1,1]$		值域 $[0,\pi]$，为单调递减函数

续表

函数		表达式	定义域	图形	特征
反三角函数	反正切函数	$y=\arctan x$	$(-\infty,+\infty)$		值域为 $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，为单调递增、奇函数
	反余切函数	$y=arc\cot x$	$(-\infty,+\infty)$		值域 $(0,\pi)$，为单调递减函数

3. 周期性

对于函数 $f(x)$，若有一非零常数 L，使其对 $f(x)$ 定义域 D 内任一 x 值，都有 $f(x+L)=f(x)$，则称此函数为其定义域内的**周期函数**，L 称为**函数周期**. 例如，函数 $\sin x$ 和 $\cos x$ 均是以 2π 为周期的周期函数，$\tan x$ 和 $\cot x$ 均是以 π 为周期的周期函数(表 1.1).

4. 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在一个正数 M，使得该函数在 D 中某区间内的任意一点 x，总有 $|f(x)|\leqslant M$，则称此函数在该区间内为**有界函数**，否则称此函数在该区间内为**无界函数**.

讨论函数是否有界必须参考其界定条件，因为同一个函数在其定义域内的某个区间上若是有界的，在另一个区间上却可以是无界的. 如函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在其整个定义域内虽然是无界函数，在 $(1,+\infty)$ 内却是有界函数(图 1.4).

1.1.3 几种函数简介

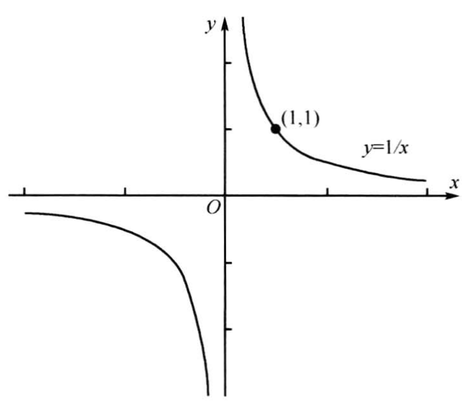


图 1.4

1. 基本初等函数

基本初等函数通常包括五类函数：**幂函数**、**指数函数**、**对数函数**、**三角函数**和**反三角函数**.

各基本初等函数的表达式、图形及其特征见表 1.1.

2. 初等函数

由常数和基本初等函数经有限次的四则运算或有限次的复合运算而构成的、可用一个解析式表达的函数，称为**初等函数**. 如 $f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$，$y=\sqrt{e^x-\cos x}$，$y=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 等都是初等函数.

3. 复合函数

定义 1.2 若变量 y 是变量 u 的函数，变量 u 又是变量 x 的函数，即

$$y=f(u),\quad u=\varphi(x), \tag{1.2}$$

则当 x 在 $\varphi(x)$ 的定义域或定义域一部分中取值时，其所对应的 u 值能使函数 $y=f(u)$ 有定义，则称 y 是 x 的**复合函数**，其中 u 称为**中间变量**.

例 1.3 指出函数 $y=\lg\left[\tan\left(x^2+\arccos x\right)\right]$ 是由哪几个函数复合而成的.

解 函数由 $y=\lg u$，$u=\tan v$，$v=x^2+\arccos x$ 复合而成.

例 1.4 指出函数 $y=\mathrm{e}^{\cos^2(1-2x)}$ 是由哪几个函数复合而成的.

解 函数 $y=\mathrm{e}^{\cos^2(1-2x)}$ 由 $y=\mathrm{e}^u, u=v^2$，$v=\cos w$，$w=1-2x$ 复合而成.

复合函数的分解结果要求分解出的每个函数都是由基本初等函数或初等函数经四则运算后所构成的简单函数，但并非任意函数都可构成一个复合函数，如 $y=\arcsin u$ 及 $u=x^2+1$ 就不能复合成一个函数，因为函数 $u=x^2+1$ 的值域（即函数 y 的定义域）为 $[1,+\infty)$，在此区间上 $y=\arcsin u$ 无意义.

4. 反函数

通常情况下，我们研究的是函数 $y=f(x)$ 中因变量 y 随自变量 x 的对应变化关系，但若把二者因果关系置换，研究 x 随 y 的对应变化关系，即需引入反函数的概念.

定义 1.3 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为数集 D，值域为数集 R，若对于任意一个 $y\in \mathrm{R}$，都有唯一的 $x\in D$，使 $x=f(y)$ 成立，则 y 与 x 的对应关系在 R 上定义了一个新函数，这个新函数称为 $y=f(x)$ 的**反函数**，记作

$$x=\varphi(y). \tag{1.3}$$

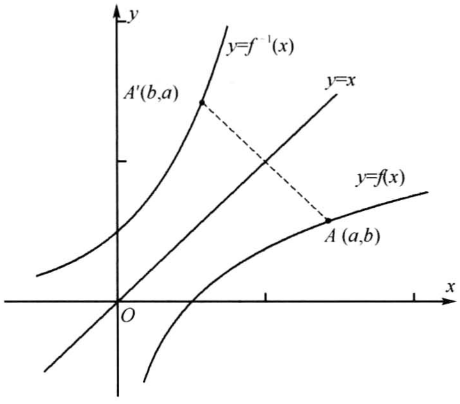


图 1.5

直接函数与反函数之间图形关于直线 $y=x$ 对称，故反函数的定义域恰好是原函数的值域，反函数的值域恰好是原函数的定义域；如 $y=a^x$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 为其反函数 $x=\log_a y$ 的值域，$y=a^x$ 的值域 $(0,+\infty)$ 为其反函数 $x=\log_a y$ 的定义域(图 1.5).

5. 分段函数

若一函数对其定义域 D 内的不同取值，需用两个或多个不同的解析式来表达，这类函数即称为**分段函数**.

例 1.5 试作函数 $y=f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 1+x, & x>1\end{cases}$ 的图形.

解 这是一个分段函数，其定义域 $D=[0,+\infty)$，当 $x\in[0,1]$，对应函数式为 $f(x)=2\sqrt{x}$；当 $x\in(1,+\infty)$，对应函数式为 $f(x)=1+x$ (图 1.6).

例 1.6 生理学研究中，血液中胰岛素的浓度 $C(t)$ 随时间 t 变化的公式为

$$C(t)=\begin{cases}t(10-t), & 0\leqslant t\leqslant 5,\\ 25\mathrm{e}^{-k(t-5)}, & t>5\end{cases}\qquad (k>0, \text{为常数}).$$

这是一个分段函数，其定义域 $D=[0,+\infty)$，当 $t\in[0,5]$，对应函数式为 $C(t)=t(10-t)$；当 $t\in(5,+\infty)$，对应函数式为 $C(t)=25\mathrm{e}^{-k(t-5)}$ (图 1.7).

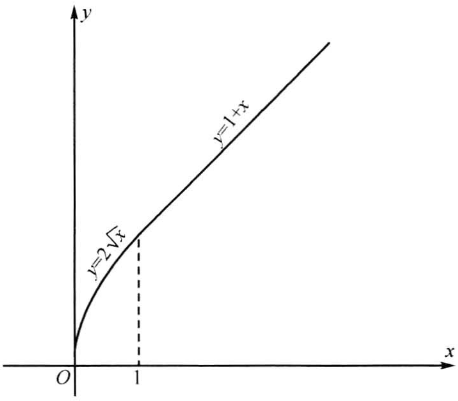


图 1.6

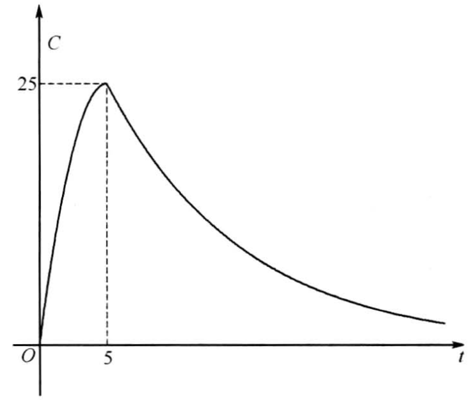


图 1.7

6. 取整函数

设 x 为任意实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的**取整函数**，记为 $f(x)=[x]$. 例如，$[\pi]=3,\left[\sqrt{2}\right]=1,\left[\dfrac{4}{5}\right]=0,\left[-\dfrac{4}{7}\right]=-1$ 等. 取整函数的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域是整数集 Z，这是一个分段函数，图形为阶梯曲线，即 x 在整数值处发生跳跃，跃度为 1 (图 1.8).

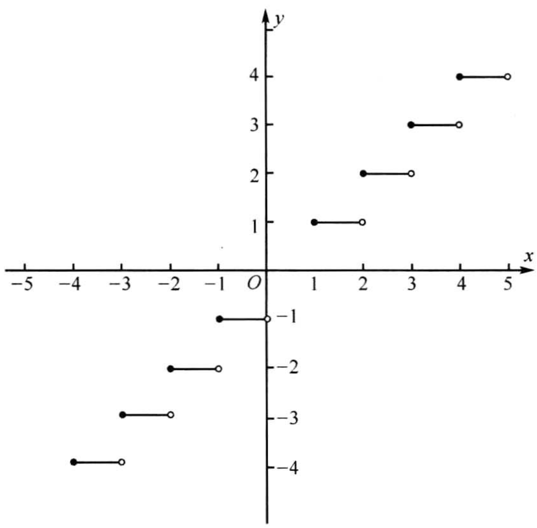


图 1.8

1.2 极　　限

1.2.1 极限的概念

函数的极限分两种，一是当自变量 x 的绝对值无限增大（$x\to\infty$ 或 $x\to-\infty$）时函数的极限，二是当自变量 x 无限趋近于某一值 x_0（即 $x\to x_0$）时函数的极限.

1. $x\to\infty$ 时函数的极限

定义 1.4 当函数中自变量 x 的取值无限增大时，函数 $f(x)$ 值无限地趋近于一个常数，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\text{，当 } x\to\infty. \tag{1.4}$$

$x\to\infty$ 即自变量 x 的绝对值无限增大，即 $|x|\to\infty$，包括 $x\to+\infty$ 与 $x\to-\infty$；于是从式(1.4)即推知，当 $|x|\to\infty$，曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=A$ 无论以各种方式接近，二者对应点的直线距离都趋于零 (图 1.9).

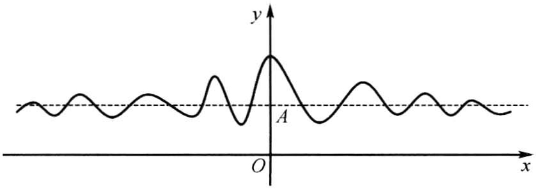


图 1.9

例 1.7 考虑下列函数的极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2}$；(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^{-x}$；(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$.

解 (1) $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x^2}} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^{x^2}} = 0$.

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{3^x} = 0$.

(3) 当 $x\to+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x = \dfrac{\pi}{2}$，当 $x\to-\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x = -\dfrac{\pi}{2}$. 故 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

例 1.8 求函数 $y=\sin x$ 当 $x\to\infty$ 时的极限.

解 无论 $x\to+\infty$ 还是 $x\to-\infty$，$\sin x$ 值恒在 1 与 -1 间变化，且不趋近于任何常数，故函数极限不存在.

2. $x\to x_0$ 时函数的极限

定义 1.5 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内有定义，当自变量 x 无限地趋近于点 x_0 $(x\neq x_0)$ 时，函数 $f(x)$ 无限趋近于某一常数 A，则称 A 为函数当 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\text{，当 } x\to x_0. \tag{1.5}$$

同样地，从式(1.5)推知，当 $x\to x_0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=A$ 上两个对应点的直线距离也都趋于零，即 $|f(x)-A|\to 0$ (图 1.10).

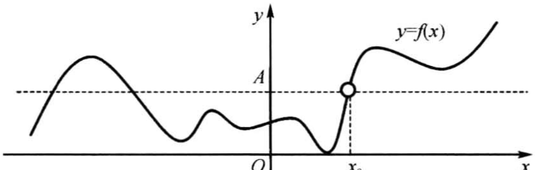


图 1.10

函数的极限值与函数值的意义不同，函数在某点处是否有极限取决于它在此点的某个邻域内是否有定义，而与该点本身是否有定义无关.

例 1.9 求函数 $f(x)=3x-1$ 当 $x\to 1$ 时的极限.

解 $\lim\limits_{x\to 1}(3x-1)=\lim\limits_{x\to 1}(3\cdot 1-1)=2$.

例 1.10 求函数 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 当 $x\to 2$ 时的极限.

解 函数在 $x=2$ 处无定义，但当 $x\to 2$ 时，$x-2\neq 0$，故可先将函数式做有理化处理，消去 $x-2$ 后，再代入 $x=2$ 得出极限值.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4.$$

例 1.11 讨论函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to 0$ 时的极限.

解　当 x 越来越接近于零时，函数值将越来越频繁地在 1 与 -1 间振荡，并不趋于一个固定常数 A，故 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x\to 0$ 时函数极限不存在. 此函数称为**振荡函数** (图 1.11).

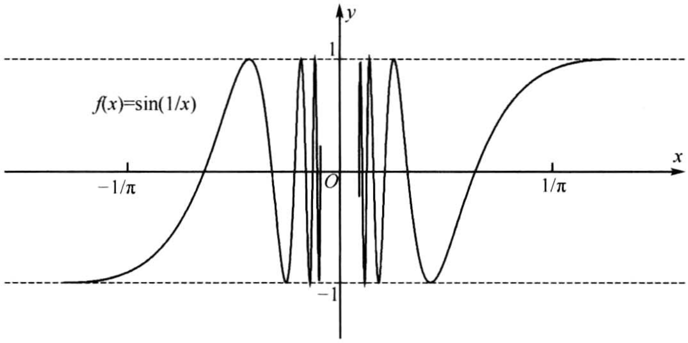


图 1.11

极限又分为左极限与右极限. 如果 x 从左侧趋近于 x_0，此时产生的极限称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的**左极限**；如果 x 从右侧趋近于 x_0，此时产生的极限称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的**右极限**，分别记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A \text{ 或 } f\left(x_0^-\right)=A, \tag{1.6}$$

以及

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \text{ 或 } f\left(x_0^+\right)=A, \tag{1.7}$$

函数的左右极限统称**单侧极限**.

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处极限存在的充要条件是：当 $x\to x_0$ 时，函数在此点的左右极限存在并相等，即 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

例 1.12　讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x-1, & x<0, \\ 0, & x=0, \\ x+1, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的极限.

解　因函数在 $x=0$ 点为非连续函数，需先按定义域分别讨论其单侧极限.

左极限为 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$，右极限为 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$，左右极限存在但不等，即 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，所以函数在 $x=0$ 点极限不存在.

例 1.13　设 $f(x)=\begin{cases} x+1, & -\infty<x<0, \\ x^3, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 1, & x>1, \end{cases}$ 求 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

解　当 $x\to 0$，$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+1)=1$，$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^3=0$，即 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$，故 $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ 不存在.

当 $x\to 1$，$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^3=1$，$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 1=1$，即 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1$.

1.2.2 极限的四则运算

定理 1.1 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在自变量同一变化过程中的极限分别为 A 和 B，则

(1) $\lim\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$；

(2) $\lim\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$，特别地，

$\lim\left[Cf(x)\right]=C\lim f(x)=CA$ (C为常数)，$\lim\left[f(x)\right]^n=\left[\lim f(x)\right]^n=A^n$ (n为正整数)；

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$ $(B\neq 0)$.

证明从略.

例 1. 14 求 $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-2x+3\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-2x+3\right)=\left(\lim\limits_{x\to 2}x\right)^2-2\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}3=4-4+3=3$.

例 1.15 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}$； (2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$.

解 极限式为分母为零的无理式，需先进行有理化变形或化简后再求极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(\sqrt{x-2}-1\right)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x-2}+1\right)}$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 3}\left(\sqrt{x-2}+1\right)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x-2}+\lim\limits_{x\to 3}1}=\frac{1}{2}.$$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(x-2)}{\lim\limits_{x\to 1}(x+2)}=-\dfrac{1}{3}$.

例 1.16 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4-3^x}{3^x}$； (2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-1}{x^2-2}$.

解 极限式分母为无穷大，需先变形后再求极限.

(1) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{4-3^x}{3^x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{4}{3^x}-1\right)=4\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{3^x}-\lim\limits_{x\to +\infty}1=4\cdot 0-1=-1$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+3x-1}{x^2-2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{2}{x^2}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}3+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}1-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x^2}}=\dfrac{3+0-0}{1-0}=3$.

1.2.3　两个重要的极限

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

证　作四分之一单位圆，设 x 为一圆心角 $\angle AOB$ 且 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$，过 A 点作切线 AC，AC 与圆半径 OB 的延长线相交于点 C (图 1.12).

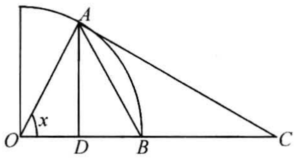


图 1.12

因 $\sin x = AD,\ \tan x = AC,\ x = \overparen{AB}$，

且 $S_{\Delta AOB} < S_{扇形AOB} < S_{\Delta AOC}$，

故有 $\dfrac{1}{2}\sin x < \dfrac{x\pi}{2\pi} < \dfrac{\tan x}{2}$，即 $\sin x < x < \tan x$，

变形为 $1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$，相当于 $1 > \dfrac{\sin x}{x} > \cos x$.

因 $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1,\ \lim\limits_{x \to 0} 1 = 1$，据夹逼准则，可知 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

例 1.17　求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$.

解　$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} \cdot \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$.

例 1.18　求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{1 - \cos x}$.

解
$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{2\sin^2 \frac{x}{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{4 \cdot \frac{x^2}{4}}{2\sin^2 \frac{x}{2}} = 2\lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}}$$
$$= 2\lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2.$$

2. $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$

证　可用数列 $\{x_n\} = \left\{ \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \right\}$ $(n \in \mathrm{Z})$ 的极限加以简单证明.

当 n 渐增时，数列 $\{x_n\}$ 的变化趋势如下(表 1.2).

表 1.2　$\{x_n\} = \left\{ \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \right\}$

n	1	2	3	4	5	10	100	1000	10000	…
$\{x_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$	2	2.250	2.370	2.441	2.488	2.594	2.705	2.717	2.718	…